AUTOREFERAT

1. Imię i Nazwisko.

Marcin Mazur

2. Dyplomy i stopnie naukowe.

- Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Matematyki i Fizyki, 2001.

  Tytuł rozprawy doktorskiej: „Własności C^0 typowe i asymptotyka dyskretnych układów dynamicznych".
- Dyplom magistra informatyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Matematyki i Fizyki, Instytut Informatyki, 1999.
- Dyplom magistra matematyki (specjalność: matematyka teoretyczna), Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Wydział Matematyki i Fizyki, Instytut Matematyki, 1997.

3. Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych.

- Październik 2004 – teraz: adiunkt, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Instytut Matematyki.
- Październik 2001 – wrzesień 2004: asystent, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Instytut Matematyki.
- Październik 2006 – teraz: starszy wykładowca, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu, Instytut Pedagogiczny.
- Październik 2001 – wrzesień 2006: wykładowca, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu, Instytut Pedagogiczny.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.).

a) Tytuł osiągnięcia naukowego.

Dynamika hiperboliczna

b) Prace stanowiące osiągnięcie naukowe (w porządku chronologicznym).

[R1] P. Kościelniak oraz M. Mazur, *On C^0 genericity of various shadowing properties*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **12** (2005), 523–530.

[R2] P. Kościelniak oraz M. Mazur, *Chaos and the shadowing property*, Topology Appl. **154** (2007), 2553–2557.

[R3] M. Mazur, J. Tabor oraz P. Kościelniak, *Semi-hyperbolicity and hyperbolicity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **20** (2008), 1029–1038.

[R4] M. Mazur, *On some useful conditions for hyperbolicity*, Proceedings of the Conference "International Workshop on Dynamical Systems and Related Topics" (Daejeon, Korea, 2008), Trends in Math. – New Series **10** (2008), 57–64.

[R5] P. Kościelniak oraz M. Mazur, *Genericity of inverse shadowing property*, J. Difference Equ. Appl. **16** (2010), 667–674.

[R6] M. Mazur oraz J. Tabor, *Computational hyperbolicity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **29** (2011), 1175–1189.

[R7] P. Kościelniak, M. Mazur oraz J. Tabor, *Appendix A. Semi-Hyperbolicity: Estimations*, w: „P. Diamond, P. Kloeden, V. Kozyakin oraz A. Pokrovskii, Semi-Hyperbolicity and Bi-Shadowing", str. 181–192, Random and Computational Dynamics, Vol. 1, American Institute of Mathematical Sciences, 2012.

[R8] M. Mazur, *On the relationship between hyperbolic and cone-hyperbolic structures in metric spaces*, Ann. Polon. Math. **109** (2013), 29–38.

[R9] M. Mazur oraz P. Oprocha, *S-limit shadowing is $\mathscr{C}^0$-dense*, J. Math. Anal. Appl. (2013), `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.004`.

c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Dynamika hiperboliczna

Marcin Mazur

1. Wprowadzenie

Pojęcie hiperboliczności wydaje się być jednym z najbardziej podstawowych w nowoczesnej teorii układów dynamicznych. Rozpoczynając od opublikowanych w latach 60-tych dwudziestego wieku artykułów Anosova [7] i Smale'a [64], było ono wielokrotnie wykorzystywane przez ostatnie półwiecze w pracach różnych autorów. Wiele głębokich rezultatów teoretycznych dotyczących układów o strukturze hiperbolicznej zostało w tym czasie uzyskanych, a także powstało sporo monografii przybliżających tę tematykę (zob. np. [11, 20, 23] oraz cytowaną tam literaturę).

Zainteresowanie teorią hiperboliczności może wynikać z faktu, że, z grubsza rzecz biorąc, dynamika hiperboliczna posiada zarówno atrybuty stabilności, jak i atrybuty niestabilności (np. układy hiperboliczne są strukturalnie stabilne, ale jednocześnie wykazują czułą zależność od warunku początkowego, zob. [57]). Nie jest więc zaskakujące, że dynamika taka dopuszcza pewien rodzaj chaosu, pod warunkiem, że topologiczna struktura układu jest wystarczająco skomplikowana (np. podkowa Smale'a [64]).

Znaczenie pojęcia hiperboliczności w teorii układów dynamicznych nie może zostać pomniejszone, jednakże pozostaje pewna luka pomiędzy wynikami teoretycznymi, których ono dostarcza, a ich faktycznym zastosowaniem. Prawdopodobnie główny problem leży w samych warunkach definiujących zbiór hiperboliczny (takich jak np. istnienie odpowiednich rozkładów niezmienniczych), które są raczej trudno weryfikowalne przy użyciu metod zarówno analitycznych, jak i (ścisłych) numerycznych. W niektórych sytuacjach użytecznych narzędzi dostarczają pewne blisko spokrewnione koncepcje, takie jak stożkowa hiperboliczność (zob. np. [43]) czy semi-hiperboliczność (zob. np. [20]).

Z drugiej strony, chociaż większość pojęć i rezultatów związanych z ideą hiperboliczności dotyczy dyfeomorfizmów na rozmaitościach zwartych, pozostaje jeszcze wiele interesujących własności natury topologicznej (metrycznej), takich jak odtwarzanie pseudo-orbit (ang. *shadowing*) czy ekspansywność (ang. *expansiveness*), które nie wymagają struktury różniczkowej lub nawet odwracalności układu. Powstała zatem potrzeba uogólnienia pojęcia hiperboliczności na klasę homeomorfizmów (lub, ogólnie, odwzorowań ciągłych), która również przykuwała wiele „matematycznej uwagi". Pewne dobrze znane (i w zasadzie równoważne) koncepcje topologicznej wersji hiperboliczności zostały wprowadzone w [39, 45, 58].

W niniejszym autoreferacie odnosimy się do obu ze wspomnianych powyżej nurtów w rozwoju teorii układów hiperbolicznych, nazywając jest w dalszej części odpowiednio wątkami C^1 i C^0. Mówiąc dokładniej, zajmujemy się następującymi problemami:

(P1) ścisła weryfikacja numeryczna warunku hiperboliczości dla danego (nietrywialnego) zwartego zbioru niezmienniczego *(wątek C^1)*,

(P2) próba uzyskania topologicznej (metrycznej) wersji stożkowej hiperboliczności, która byłaby dobrze przystosowana do (ścisłej) analizy numerycznej *(wątek C^0)*,

(P3) badanie pewnych pojęć topologicznych blisko spokrewnionych z hiperbolicznością, a dokładnie różnych wariantów własności odtwarzania, takich jak odtwarzanie okresowe, odwrotne i graniczne (ang. *periodic, inverse and limit shadowing*), z punktu widzenia ich generyczności względem topologii C^0 (*wątek C^0*).

Kolejne dwa rozdziały zawierają przegląd głównych rezultatów prac [R1–R9], poprzedzony odpowiednim „tłem teoretycznym", które ułatwia szczegółowe zrozumienie tematu oraz czyni ten autoreferat, do pewnego stopnia, samowystarczalnym. Zwracamy uwagę na to, że w naszych rozważaniach wykorzystujemy bardzo różne techniki, począwszy od metod „czysto" topologicznych, aczkolwiek niejednokrotnie angażujących pewne dość zaawansowane narzędzia, takie jak rozkład rozmaitości na rączki (ang. *a handle decomposition*, zob. [30]) lub relacje nakrywające (ang. *covering relations*, zob. [74]), a skończywszy na ścisłych metodach numerycznych. Podkreślamy jednocześnie, że te ostatnie techniki wkomponowują się w intensywnie rozwijany na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat nurt w teorii układów dynamicznych i topologii, zapoczątkowany wykazaniem przez Mischaikowa i Mrozka istnienia chaosu w równaniach Lorenza [41], w którym dowody ważnych twierdzeń wspierane są przez odpowiednie programy komputerowe. Następstwem tego nurtu jest powstawanie różnych grup (projektów) tematycznych, takich jak np. *Computational Homology Project (CHomP)* [75], projekt *Global Analysis of Invariant Objects (GAIO)* [78] lub grupa *Computer Assisted Proofs in Dynamics (CAPD)* [77], czy choćby nasz niewielki projekt pn. *Computational Hyperbolicity* [76], które tworzą odpowiednie narzędzia teoretyczne oraz „produkują" własne, dedykowane oprogramowanie.

2. Hiperboliczność – wątek C^1

W rozdziale tym zajmujemy się problemem (P1) oraz prezentujemy główne koncepcje i rezultaty prac [R3, R4, R6, R7].

2.1. **Hiperboliczność.** Pojęcie zbioru hiperbolicznego odnosi się zwykle do dyfeomorfizmu na zwartej rozmaitości gładkiej oraz oznacza, że, z grubsza rzecz biorąc, wiązka styczna nad tym zbiorem rozkłada się na sumę prostą dwóch subwiązek, które są niezmiennicze dla odwzorowania stycznego i odwzorowanie to jest zwężające wzdłuż jednej z nich, zaś rozszerzające wzdłuż drugiej (względem pewnej normy Riemanna). Ponieważ jednak w naszym podejściu rozważamy jedynie gładkie odwzorowania na przestrzeniach euklidesowych, tak więc, dla uproszczenia, sformułujemy definicję dostosowaną do tego przypadku.

Niech U będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ oraz niech $\|\cdot\|$ oznacza ustaloną normę w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że jeżeli $(E, \|\cdot\|_a)$ i $(F, \|\cdot\|_b)$ są danymi przestrzeniami Banacha, to przez $\|\cdot\|_a^b$ oznaczamy normę indukowaną na przestrzeni $\mathscr{L}(E, F)$, składającej się z ograniczonych operatorów liniowych z E do F.

