Piotr Pragacz
profesor
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
doktora Michała Kapustki

Pan Michał Kapustka jest matematykiem specjalizującym się w geometrii algebraicznej. Pracował na Uniwersytecie Jagiellońskim, na Uniwersytecie w Zurychu, na Uniwersytecie w Oslo i Stavanger. Za jego specjalności naukowe należy uznać teorię rozmaitości Calabi-Yau i hiperkählerowskich.

Tytuł osiągnięcia naukowego dr Michała Kapustki w jego rozprawie habilitacyjnej to

„Trójwymiarowe rozmaitości Calabi-Yau oraz rozmaitości Mukai".

Głównym tematem osiągnięcia Michała Kapustki są rozmaitości Calabi-Yau. Są to rozmaitości o trywialnej pierwszej klasie Cherna i znikających pośrednich kohomologiach snopa strukturalnego. Rozmaitości Calabi-Yau wraz z torusami i rozmaitościami hiperkählerowskimi są elementarnymi klockami, z których zbudowana jest każda rozmaitość kählerowska z trywialną pierwszą klasą Cherna.

Rozmaitości Calabi-Yau stanowią kluczowe obiekty z punktu widzenia klasyfikacji rozmaitości zespolonych. Duża część rozprawy poświęcona jest klasyfikacji rozmaitości Calabi-Yau. Jedną z głównych technik stosowanych przez autora są odrzutowania rozmaitości Calabi-Yau.

W [H7] autor bada odrzutowania Kustina-Millera między 3-rozmaitościami Calabi-Yau i używa ich do połączenia wielu rodzin Calabi-Yau 3-rozmaitości z siecią Calabi-Yau zupełnych przecięć. Ten rezultat pozwala mu znaleźć jawny opis kilku znanych rodzin Calabi-Yau 3-rozmaitości za pomocą równań. Ponadto autor znajduje 2 nowe przykłady Calabi-Yau 3-rozmaitości z grupą Picarda rangi 1. Są one opisane przez równania Pfaffianowe w ważonych przestrzeniach rzutowych.

W [H8] jest skonstruowana kaskada wyznacznikowych 3-rozmaitości Calabi-Yau . Autor używa geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach, żeby połączyć je z siecią. Wyznaczone są nieznane do tej pory niezmienniki Hodge'a tych rozmaitości. Otrzymane rezultaty stanowią pierwszy istotny krok w kierunku badania symetrii lustrzanej dla wyznacznikowych rozmaitości Calabi-Yau. Punktem wyjścia do rozważań autora nad rozmaitościami wyznacznikowymi była analogia zauważona przez Grossa i Popescu pomiędzy opisami wyznacznikowych rozmaitości Calabi-Yau oraz opisami powierzchni del Pezzo. Jest ona opisana w tabelce na stronie 15 Autoreferatu.

Autor wypowiada następujące twierdzenie: Niech D_i oznaczają rodziny rozmaitości Calabi-Yau opisane w i-tym wierszu tabeli. Wówczas dla każdego $3 \leq i \leq 8$ rodzina D_i jest połączona z rodziną D_{i-1} przez dwuprzejście geometryczne oparte na odrzutowaniu powierzchni del Pezzo D_i stopnia i.

W [H5] autor bada rozmaitość Mukai $M_{10} = G_2$ i dowodzi, że: Ogólne hiperpłaskie cięcie F tej rozmaitości dopuszcza jedyne liniowe zanurzenie jako liniowe cięcie Grassmannianu $G(3,6)$.

Ponadto: Rozmaitość G_2 nie zawiera płaszczyzn ani powierzchni stopnia 2. Ponadto przez każde dwa punkty $p_1, p_2 \epsilon G_2$ przechodzi prosta lub jedyna stożkowa zawarta w G_2^1.

Głównym krokiem w dowodzie jedyności jest następujący fakt:

Schemat Hilberta stożkowych zawartych w F jest izomorficzny z wykresem odwzorowania Cremony $\mathbb{P}^5$ zdefiniowanego przez system liniowy kwadryk zawierających powierzchnie Veronese. Z rozważań tych można uzyskać następujący fakt:

Schemat Hilberta stożkowych na gładkiej 3-rozmaitosci Fano-Mukai genusu 10 jest izomorficzny z Jakobianem krzywej genusu 2.

Omówiliśmy [H5], [H7], [H8]. Jeśli chodzi o inne prace wchodzące w osiągnięcie, to

- w [H1] autor podejmuje problem istnienia metryk Kählera-Einsteina na rozmaitościach Fano;
- w [H2] rozwijana jest ogólna teoria odrzutowań;
- w [H2, H3, H4] autor zajmuje się ogólną teorią biliason oraz jej powiązań z odrzutowaniami; ponadto uzyskane są wyniki dotyczące powierzchni ogólnego typu z $p_9 = 6$;
- wyniki [H6] znajdują zastosowanie w klasyfikacji powierzchni $K3$ genusu 10.