Definicja 2.1 (Zbiór hiperboliczny, np. [48, 73])**.** Niech $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ będzie C^1 dyfeomorfizmem. Zwarty, f-niezmienniczy podzbiór K zbioru U nazywamy (λ_s, λ_u)-hiperbolicznym, gdzie $\lambda_s < 1 < \lambda_u$, jeżeli dla każdego $x \in K$ istnieją norma $\|\cdot\|_x$ w $\mathbb{R}^n$ oraz rozkład $\mathbb{R}^n = E^s_x \oplus E^u_x$ z odpowiadającymi mu projekcjami P^s_x i $P^u_x = I - P^s_x$ takie, że spełnione są następujące warunki:

[H0] $\{\|\cdot\|_x\}_{x\in K}$ jest jednostajnie równoważną rodziną norm w $\mathbb{R}^n$, tzn. istnieje $c > 0$ takie, że

$$c^{-1}\|v\| \leqslant \|v\|_x \leqslant c\|v\| \;\text{ dla } x \in K,\; v \in \mathbb{R}^n,$$

[H1] projekcje są jednostajnie ograniczone, tzn.

$$\sup_{x\in K}\{\max\{\|P^s_x\|, \|P^u_x\|\}\} < \infty,$$

[H2] każdy rozkład jest niezmienniczy (tzn. $D_x f E^s_x = E^s_{f(x)}$ i $D_x f E^u_x = E^u_{f(x)}$ dla $x \in K$) oraz

$$\|(D_x f)|_{E^s_x}\|^{f(x)}_x \leqslant \lambda_s,\; \|(D_x f^{-1})|_{E^u_x}\|^x_{f(x)} \leqslant \lambda_u^{-1} \quad \text{dla } x \in K.$$

Jak wiadomo (zob. [48] lub [73]), z powyższej definicji można uzyskać ciągłą zależność projekcji P^s_x i P^u_x od punktu $x \in K$.

Przedstawimy teraz najprostszy, aczkolwiek bardzo wymowny przykład.

Przykład 2.2 („Siodłowy" punkt stały)**.** Rozważmy operator $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, zadany w postaci macierzowej w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} a_s & 0 \\ 0 & a_u \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Jeżeli $\lambda_s := |a_s| < 1$ i $\lambda_u := |a_u| > 1$, to zbiór $K = \{(0,0)\}$ jest (λ_s, λ_u)-hiperboliczny dla A z rozkładem $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$, gdzie $E^s = \mathbb{R} \times \{0\}$ i $E^u = \{0\} \times \mathbb{R}$.

Powyższy przykład uzasadnia następującą definicję hiperboliczności dla operatorów ograniczonych w przestrzeniach Banacha.

Definicja 2.3 (Operator hiperboliczny, np. [20])**.** Niech E, F będą przestrzeniami Banacha, wyposażonymi odpowiednio w normy $\|\cdot\|_E$ i $\|\cdot\|_F$, niech $A\colon E \to F$ będzie ograniczonym operatorem liniowym oraz niech będą dane rozkłady $E = E^s \oplus E^u$, $F = F^s \oplus F^u$. Wówczas, w odniesieniu do tych rozkładów, możemy zapisać A w postaci macierzowej jako:

$$A = \begin{bmatrix} A_s & B_s \\ B_u & A_u \end{bmatrix} : (E^s \oplus E^u, \|\cdot\|_E) \to (F^s \oplus F^u, \|\cdot\|_F). \tag{2.2}$$

Niech λ_s, λ_u będą takimi stałymi, że

$$\lambda_s < 1 < \lambda_u. \tag{2.3}$$

Mówimy, że operator A jest (λ_s, λ_u)-hiperboliczny (względem powyższych norm i rozkładów), jeżeli A_u jest odwracalny oraz

$$\|A_s\|^F_E \leqslant \lambda_s,\; \|A_u^{-1}\|^E_F \leqslant \lambda_u^{-1},\; B_s \equiv 0,\; B_u \equiv 0.$$

Zauważmy, że odwracalność A_u skutkuje następującymi równościami:

$$\dim E^s = \dim F^s,\;\; \dim E^u = \dim F^u. \tag{2.4}$$

Używając powyższego pojęcia możemy teraz przeformułować definicję 2.1.

Definicja 2.4 (Zbiór hiperboliczny – równoważna definicja)**.** Niech $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ będzie C^1 dyfeomorfizmem. Zwarty, f-niezmienniczy podzbiór K zbioru U nazywamy (λ_s, λ_u)-hiperbolicznym, gdzie $\lambda_s < 1 < \lambda_u$, jeżeli dla każdego $x \in K$ istnieją norma $\|\cdot\|_x$ w $\mathbb{R}^n$ oraz rozkład $\mathbb{R}^n = E^s_x \oplus E^u_x$ z odpowiadającymi mu projekcjami P^s_x i $P^u_x = I - P^s_x$ takie, że spełnione są następujące warunki: [H0], [H1] oraz

[H2'] każdy operator

$$D_x f : (E^s_x \oplus E^u_x, \|\cdot\|_x) \to (E^s_{f(x)} \oplus E^u_{f(x)}, \|\cdot\|_{f(x)}),$$

gdzie $x \in K$, jest (λ_s, λ_u)-hiperboliczny.

2.2. **Semi-hiperboliczność.** Komputerowo wspierane metody odgrywają ważną rolę w teorii układów dynamicznych, pozwalając często na udowodnienie znaczących twierdzeń, które opierają się ściśle analitycznym narzędziom (zob. np. [41]). Co więcej, wzrastająca moc komputerów oraz stosowanie coraz bardziej zaawansowanych metod pozwalają na radzenie sobie z naprawdę skomplikowanymi problemami (zob. [75, 76, 77, 78]).

W celu uzyskania komputerowo wspieranej metody weryfikującej hiperboliczność danego zwartego zbioru niezmienniczego, co jest tematem pracy [R6], konieczne było znalezienie zestawu warunków, które gwarantowałyby hiperboliczność oraz byłyby możliwe do sprawdzenia przez wykonanie skończonej ilości ścisłych obliczeń numerycznych. Na początku należało „rozluźnić” założenie o niezmienniczości rozkładu. Mogło to zostać zrealizowane poprzez zastosowanie tzw. warunku pola stożkowego (ang. *the cone field condition*, zob. [43]), jednakże w [R6] użyliśmy innego podejścia, które zostało zaproponowane w [20]. Jego myśl przewodnia jest wyjaśniona w następującym, prostym przykładzie.

Przykład 2.5 (Kontynuacja przykładu 2.2)**.** Przypuśćmy, że chcemy się dowiedzieć, jak bardzo możemy „zaburzyć zera” w macierzy (2.1), aby zachować hiperboliczność operatora A. Mówiąc dokładniej interesuje nas to, co trzeba założyć o stałych $\mu_s, \mu_u \geqslant 0$, aby operator A, zadany w postaci macierzowej jako:

$$A = \begin{bmatrix} a_s & b_s \\ b_u & a_u \end{bmatrix},$$

gdzie $b_s \in [-\mu_s, \mu_s]$, $b_u \in [-\mu_u, \mu_u]$ są dowolne, był hiperboliczny. Przez bezpośrednie rachunki można uzyskać następujący warunek:

$$(\lambda_u - 1)(1 - \lambda_s) > \mu_s \mu_u. \tag{2.5}$$

Powyższy przykład wprowadza nas w koncepcję semi-hiperboliczności. Przejdziemy teraz do formalnej definicji, zaczynając od przypadku liniowego.

Definicja 2.6 (Operator semi-hiperboliczny, np. [20])**.** Niech E, F będą przestrzeniami Banacha, wyposażonymi odpowiednio w normy $\|\cdot\|_E$ i $\|\cdot\|_F$, niech $A\colon E \to F$ będzie ograniczonym operatorem liniowym oraz niech będą dane rozkłady $E = E^s \oplus E^u$, $F = F^s \oplus F^u$. Wówczas, w odniesieniu do tych rozkładów, możemy zapisać A w postaci macierzowej (2.2). Niech $\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u$ będą stałymi spełniającymi warunki (2.3) i (2.5). Mówimy, że operator A jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny (względem powyższych norm i rozkładów), jeżeli A_u jest odwracalny oraz

$$\|A_s\|^F_E \leqslant \lambda_s, \ \|A_u^{-1}\|^E_F \leqslant \lambda_u^{-1}, \ \|B_s\|^F_E \leqslant \mu_s, \ \|B_u\|^F_E \leqslant \mu_u.$$

Oczywiście, tak jak poprzednio zachodzą równości (2.4).

Jesteśmy teraz przygotowani do sformułowania ogólnej definicji.

Definicja 2.7 (Zbiór semi-hiperboliczny, np. [20])**.** Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 oraz niech $\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u$ będą stałymi spełniającymi warunki (2.3) i (2.5). Mówimy, że zwarty podzbiór K zbioru U jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny, jeżeli dla każdego $x \in K$ istnieją norma $\|\cdot\|_x$ oraz rozkład $\mathbb{R}^n = E^s_x \oplus E^u_x$ z odpowiadającymi mu projekcjami P^s_x i $P^u_x = I - P^s_x$ takie, że spełnione są następujące warunki: [H0], [H1] oraz

[SH2] każdy operator

$$D_x f : (E^s_x \oplus E^u_x, \|\cdot\|_x) \to (E^s_{f(x)} \oplus E^u_{f(x)}, \|\cdot\|_{f(x)}),$$

gdzie $x \in K$ i $f(x) \in K$, jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny.

Zauważmy, że niezmienniczość rozkładów $\mathbb{R}^n = E^s_x \oplus E^u_x$ $(x \in K)$ nie jest w powyższej definicji zakładana. Co więcej, nie wymagamy także odwracalności odwzorowania f ani niezmienniczości zbioru K. Niemniej jednak, jak pokazuje twierdzenie 2.8, przy tych dodatkowych założeniach pojęcia hiperboliczności i semi-hiperboliczności są równoważne.

2.3. **Motywacja dla rezultatów prac** [R3, R4, R6, R7]**.** W dalszej części autoreferatu omówimy, zaproponowaną w pracy [R6], ogólną metodę weryfikacji warunku hiperboliczności dla danego (nietrywialnego) zwartego, niezmienniczego podzbioru $\mathbb{R}^n$, która angażuje pojęcie semi-hiperboliczności. Dodatkowo, przedstawimy rezultaty zastosowania tej metody do rzeczywistego odwzorowania Hénona. Najpierw jednak ustalimy odpowiednią notację oraz umotywujemy to zagadnienie.

Mając dane parametry $a, b \in \mathbb{R}$, przez $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rozumiemy rzeczywiste odwzorowanie Hénona

$$H_{a,b} \colon \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (a - x^2 + by, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Naszym celem jest badanie zachowania $H_{a,b}$ na zbiorze tych punktów w $\mathbb{R}^2$, które posiadają ograniczone orbity; oznaczmy go przez $\mathrm{inv}(H_{a,b})$. Zbiór ten jest zwykle nazywany atraktorem Hénona, choć nie zawsze jest klasycznym zbiorem przyciągającym. W roku 1979 Devaney i Nitecki [21] wykazali, że

$$\mathrm{inv}(H_{a,b}) \subset P_{a,b} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant R_{a,b}, |y| \leqslant R_{a,b}\},$$

gdzie $R_{a,b} := \frac{1}{2}(1 + |b| + \sqrt{(1 + |b|)^2 + 4a})$. Z kolei Arai [9] udowodnił (zob. dowód lematu 4.1), że

$$CR(H_{a,b}) \subset \mathrm{inv}(H_{a,b}),$$

gdzie $CR(H_{a,b})$ oznacza zbiór łańcuchowo rekurencyjny (ang. *the chain recurrent set*) dla $H_{a,b}$. Główny rezultat pracy [9] głosi, że odwzorowanie $H_{a,b}$ jest quasi-hiperboliczne na $P_{a,b}$ dla szerokiego zakresu wartości parametrów, w szczególności dla $b = -1$ (w tym przypadku $H_{a,b}$ zachowuje objętość) oraz dla następujących wartości a: 4.58, 5.4, 5.59 i 5.65, co daje wówczas jednocześnie (zob. [9, 13, 59]) hiperboliczność $CR(H_{a,b})$. Daje to wsparcie dla hipotez stawianych w [19, 22], dotyczących hiperboliczności $\mathrm{inv}(H_{a,b})$ dla wymienionych powyżej wartości a i b.

Na zakończenie warto także wspomnieć inne, komputerowo wspierane rezultaty, dotyczące problemu weryfikacji warunku hiperboliczności. Pierwszy z nich był uzyskany przez Hruskę [24], która udowodniła hiperboliczność zespolonego atraktora Hénona dla niektórych wartości parametrów, drugi zaś został uzyskany przez Wilczaka [71], który otrzymał znacznie więcej niż hiperboliczność rzeczywistego atraktora Hénona dla pewnych wartości parametrów (tzn., $a = 5.4$ i $b = -1$, co było, w rzeczywistości, testem sprawności jego algorytmu), a mianowicie hiperboliczność atraktora typu Smale'a-Williamsa dla odwzorowania Poincaré w układzie Kuznetsova. Oba powyższe wyniki bazują na kryterium pola stożkowego oraz wprowadzają dyskretne warunki na stosowną grafową reprezentację odwzorowania, zwane odpowiednio pudełkową hiperbolicznością (ang. *box hyperbolicity*) i silną hiperbolicznością (ang. *strong hyperbolicity*).

2.4. **Przegląd rezultatów prac** [R3, R4, R6, R7]**.** Przydatność pojęcia semi-hiperboliczności w zagadnieniu ścisłej numerycznej weryfikacji warunku hiperboliczności jest zależna od następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.8 (Mazur i wsp. [R3], Mazur [R4], Mazur i Tabor [R6])**.** *Niech $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ będzie C^1 dyfeomorfizmem oraz niech K będzie zwartym, f-niezmienniczym podzbiorem U, który jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny. Weźmy dowolne stałe γ_s, γ_u takie, że*

$$\frac{\lambda_s+\lambda_u}{2} - \frac{\sqrt{(\lambda_u-\lambda_s)^2-4\mu_s\mu_u}}{2} < \gamma_s < 1 < \gamma_u < \frac{\lambda_s+\lambda_u}{2} + \frac{\sqrt{(\lambda_u-\lambda_s)^2-4\mu_s\mu_u}}{2}. \tag{2.6}$$

Wówczas zbiór K jest (γ_s, γ_u)-hiperboliczny.

Powyższe twierdzenie jest konsekwencją głównego rezultatu pracy [R3] (zob. także [R7]), gdzie można znaleźć jego dowód bazujący na rachunku funkcyjnym, a odnoszący się do ogólnego kontekstu, w którym f jest zdefiniowane na zwartej rozmaitości gładkiej. W niniejszej postaci, jednakże z nieco gorszymi oszacowaniami dla γ_s i γ_u (w rodzaju tych występujących w twierdzeniu 2.10), zostało ono udowodnione w [R4, R6] przy użyciu warunku pola stożkowego. Zauważmy także, że niezależny dowód pokrewnego rezultatu jest jednym z wątków monografii [20] (zob. rozdziały 4 i 5).

W pracy [R4] proponujemy dalsze ulepszenie twierdzenia 2.8, angażujące następującą (w pewnym sensie słabszą) postać warunku semi-hiperboliczności, która wydaje się być nieco lepiej przystosowana do ścisłej numeryki.

Definicja 2.9 (Zbiór semi-hiperboliczny, Mazur [R4])**.** Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 oraz niech $\langle\lambda_s\rangle = \{\lambda_s^x\}_{x\in K}$, $\langle\lambda_u\rangle = \{\lambda_u^x\}_{x\in K}$, $\langle\mu_s\rangle = \{\mu_s^x\}_{x\in K}$, $\langle\mu_u\rangle = \{\mu_u^x\}_{x\in K}$ będą zbiorami stałych, indeksowanymi przez punkty z danego zbioru zwartego $K \subset U$, spełniającymi następujące warunki:

$$\lambda_s^x < 1 < \lambda_u^x, \quad m_s m_u > 1,$$

gdzie

$$m_s = \inf_{x\in K} \frac{1-\lambda_s^x}{\mu_s^x}, \quad m_u = \inf_{x\in K} \frac{\lambda_u^x - 1}{\mu_u^x}. \tag{2.7}$$

Mówimy, ze zbiór K jest $(\langle\lambda_s\rangle, \langle\lambda_u\rangle, \langle\mu_s\rangle, \langle\mu_u\rangle)$-semi-hiperboliczny, jeżeli dla każdego $x \in K$ istnieją norma $\|\cdot\|_x$ oraz rozkład $\mathbb{R}^n = E_x^s \oplus E_x^u$ z odpowiadającymi mu projekcjami P_x^s i $P_x^u = I - P_x^s$ takie, że są spełnione następujące warunki: [H0], [H1] oraz

[SH2'] każdy operator

$$D_x f : (E_x^s \oplus E_x^u, \|\cdot\|_x) \to (E_{f(x)}^s \oplus E_{f(x)}^u, \|\cdot\|_{f(x)}),$$

gdzie $x \in K$ i $f(x) \in K$, jest $(\lambda_s^x, \lambda_u^x, \mu_s^x, \mu_u^x)$-semi-hiperboliczny.

Oczywiście, zbiór semi-hiperboliczny w (zwykłym) sensie definicji 2.7 jest semi-hiperboliczny w sensie powyższej definicji. W pracy [R4] przedstawiono także przykład pokazujący, że nie zachodzi implikacja odwrotna, o ile nie zmienimy ustalonych norm i rozkładów.

Kolejne twierdzenie może być traktowane jako wzmocnienie twierdzenia 2.8.

Twierdzenie 2.10 (Mazur [R4])**.** *Niech $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ będzie C^1 dyfeomorfizmem oraz niech K będzie zwartym, f-niezmienniczym podzbiorem U, który jest $(\langle\lambda_s\rangle, \langle\lambda_u\rangle, \langle\mu_s\rangle, \langle\mu_u\rangle)$-semi-hiperboliczny. Weźmy dowolną stałą $\varepsilon > 0$ taką, że $m_s^{-1} < \varepsilon < m_u$, gdzie m_s i m_u są dane przez (2.7), a także zdefiniujmy*

$$\lambda_s^\varepsilon = \sup_{x\in K}(\lambda_s^x + \varepsilon^{-1}\mu_s^x), \quad \lambda_u^\varepsilon = \sup_{x\in K}(\lambda_u^x - \varepsilon\mu_u^x).$$

Wówczas zbiór K jest $(\lambda_s^\varepsilon, \lambda_u^\varepsilon)$-hiperboliczny.

Odnotujmy, że podany w [R4] dowód powyższego twierdzenia bazuje na warunku pola stożkowego.