Wyniki osiągnięcia Michała Kapustki stanowią pokaźny wkład do geometrii algebraicznej.

Ogólnie zespoloną rozmaitość kählerowską nazywamy hiperkählerowską gdy jest zwarta i jednospójna oraz przestrzeń przekrojów jej snopa 2-form jest generowana przez nigdzie nie znikającą taką formę.

Zaprezentujemy teraz kilka prac autora o rozmaitościach hiperkählerowskich:

[O2] A very special EPW sextic and two IHS fourfolds; współautorzy: Maria Donten-Bury, Bert van Geemen, Grzegorz Kapustka, Jarosław A. Wiśniewski.

W pracy tej autorzy rozwiązują problem Ugo Morina. W roku 1930, Morin sklasyfikował nieskończone nierozkładalne pełne rodziny wzajemnie przecinających się płaszczyzn w P^5. Rodzinę płaszczyzn nazywamy pełną rodziną wzajemnie przecinających się płaszczyzn jeżeli każde 2 płaszczyzny z rodziny przecinają się, ale nie ma płaszczyzny poza tą rodziną, która przecina wszystkie płaszczyzny z rodziny. Morin pytał o możliwość klasyfikacji skończonych pełnych rodzin płaszczyzn w P^5.

O'Grady pokazał, że dla $10 \leq k \leq 16$ istnieje przestrzeń moduli pełnych konfiguracji k wzajemnie przecinających się płaszczyzn w P^5 o wymiarze $20 - k$. Dowiódł też, że pełna skończona rodzina płaszczyzn ma między 10 a 20 elementów i zapytał jaka jest największa możliwa liczba takich płaszczyzn.

Odpowiedź na to pytanie jest 20. Rodzina jest znaleziona przy pomocy projektywnego modelu rozmaitości hiperkählerowskiej skonstruowanej we wcześniejszej pracy Donten-Bury i Wiśniewskiego lub przy pomocy schematu Hilberta dwóch punktów na powierzchni K3 Vinberga. Ten projektywny model jest bardzo specjalną EPW sekstyką w P^5 osobliwą wzdłuż 60 płaszczyzn. (EPW sekstyka $S_A \subset P^5 = P(W)$ jest zdefiniowana jako wyznacznik morfizmu

$$A \otimes O_P^5 \to \Omega^2_{P^5}(3) \subset P(W) \times \Lambda^3 W ,$$

gdzie $A \subset \Lambda^3 W$ jest 10-wymiarową podprzestrzenią lagranżowską.)

Odpowiedni podzbiór 20 płaszczyzn stanowi rozwiązanie problemu O'Grady'ego.

[O1] EPW cubes; współautorzy: Atanas Iliev, Grzegorz Kapustka, Kristian Ranestad,

Autorzy konstruują nową 20-wymiarową rodzinę 6-wymiarowych rozmaitości hiperkählerowskich. Elementy tej rodziny są deformacyjnie równoważne ze schematami Hilberta 3 punktów na powierzchni K3. Są one podwójnymi nakryciami specjalnych podrozmaitości grassmannianu $G(3,6)$ kowymiaru 3. Te specjalne podrozmaitości są lagranżowskimi miejscami degeneracji i ich konstrukcja jest analogiczna do EPW sekstyk. Są one nazywane EPW sześcianami. Jako wniosek z pracy otrzymuje się, że przestrzeń moduli spolaryzowanych IHS 6-rozmaitości typu K3 o stopniu Beauville'a-Bogomolova 4 i podzielności 2 jest uniwymierna (te rozmaitości będące podwójnymi nakryciami EPW sześcianów nazywane są podwójnymi EPW sześcianami).

Prace [H1 – H8] z nawiązką spełniają wymogi osiągnięcia rozprawy habilitacyjnej, a pozostały dorobek habilitanta jest imponujący. Trzeba powiedzieć, że jest to bardzo trudna tematyka i nawet mały postęp wymaga sporego wysiłku.

W ostatnich latach Habilitant współorganizuje w IM PAN szereg stojących na wysokim poziomie konferencji poświęconych rozmaitościom Calabi-Yau i gromadzących światową czołówkę matematyków w tej tematyce.

Uważam, że rozprawa habilitacyjna Pana Michała Kapustki spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane tego typu rozprawie i wnoszę o dopuszczenie kandydata do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego. Ponadto wnoszę o wyróżnienie tej rozprawy.

P. Pragacz

Warszawa 11.12.2017

Piotr Pragacz