Naszym następnym krokiem ku opracowaniu komputerowo wspieranej metody weryfikacji hiperboliczności zwartego zbioru niezmienniczego było uogólnienie pojęcia semi-hiperboliczności na odwzorowania wielowartościowe. Niech (jak dotychczas) E będzie przestrzenią Banacha oraz niech $\mathscr{L}(E)$ oznacza przestrzeń ograniczonych operatorów liniowych na E. Każdy niepusty i ograniczony (względem zwykłej normy operatorowej) zbiór $\mathbb{S} \subset \mathscr{L}(E)$ będzie nazywany operatorem mnogościowym (ang. *set-operator*).

Definicja 2.11 (Mnogościowy operator semi-hiperboliczny, Mazur i Tabor [R6])**.** Mówimy, że operator mnogościowy $\mathbb{S} \subset \mathscr{L}(E)$ jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semihiperboliczny, jeżeli istnieją normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ w E oraz rozkłady $E = E_1^s \oplus E_1^u$, $E = E_2^s \oplus E_2^u$ takie, że każdy element $\mathbb{S}$ jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny względem tych norm i rozkładów, czyli jako operator z $(E_1^s \oplus E_1^u, \|\cdot\|_1)$ w $(E_2^s \oplus E_2^u, \|\cdot\|_2)$.

Dla danych zbiorów G i H, przez $F\colon G \rightrightarrows H$ będziemy oznaczać odwzorowanie wielowartościowe, tzn. odwzorowanie z G do 2^H. Definiujemy także dziedzinę F, jako $\mathrm{dom}(F) := \{x \in G : F(x) \neq \emptyset\}$.

Definicja 2.12 (Para semi-hiperboliczna, Mazur i Tabor [R6])**.** Niech G będzie zbiorem skończonym oraz niech $F\colon G \rightrightarrows G$, $DF\colon G \rightrightarrows \mathscr{L}(E)$ będą danymi odwzorowaniami wielowartościowymi takimi, że $DF(\sigma)$ jest operatorem mnogościowym na E dla każdego $\sigma \in G$. Niech $\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u \in \mathbb{R}_+$ będą stałymi spełniającymi warunki (2.3) i (2.5). Mówimy, że para (F, DF) jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczna, jeżeli dla każdego $\sigma \in G$ istnieją norma $\|\cdot\|_\sigma$ w E oraz rozkład $E = E_\sigma^s \oplus E_\sigma^u$ takie, że jeżeli $\sigma \in G$ i $\tau \in F(\sigma)$, to operator

$$DF(\sigma) : (E_\sigma^s \oplus E_\sigma^u, \|\cdot\|_\sigma) \to (E_\tau^s \oplus E_\tau^u, \|\cdot\|_\tau)$$

jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny.

Oczywiście, jako natychmiastową konsekwencję powyższej definicji otrzymujemy istnienie stałych $c, h > 0$ takich, że

$$c^{-1}\|v\| \leqslant \|v\|_\sigma \leqslant c\|v\|$$

oraz

$$\max\{\|P_\sigma^s\|, \|P_\sigma^u\|\} \leqslant h$$

dla każdych $v \in E$, $\sigma \in G$. Warto także wspomnieć o następującym wniosku.

Wniosek 2.13 (Mazur i Tabor [R6])**.** *Rozważmy dwa zbiory skończone G i H takie, że $G \subset H$. Niech $F\colon H \rightrightarrows H$ oraz $DF\colon H \rightrightarrows \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ będą odwzorowaniami wielowartościowymi takimi, że para (F, DF) jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczna. Wówczas para $(F|_G, DF|_G)$ jest także $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczna.*

Stosując powyższą notację możemy zdefiniować dyskretną reprezentację odwzorowania gładkiego oraz jego różniczki. Załóżmy zatem, że (do końca tego rozdziału) G oznacza skończoną kolekcję zwartych podzbiorów $\mathbb{R}^n$, zaś $F\colon G \rightrightarrows G$ i $DF\colon G \rightrightarrows \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ oznaczają odwzorowania wielowartościowe takie, że wszystkie wartości DF są operatorami mnogościowymi.

Definicja 2.14 (Dziedziczenie dynamiki, Mazur i Tabor [R6])**.** Niech $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem klasy C^1. Mówimy, że f dziedziczy dynamikę (ang. *inherits dynamics*) pary (F, DF) na zbiorze $K \subset U$, co zapisujemy $f \lhd_K (F, DF)$, jeżeli spełnione są następujące warunki:

(1) $K \subset \langle \mathrm{dom}(F) \rangle := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in G \text{ dla pewnego } G \in \mathrm{dom}F\}$,
(2) $x \in K \cap \sigma$, $f(x) \in K \cap \tau$ dla pewnego $\sigma, \tau \in G \implies \tau \in F(\sigma)$,

(3) $x, f(x) \in K$, $x \in \sigma$ dla pewnego $\sigma \in G \implies D_x f \in DF(\sigma)$.

Aby uczynić definicję 2.14 zasadną, w pracy [R6] podajemy także następujące proste, ale ważne twierdzenie.

Twierdzenie 2.15 (Mazur i Tabor [R6])**.** *Niech $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ będzie C^1 dyfeomorfizmem oraz niech $K \subset U$ będzie zbiorem hiperbolicznym. Wówczas istnieje semi-hiperboliczna (tzn. $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczna dla pewnych dopuszczalnych stałych λ_s, λ_u, μ_s, μ_u) para (F, DF) taka, że $f \lhd_K (F, DF)$.*

Powyższy rezultat pokazuje, że możemy używać „zdyskretyzowanej” wersji (semi-)hiperboliczności, w kontekście zwykłych zbiorów hiperbolicznych. Niemniej jednak, kluczowym dla nas jest następujące (w pewnym sensie odwrotne) twierdzenie.

Twierdzenie 2.16 (Mazur i Tabor [R6])**.** *Niech (F, DF) będzie parą $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczną oraz niech $K \subset U$ będzie zbiorem zwartym. Załóżmy, że $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest C^1 dyfeomorfizmem takim, że $f \lhd_K (F, DF)$. Wówczas zbiór K jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny. W rezultacie, zbiór $\operatorname{inv}(K, f)$ jest hiperboliczny (tutaj i w dalszej części $\operatorname{inv}(K, f)$ oznacza niezmienniczą część K, tzn. $\operatorname{inv}(K, f) := \{x \in K \mid f^n(x) \in K \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}\}$).*

Twierdzenie 2.16 daje ogólną podstawę dla komputerowo wspieranej metody ścisłej numerycznej weryfikacji warunku hiperboliczności dla danego zwartego, niezmienniczego podzbioru przestrzeni euklidesowej o dowolnym wymiarze. Tym niemniej, każda próba zastosowania takiej metody do konkretnego układu i zbioru niesie zwykle ze sobą inne, istotne problemy techniczne, a więc każdy indywidualny przypadek wymaga pewnych dodatkowych badań. Ponieważ jesteśmy zasadniczo zainteresowani układami 2-wymiarowymi, możemy stosować następujące, proste kryterium.

Wniosek 2.17 (Mazur i Tabor [R6])**.** *Niech $f \lhd_K (F, DF)$ dla pewnego odwzorowania $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{R}^2$ klasy C^1, pewnej pary (F, DF) oraz pewnego zbioru zwartego $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$. Załóżmy, że $\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u$ są stałymi spełniającymi warunki (2.3) i (2.5). Przypuśćmy, że dla każdego $\sigma \in G$ mamy daną bazę e^s_σ, e^u_σ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ taką, że dla każdych $\sigma \in G$ i $\tau \in F(\sigma)$ zachodzi zależność:*

$$B_\tau \circ DF(\sigma) \circ (B_\sigma)^{-1} \subset \begin{bmatrix} [-\lambda_s, \lambda_s] & [-\mu_s, \mu_s] \\ [-\mu_u, \mu_u] & \mathbb{R} \setminus (-\lambda_u, \lambda_u) \end{bmatrix},$$

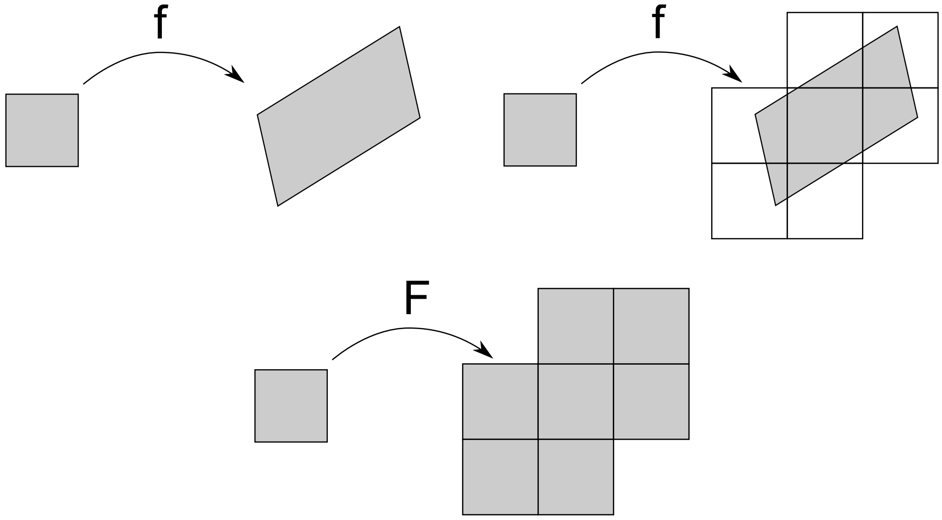
gdzie $B_\sigma = [e^s_\sigma, e^u_\sigma]$. Wówczas otrzymujemy następujące konkluzje:

(1) para (F, DF) jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczna,
(2) zbiór K jest $(\lambda_s, \lambda_u, \mu_s, \mu_u)$-semi-hiperboliczny,
(3) jeżeli odwzorowanie f jest odwracalne, to zbiór $\operatorname{inv}(K, f)$ jest (γ_s, γ_u)-hiperboliczny, gdzie γ_s i γ_u są takie, jak w (2.6).

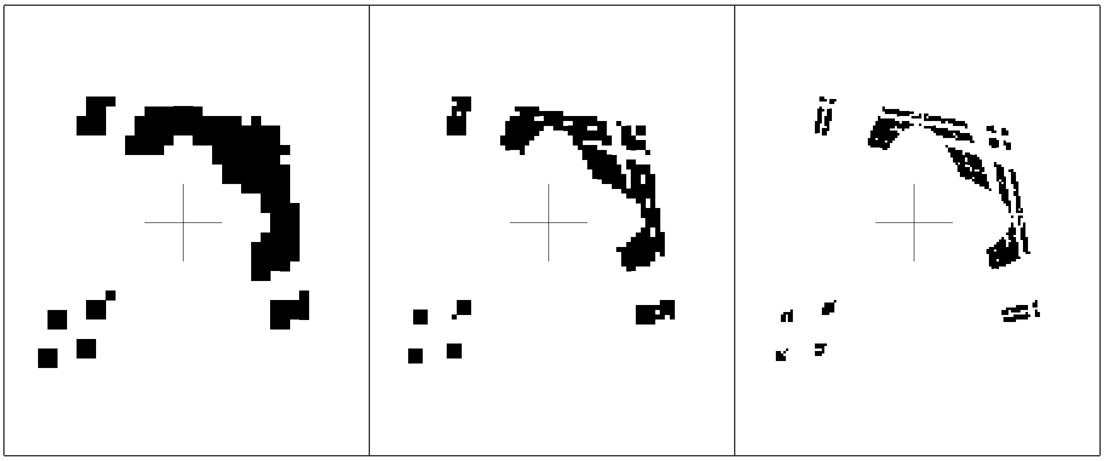
Jesteśmy teraz gotowi do zwięzłego przedstawienia głównych kroków algorytmu, którego użyliśmy do wykazania hiperboliczności atraktora Hénona dla pewnych wartości parametrów a i b. Bardziej szczegółowy opis znajduje się w pracy [R6].

Krok 1. Znalezienie „kostkowej reprezentacji” odwzorowania Hénona oraz (odpowiednio małego) otoczenia atraktora, przy użyciu iteracyjnej procedury kolejnych podziałów (zob. rysunki 1 i 2).

Krok 2. Znalezienie bazy dla każdej kostki, składającej się z wektorów wskazujących kierunki stabilny i niestabilny (zob. wniosek 2.17), z zastosowaniem pewnego rodzaju metody potęgowej.



RYSUNEK 1. Znajdowanie kostkowej reprezentacji odwzorowania.



RYSUNEK 2. Kolejne przybliżenia atraktora Hénona.

KROK 3. Renormalizacja kierunków stabilnego i niestabilnego dla każdej kostki w taki sposób, aby uzyskać „lokalne" (tzn. oddzielnie dla każdej z kostek) „oszacowania semi-hiperboliczne".

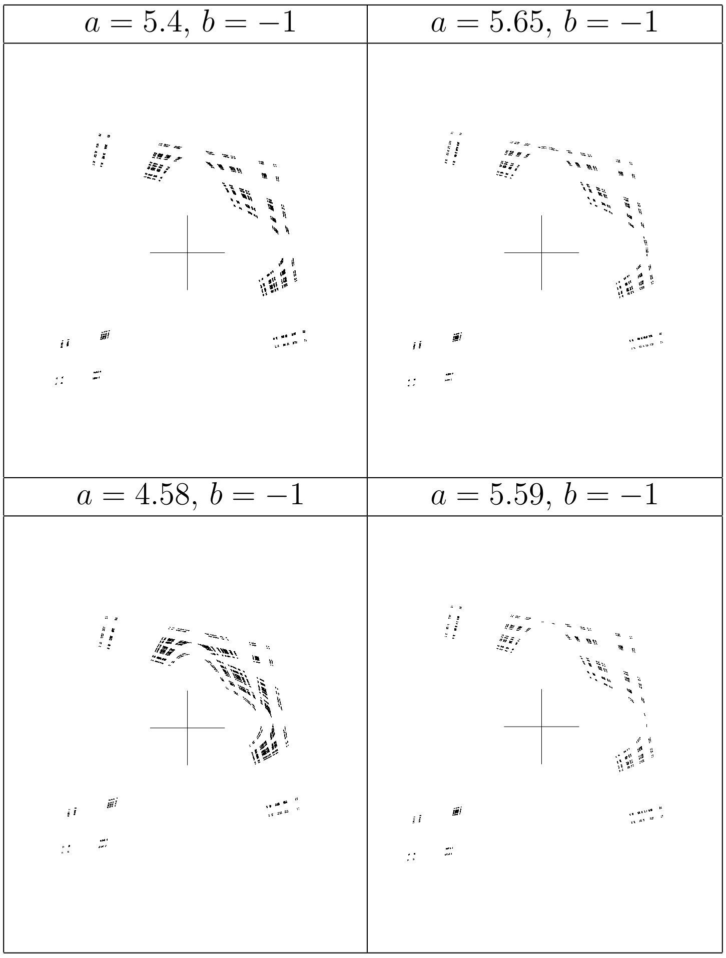
KROK 4. Weryfikacja warunku semi-hiperboliczności dla całej kostkowej reprezentacji atraktora Hénona, polegająca na znalezieniu odpowiednich „globalnych" stałych λ_s, λ_u, μ_s, μ_u oraz zastosowaniu wniosku 2.17.

Kod programu komputerowego weryfikującego warunek (semi-)hiperboliczności dla atraktora Hénona został zapisany w języku C++, zaś pełną aplikację (wraz z krótkim opisem i dokumentacją) można pobrać ze strony WWW naszego projektu [76].

Kończymy tę część podsumowaniem najważniejszych rezultatów, które udało się uzyskać przy pomocy naszego programu. Są one przedstawione na rysunku 3 i dokładnie się pokrywają z tymi, które zostały „wydedukowane" (z użyciem nieścisłych metod numerycznych) w [19, 22]. Zauważmy, że w ten sposób częściowo poprawiliśmy wynik Arai'a, wykazując w prezentowanych przypadkach hiperboliczność całego atraktora Hénona.

Warto także wspomnieć, że nasz projekt jest przedmiotem dalszych prac, które dotyczą następujących zagadnień:

- optymalizacja algorytmu: bardziej „rygorystyczne” oszacowania, parametry przedziałowe (już zrealizowane w pracy magisterskiej [37]), zmniejszenie złożoności obliczeniowej itp.,
- uogólnienie algorytmu: 3-wymiarowe układy, odwzorowania klasy C^0 (zob. następny rozdział) itp.



RYSUNEK 3. Zweryfikowane przez nasz program przykładowe wartości parametrów (zob. też [19, 22]), dla których atraktor Hénona jest zbiorem hiperbolicznym.

3. Hiperboliczność – wątek C^0

W rozdziale tym zajmujemy się problemami (P2) i (P3) oraz prezentujemy główne koncepcje i rezultaty prac [R1, R2, R5, R8, R9].

3.1. **Hiperboliczność topologiczna.** Począwszy od pracy Waltersa [69] z roku 1978, podjęto wiele prób wyrażenia koncepcji hiperboliczności w terminach topologicznych (metrycznych). Pojęcia takie, jak odtwarzanie pseudo-orbit (ang. *shadowing*), ekspansywność (ang. *expansiveness*), współrzędne kanoniczne (ang. *canonical coordinates*), czy przestrzeń Smale'a (ang. *the Smale space*) okazały się być w tym wypadku bardzo użyteczne. Sporo rezultatów znanych dla dyfeomorfizmów Anosova, dyfeomorfizmów spełniających aksjomat A lub, ogólniej, dla dyfeomorfizmów na zbiorach hiperbolicznych, zostało rozszerzonych na klasę homeomorfizmów określonych na zwartych przestrzeniach metrycznych, posiadających którąś z powyższych własności (zob. np. monografię Aoki i Hiraide [8], aby uzyskać więcej informacji oraz odnośniki do literatury).

Niemniej jednak, jak to zostało potwierdzone przez prace Ombacha [45], Sakai [60, 61] oraz innych autorów (zob. np. [8]), wiele pojęć rozważanych jako topologiczne odpowiedniki hiperboliczności okazało się być równoważnymi. Tak więc można uważać za (topologicznie) hiperboliczne na przykład te homeomorfizmy, które posiadają własności odtwarzania pseudo-orbit oraz ekspansywności.

Ustalimy teraz stosowaną terminologię. Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną, zaś $f\colon X \to X$ jest homeomorfizmem, uznawanym za dyskretny układ dynamiczny na X, gdzie orbitą punktu $x \in X$ jest ciąg obustronnie nieskończony $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty} \subset X$, określony następująco: $x_0 = x$ oraz $x_{n+1} = f(x_n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

Definicja 3.1 (Pseudo-orbita, np. [8])**.** Niech $\delta \geqslant 0$ będzie ustalone. Ciąg $(y_n)_{n=-\infty}^{\infty} \subset X$ nazywamy δ-pseudo-orbitą f, jeżeli

$$d(f(y_n), y_{n+1}) \leqslant \delta \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że 0-pseudo-orbita f jest po prostu jego „prawdziwą" orbitą.

Definicja 3.2 (Własność odtwarzania pseudo-orbit, np. [8])**.** Mówimy, że homeomorfizm f posiada własność odtwarzania pseudo-orbit (ang. *the shadowing property*), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ spełniające następujący warunek: mając daną δ-pseudo-orbitę $\mathtt{y} = (y_n)$, możemy znaleźć odpowiadający jej punkt $x \in X$, którego orbita ε-odtwarza $\mathtt{y}$, tzn.

$$d(f^n(x), y_n) \leqslant \varepsilon \text{ dla każdego } n \in \mathbb{Z}.$$

Koncepcja odtwarzania pseudo-orbit została wprowadzona w latach 60-tych i 70-tych dwudziestego wieku niezależnie przez Anosova [7] i Bowena [12], którzy rozważali ją w kontekście tzw. lematu o odtwarzaniu (ang. *the Shadowing Lemma*), który głosi, z grubsza rzecz biorąc, że C^1 dyfeomorfizm posiada własność odtwarzania pseudo-orbit w pewnym (małym) otoczeniu zbioru hiperbolicznego. Pojęcie to jest często używane wtedy, gdy układy dynamiczne są badane za pomocą symulacji numerycznych, w których przybliżone (pseudo-)orbity otrzymuje się w iteracyjnym procesie obliczania obrazu punktu, skutkującym kumulacją popełnianych w każdym kolejnym kroku (zwykle małych) błędów. W tym przypadku własność odtwarzania pseudo-orbit może zapewniać to, że orbity zaobserwowane numerycznie odpowiadają rzeczywistym orbitom badanego układu. Warty zauważenia jest także fakt, że została wykazana użyteczność tego pojęcia w zagadnieniu weryfikacji, w ścisłym matematycznym sensie, istnienia skomplikowanej dynamiki, wykrytej za pomocą poprzedzających eksperymentów numerycznych (zob. [31, 32, 66]).

Aby sformułować definicję hiperboliczności topologicznej musimy odwołać się też do pojęcia ekspansywności, które może być traktowane jako rodzaj jednostajnej czułej zależności od warunku początkowego.

Definicja 3.3 (Homeomorfizm ekspansywny, np. [8])**.** Homeomorfizm f nazywamy ekspansywnym (ang. *expansive*), jeżeli istnieje $e > 0$ (stała ekspansywności) o następującej własności: nie ma dwóch różnych punktów $x, y \in X$, których orbity są e-blisko, tzn.

$$\max_{n\in\mathbb{Z}} d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant e \implies x = y.$$

Łatwo zauważyć (zob. np. [8]), że obie z powyższych własności, tzn. odtwarzanie pseudo-orbit oraz ekspansywność, są niezależne od wyboru metryki równoważnej, pod warunkiem, że X jest przestrzenią zwartą. Uzasadnia to następującą definicję.

Definicja 3.4 (Homeomorfizm hiperboliczny, np. [45])**.** Załóżmy, że przestrzeń X jest zwarta. Mówimy, że f jest topologicznie hiperboliczny, jeżeli f jest homeomorfizmem ekspansywanym z własnością odtwarzania pseudo-orbit.

Uzasadnieniem dla powyższej definicji jest fakt, że jeżeli K jest zbiorem hiperbolicznym dla C^1 dyfeomorfizmu f, to homeomorfizm $f|_K$ jest topologicznie hiperboliczny (zob. np. [2]).

Kończąc tę część zauważmy, że pojęcie hiperboliczności topologicznej jest w rzeczywistości równoważne koncepcji tzw. przestrzeni Smale'a (fakt ten został zastosowany w dowodzie głównego wyniku pracy [R8]). Pochodzi ona od Ruelle'a [58], który uważał ją, w kontekście formalizmu termodynamicznego, jako uogólnienie aksjomatu A dla dyfeomorfizmów.

3.2. **Motywacja dla rezultatów pracy** [R8]**.** W poprzednim rozdziale opisaliśmy metodę ścisłej weryfikacji numerycznej warunku hiperboliczności, umocowaną w (tradycyjnym) nurcie C^1. Powstaje naturalne pytanie o to, czy jest możliwe znalezienie podobnej metody, która działałaby w ogólniejszym nurcie C^0, zainicjowanym przez definicję 3.4. Oczywiście, w praktyce i tak musimy skupić naszą uwagę na przypadku, który jest reprezentowalny przy użyciu (skończonej) arytmetyki komputerowej (np. odwzorowania elementarne w przestrzeniach euklidesowych), jednakże podstawy teoretyczne mogą być sformułowane w terminologii ogólnej.

Jako próbę podejścia do powyższego problemu można uważać prace [38, 67], traktujące na temat uogólnienia warunku pola stożkowego, który okazał się być użytecznym narzędziem w badaniu układów hiperbolicznych, zarówno z analitycznego (zob. np. [43]), jak i (ścisłego) numerycznego (zob. np. [24]) punktu widzenia. Mówiąc konkretniej, w [38] Kułaga i Tabor stworzyli globalny metryczny analogon pola stożkowego, natomiast w [67] Struski i wsp. zdefiniowali i badali jego lokalną wersję. Oba z tych uogólnień wykraczają poza strukturę różniczkową oraz wydają się być dobrze przystosowane do ścisłej numeryki. Co więcej, gwarantują one ekspansywność układu, aczkolwiek nie implikują własności odtwarzania pseudo-orbit (zob. [67]). W dalszej części tego rozdziału przedstawiamy rezultaty pracy [R8], gdzie idee te zostały dopełnione w celu uzyskania koniecznych i wystarczających warunków na topologiczną hiperboliczność homeomorfizmu przestrzeni metrycznej, zacieśnionego do danego zwartego zbioru niezmienniczego. Warunki te odnoszą się do wyniku Newhouse'a [43] oraz angażują wspomnianą powyżej globalną wersję pola stożkowego (koncepcja ta jest także, w pewnym sensie, zbliżona do konstrukcji rozkładu Markova, zob. np. [8]).

Kończymy tę część przypomnieniem definicji kilku innych pojęć, niezbędnych do sformułowania głównego rezultatu pracy [R8].

Definicja 3.5 (Pole stożkowe w przestrzeni metrycznej, Kułaga i Tabor [38])**.** Niech C będzie zwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d). Parę funkcji $c_s, c_u\colon C \times C \to [0, \infty)$ nazywamy polem stożkowym (ang. *a cone-field*), jeżeli istnieje stała $D > 0$ taka, że

$$\frac{1}{D} \cdot d(x, y) \leqslant c(x, y) \leqslant D \cdot d(x, y) \quad \text{dla każdych } x, y \in C,$$

gdzie $c(x, y) = \max\{c_s(x, y), c_u(x, y)\}$. W tym przypadku C nazywamy zbiorem stożkowym (ang. *a cone-set*) w X, zaś zbiory

$$C^s = \{(x, y) \in C \times C : c_s(x, y) \geqslant c_u(x, y)\},$$

$$C^u = \{(x, y) \in C \times C : c_s(x, y) \leqslant c_u(x, y)\},$$

są nazywane odpowiednio stożkiem stabilnym (ang. *the stable cone*) oraz stożkiem niestabilnym (ang. *the unstable cone*).

W dalszej części utrzymujemy powyższe oznaczenia c_s, c_u i c dla dowolnych funkcji definiujących pole stożkowe, niezależnie od nazwy danego zbioru stożkowego.

Niech C_1 i C_2 będą zbiorami stożkowymi w przestrzeni metrycznej X oraz niech $f\colon C_1 \rightharpoonup C_2$ będzie odwzorowaniem częściowym, tzn., że dziedzina f, oznaczana przez $\mathrm{dom} f$, jest niepustym podzbiorem C_1, niekoniecznie równym C_1. Definiujemy stałe

$$\begin{aligned} |f|_s = \inf\{R \in [0,\infty] : c(f(x), f(y)) \leqslant R \cdot c(x,y) \\ \text{dla } x, y \in \mathrm{dom} f, (f(x), f(y)) \in C_2^s\}, \\ \langle f\rangle_u = \sup\{R \in [0,\infty] : c(f(x), f(y)) \geqslant R \cdot c(x,y) \\ \text{dla } x, y \in \mathrm{dom} f, (x, y) \in C_1^u\}. \end{aligned}$$

Definicja 3.6 (Odwzorowanie stożkowo-hiperboliczne, Kułaga i Tabor [38])**.** Mówimy, że odwzorowanie f jest stożkowo-hiperboliczne (ang. *cone-hyperbolic*), jeżeli

$$|f|_s < 1 < \langle f\rangle_u.$$

Graf (skierowany) G stanowi para (V, E), gdzie V jest zbiorem zawierającym skończoną liczbę elementów nazywanych wierzchołkami, zaś E jest skończonym zbiorem krawędzi, tzn. uporządkowanych par wierzchołków. Jeżeli $e = (v, w)$ jest krawędzią w G, to oznaczmy wierzchołki v i w odpowiednio przez $i(e)$ oraz $t(e)$. Przez (skierowaną) ścieżkę w grafie G rozumiemy skończony ciąg krawędzi $(e_1, \dots, e_n)$ takich, że $t(e_k) = i(e_{k+1})$ dla każdego $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Definicja 3.7 (Stożkowo-hiperboliczny grafowo-sterowany iterowany układ funkcyjny, Kułaga i Tabor [38])**.** Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Iterowany układ funkcyjny sterowany przez G (lub krótko, układ G-sterowany) definiujemy jako trójkę $(G, \{C_v\}_{v\in V}, \{f_e\}_{e\in E})$, gdzie C_v (dla każdego $v \in V$) jest zbiorem stożkowym w X oraz $f_e\colon C_{i(e)} \rightharpoonup C_{t(e)}$ (dla każdego $e \in E$) jest odwzorowaniem (częściowym) o domkniętym wykresie. Układ ten nazywamy stożkowo-hiperbolicznym, jeżeli wszystkie odwzorowania f_e są stożkowo-hiperboliczne względem pewnej równoważnej metryki na podprzestrzeni $\bigcup_{v\in V} C_v \subset X$.

3.3. **Przegląd rezultatów pracy** [R8]**.** Załóżmy, że X jest przestrzenią metryczną, zaś $f\colon X \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym. Niech $K \subset X$ będzie zwartym zbiorem f-niezmienniczym (tzn. $f(K) = K$) oraz niech $\{B_v\}_{v\in V}$ będzie skończonym pokryciem K przez zbiory niepuste, które są otwarte w K. Rozważmy odpowiedni graf $G = (V, E)$, gdzie zbiór $E \subset V \times V$ jest określony jako:

$$E = \{(v, w) : B_v \cap f^{-1}(B_w) \neq \emptyset\}.$$

Definicja 3.8 (Odtwarzanie dynamiki, Mazur [R8])**.** Mówimy, że G-sterowany układ $(G, \{C_v\}_{v\in V}, \{f_e\}_{e\in E})$ odtwarza dynamikę (ang. *renders the dynamics*) odwzorowania f na K z dokładnością do $\{B_v\}_{v\in V}$, jeżeli są spełnione następujące warunki:

(1) dla każdego wierzchołka $v \in V$ zbiór B_v jest zawarty w zbiorze C_v oraz dla każdej krawędzi $e \in E$ mamy

$$\mathrm{dom} f_e = C_{i(e)} \cap f^{-1}(C_{t(e)}) \ \text{ i } \ f_e|_{\mathrm{dom} f_e} = f|_{\mathrm{dom} f_e},$$

(2) dla każdego całkowitego $n \geqslant 0$ oraz każdej ścieżki $\alpha = (e_0, \dots, e_n)$ w G istnieje punkt $x \in K$ taki, że α odtwarza ruch x aż do czasu n, tzn.

$$f^k(x) \in \mathrm{dom} f_{e_k} \ \text{ dla każdego } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Następujące twierdzenie, które stanowi główny wynik pracy [R8], może być uważane jako topologiczny (metryczny) odpowiednik twierdzenia Newhouse'a [43], dostarczającego koniecznych i wystarczających warunków na hiperboliczność zwartego zbioru niezmienniczego dla danego C^1 dyfeomorfizmu.

Twierdzenie 3.9 (Mazur [R8])**.** *Załóżmy, że $f\colon X \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym, zaś K jest zwartym podzbiorem niezmienniczym przestrzeni metrycznej X takim, że $f|_K\colon K \to K$ jest homeomorfizmem. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) *$f|_K$ jest topologicznie hiperboliczny,*
(2) *istnieje skończone pokrycie $\{B_v\}_{v\in V}$ zbioru K przez zbiory niepuste, które są otwarte w K, wraz z odpowiadającym mu grafem $G = (V, E)$ oraz stożkowo-hiperbolicznym G-sterowanym układem $(G, \{C_v\}_{v\in V}, \{f_e\}_{e\in E})$, odtwarzającym dynamikę f na K z dokładnością do $\{B_v\}_{v\in V}$,*
(3) *istnieje skończone pokrycie $\{B_v\}_{v\in V}$ zbioru K przez zbiory niepuste, które są otwarte w K, wraz z odpowiadającym mu grafem $G = (V, E)$ oraz stożkowo-hiperbolicznym G-sterowanym układem $(G, \{C_v\}_{v\in V}, \{f_e\}_{e\in E})$, odtwarzającym dynamikę f na K z dokładnością do $\{B_v\}_{v\in V}$ oraz takim, że średnice wszystkich zbiorów C_v są jednostajnie ograniczone przez dowolnie małą stałą.*

Dowód powyższego twierdzenia, przedstawiony szczegółowo w [R8], bazuje na równoważności koncepcji hiperboliczności topologicznej oraz przestrzeni Smale'a (zob. [60, 61]). Angażuje on również techniczny lemat pochodzący z [38], a także pewne narzędzia związane z metodą konstrukcji rozkładu Markova (złożonego z dowolnie małych prostokątów) dla topologicznie hiperbolicznego homeomorfizmu (zob. np. [8]).

Kończymy tę część autoreferatu przez zasygnalizowanie faktu, że idea metrycznego pola stożkowego wydaje się tworzyć rozsądną podstawę teoretyczną dla ścisłych badań numerycznych. Jednakże, istniejąca implementacja ciągle działa jedynie dla układów powstających przez niewielkie lipshitzowskie zaburzenia prostych dyfeomorfizmów hiperbolicznych klasy C^1, takich jak podkowa Smale'a w $\mathbb{R}^2$ (zob. [38]), tak więc uważamy tę tematykę za przedmiot dalszych, intensywnych prac.

3.4. **Własności odtwarzania.** Oprócz (zwykłej) własności odtwarzania pseudo-orbit, w pracach [R1, R2, R5, R9] rozpatrujemy także inne koncepcje związane z odtwarzaniem, które odpowiadają na uzupełniające pytania o to, czy okresowa pseudo-orbita, zaobserwowana podczas symulacji numerycznej, odpowiada rzeczywistej okresowej orbicie układu, lub czy wszystkie orbity obecne w układzie są faktycznie „odtwarzalne” przy użyciu metody numerycznej, która produkuje pseudo-orbity, lub czy pseudo-orbity o rosnącej dokładności zbliżają się do odtwarzanych przez nie orbit w miarę upływu czasu aż do nieskończoności. Są to w istocie pytania o własności odtwarzania okresowego, odwrotnego oraz granicznego. Bierzemy dodatkowo pod uwagę słabą formę odtwarzania, w której orbity są traktowane jako zbiory punktów (bez jakiegokolwiek porządku).

Aby sformalizować powyższą dyskusję, formułujemy poniżej stosowane definicje, zaczynając od pojęcia okresowego odtwarzania pseudo-orbit. Niech $f\colon X \to X$ homeomorfizmem zwartej przestrzeni metrycznej (X, d). Przyjmijmy, że δ-pseudo-orbitę (y_n) nazywamy okresową, jeżeli istnieje $k > 0$ takie, że $y_{n+k} = y_n$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ (jeśli w tym przypadku $k > 0$ jest jawnie zadane, to mówimy, że δ-pseudo-orbita jest k-okresowa). Przypuśćmy także, że punkt posiadający (k-)okresową orbitę jest nazywany (k-)okresowym.

Definicja 3.10 (Własność okresowego odtwarzania pseudo-orbit, np. [14])**.** Mówimy, że homeomofizm f posiada własność okresowego odtwarzania pseudo-orbit (ang. *the periodic shadowing property*), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ spełniające następujący warunek: mając daną k-okresową δ-pseudo-orbitę $\mathrm{y} = (y_n)$, gdzie k jest pewną dodatnią stałą całkowitą, możemy znaleźć odpowiadający jej k-okresowy punkt $x \in X$, którego (k-okresowa) orbita ε-odtwarza y.

Wartym zauważenia jest to, że koncepcja odtwarzania okresowego zastała zaproponowana w pracy [14], jako narzędzie do wykazywania istnienia orbit okresowych.

Przechodzimy teraz do własności odtwarzania odwrotnego, która jest, w pewnym sensie, przeciwieństwem (zwykłej) własności odtwarzania pseudo-orbit. Niech $X^{\mathbb{Z}}$ będzie zwartą przestrzenią dwustronnych ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset X$, wyposażoną w produktową topologię Tichonowa.

Definicja 3.11 (Metoda, Kloeden i Ombach [33])**.** Niech będzie dana stała $\delta > 0$. Wówczas δ-metodą (ang. *a δ-method*) dla homeomorfizmu f nazywamy odwzorowanie $\chi\colon X \to X^{\mathbb{Z}}$ takie, że dla każdego $x \in X$ ciąg $\chi(x)$ jest δ-pseudo-orbitą f, dla której $\chi(x)_0 = x$ (jeśli δ nie jest dane jawnie to mówimy, że χ jest metodą dla f). Klasę metod $\mathscr{T}$ nazywamy zupełną, jeżeli dla każdego $\delta > 0$ istnieje przynajmniej jedna δ-metoda w $\mathscr{T}$.

Definicja 3.12 (Własność odtwarzania odwrotnego, Kloeden i Ombach [33], Corless i Pilyugin [15])**.** Niech $\mathscr{T}$ będzie zupełną klasą metod dla f. Mówimy, że homeomorfizm f posiada własność $\mathscr{T}$-odwrotnego odtwarzania (ang. *the $\mathscr{T}$-inverse shadowing property*), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ spełniające następujący warunek: dla każdej δ-metody $\chi \in \mathscr{T}$ oraz każdego punktu $x \in X$ możemy znaleźć $y \in X$ takie, że δ-pseudo-orbita $\chi(y)$ ε-odtwarza orbitę punktu x.

Biorą pod uwagę możliwe zastosowania, należy starać się uwzględnić możliwie najszerszą zupełną klasę metod. Rodzina ta nie może być jednak zbyt duża, ponieważ np. klasa $\mathscr{T}_F$, złożona ze wszystkich możliwych metod dla f, ma tu ograniczone znaczenie ze względu na to, że nie istnieje strukturalnie stabilny układ, posiadający własność odtwarzania odwrotnego w odniesieniu do tejże klasy [15]. W pracach Kloedena i Ombacha [33] oraz Pilyugina [52], były wprowadzone i badane następujące zupełne klasy metod ciągłych:

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_H &= \{\chi \in \mathscr{T}_F \mid \text{istnieje homeomorfizm } \psi\colon X \to X \text{ taki, że} \\
&\qquad \psi(\chi(x)_n) = \chi(x)_{n+1} \text{ dla każdego } x \in X \text{ oraz } n \in \mathbb{Z}\}, \\
\mathscr{T}_S &= \{\chi \in \mathscr{T}_F \mid \text{istnieje rodzina odwzorowań ciągłych } \psi_n\colon X \to X \\
&\qquad \text{taka, że } \psi_n(\chi(x)_n) = \chi(x)_{n+1} \text{ dla każdego } x \in X \text{ oraz } n \in \mathbb{Z}\}, \\
\mathscr{T}_C &= \{\chi \in \mathscr{T}_F \mid \text{istnieje rodzina odwzorowań ciągłych } \psi_n\colon X \to X \\
&\qquad \text{taka, że } \psi_n(x) = \chi(x)_n \text{ dla każdego } x \in X \text{ oraz } n \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Idea odtwarzania granicznego bierze dodatkowo pod uwagę asymptotyczne zachowanie orbit układu oraz odtwarzanych przez nie pseudo-orbit. Dla potrzeb tego autoreferatu wystarczy zaprezentować ją w następującej, silnej wersji.

Definicja 3.13 (Własność s-granicznego odtwarzania, np. [62])**.** Mówimy, że homeomorfizm f posiada własność s-granicznego odtwarzania (ang. *the s-limit shadowing property*), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ spełniające następujący warunek: mając daną δ-pseudo-orbitę $\mathrm{y} = (y_n)$ możemy znaleźć odpowiadający jej punkt $x \in X$, którego orbita ε-odtwarza y. Dodatkowo, jeżeli y jest δ-pseudo-orbitą taką, że

$$\lim_{n\to\infty} d(f(y_n), y_{n+1}) = 0,$$

to orbita punktu x odtwarzająca y spełnia następujący warunek:

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), y_n) = 0.$$

Zwróćmy uwagę, że kilka innych koncepcji odtwarzania granicznego było wprowadzonych i badanych przez różnych autorów. Trochę informacji na ten temat można uzyskać z prac Pilyugina [53] oraz Sakai [62].

Kolejna definicja odwołuje się do pewnych słabych form odtwarzania.

Definicja 3.14 (Własność słabego odtwarzania pseudo-orbit, np. [15]; własność orbitalnego odtwarzania pseudo-orbit, np. [53])**.** Mówimy, że homeomorfizm f posiada własność (okresowego) słabego odtwarzania pseudo-orbit (ang. *the weak shadowing property*), lub odpowiednio: orbitalnego odtwarzania pseudo-orbit (ang. *the orbital shadowing property*), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ spełniające następujący warunek: mając daną (okresową) δ-pseudo-orbitę $\mathrm{y} = (y_n)$, możemy znaleźć odpowiadający jej (okresowy) punkt $x \in X$, którego orbita x słabo ε-odtwarza y, lub odpowiednio: orbitalnie ε-odtwarza y, tzn.

$$\mathrm{y} \subset \mathscr{U}_\varepsilon(\mathrm{x}) \quad \text{(odtwarzanie słabe)},$$

$$\mathrm{y} \subset \mathscr{U}_\varepsilon(\mathrm{x}) \ \text{ oraz } \ \mathrm{y} \subset \mathscr{U}_\varepsilon(\mathrm{x}) \quad \text{(odtwarzanie orbitalne)}.$$

Zauważmy, że w powyższej definicji na ciągi x i y patrzymy jak na podzbiory X, a także wyjaśnijmy, że $\mathscr{U}_\varepsilon(S)$ oznacza ε-otoczenie zbioru $S \subset X$, tzn. zbiór takich punktów $z \in X$, że $\mathrm{dist}(z, S) \leqslant \varepsilon$.

Kończymy tę część zwróceniem uwagi na fakt, że wszystkie z rozważanych tu własności odtwarzania posiadają topologicznie hiperboliczne homeomorfizmy (zob. [2, 8, 33]).

3.5. **Motywacja dla rezultatów prac** [R1, R2, R5, R9]**.** Biorąc pod uwagę znaczenie pojęcia topologicznej hiperboliczności, pytanie o to, czy jest to częsta, czy rzadka własność układów dynamicznych, wydaje się być bardzo zasadnym. Niestety, nie jest możliwe podanie jednoznacznej i zadowalającej odpowiedzi na to pytanie, ponieważ to, co jest częste w pewnej klasie, może być rzadkie w innej, zaś klasa, którą rozważamy zależy od określonego zastosowania. Jedna z powszechnie akceptowanych metod stosowanych do stwierdzania, że dana własność jest typowa, polega na wykazaniu jej generyczności względem ustalonej topologii (w naszym przypadku jest to topologia C^0). Niemniej jednak, restrykcyjność warunku definiującego ekspansywność oznacza, że własność ta jest bardzo rzadka, gdyż C^0 generyczny homeomorfizm posiada nieskończoną entropię topologiczną (zob. [35]), co oznacza (zob. np. [29]) że nie może on spełniać warunku ekspansywności. Tak więc w przedstawionym powyżej kontekście interesuje nas jedynie odtwarzanie pseudo-orbit.

Pierwszy rezultat dotyczący generyczności (zwykłej) własności odtwarzania pseudo-orbit w przestrzeni homeomorfizmów, wyposażonej w topologię C^0, uzyskał Yano [72] dla okręgu jednostkowego, potem wynik ten został uogólniony przez Odani'ego [44] na klasę homeomorfizmów na rozmaitości zwartej o wymiarze mniejszym lub równym 3, a następnie przez Pilyugina i Plamenevską [54] na przypadek dowolnej zwartej rozmaitości gładkiej bez brzegu. Ten ostatni ogólny rezultat, rozszerzony jeszcze później w [D6] na przypadek uwzględniający dodatkowo własność $\mathscr{T}_H$-odwrotnego odtwarzania, bazuje na technice rozkładu rozmaitości na rączki (ang. *a handle decomposition*, zob. [30]) oraz na tzw. twierdzeniu o topologicznej transwersalności (ang. *the Topological Transversality Theorem*, zob. [55]). Zauważmy także, że podejście to wiąże się w naturalny sposób z problemem generyczności własności tolerancyjnej stabilności (ang. *the tolerance stability property*), który był rozważany przez Takensa [68], jako tzw. hipoteza Zeemana o tolerancyjnej stabilności (ang. *Zeeman's Tolerance Stability Conjecture*).

Na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat był również rozwijany równoległy wątek, dotyczący generyczności własności słabego odtwarzania pseudo-orbit. Warte wspomnienia rezultaty odnoszą się do klasy homeomorfizmów, określonych na zwartej rozmaitości gładkiej (Corless i Pilyugin [15]) lub, ogólniej, na zwartych, uogólnionych przestrzeniach homogenicznych (Mazur [D7]).

Powyższy przegląd dostarcza sporą ilość informacji na temat generyczności własności odtwarzania w przypadku odwracalnym (czyli w klasie homeomorfizmów). Z drugiej strony, według najlepszej wiedzy autora tego autoreferatu, aż do czasu pracy Kościelniaka, Mazura, Oprochy i Pilarczyka [36], w której rozważane są odwzorowania określone na dowolnej zwartej rozmaitości, dopuszczającej skończony rozkład na zbiory homeomorficzne z kulą domkniętą, zostało udowodnionych jedynie parę rezultatów dotyczących problemu generyczności własności odtwarzania w klasie odwzorowań ciągłych. W rzeczywistości, dotyczyły one jedynie przypadku 1-wymiarowego, w którym rozważane były odwzorowania określone na odcinku domkniętym lub na okręgu (zob. pracę Mizery [40]). Wyjaśnijmy, że ciągłe odwzorowanie f przestrzeni metrycznej X interpretujemy jako dyskretny semi-układ dynamiczny, gdzie orbita punktu $x \in X$ jest określona jako jednostronnie nieskończony ciąg $(f^n(x))_{n=0}^{\infty} \subset X$. Zauważmy, że wszystkie pojawiające się w tej części autoreferatu (czyli w wątku C^0) definicje możemy w naturalny sposób przeformułować tak, aby miały zastosowanie do tego (nieodwracalnego) przypadku.

Dokonamy teraz krótkiego przeglądu wyników, które odnoszą się do problemu generyczności własności odtwarzania w przestrzeni dyfeomorfizmów, wyposażonej w topologię C^1. Jest to oczywiście przypadek jakościowo odmienny, tak więc nie powinno być zaskakujące to, że, ogólnie rzecz biorąc, własność odtwarzania pseudo-orbit nie jest tu generyczna – w pracy [10] Bonatti, Díaz i Turcat podali przykład 3-wymiarowej rozmaitości dopuszczającej $\mathscr{C}^1$-dyfeomorfizm, którego pewne otoczenie zawiera jedynie dyfeomorfizmy nie posiadające własności odtwarzania. Najprawdopodobniej najsilniejszym pozytywnym rezultatem, udowodnionym w tym kontekście przez Crovisiera [17], jest generyczność pewnej słabej formy odtwarzania, która, z grubsza rzecz biorąc, może być rozumiana następująco: skończony fragment pseudo-orbity jest przybliżany w topologii Hausdorffa przez skończony fragment rzeczywistej orbity. Kilka (w pewnym sensie) pokrewnych rezultatów zostało także uzyskanych przez innych autorów (zob. np. Abdenur i Díaz [1] lub Sakai [62]).

3.6. **Przegląd rezultatów prac** [R1, R2, R5, R9]**.** Załóżmy, że M jest zwartą rozmaitością topologiczną, zaś d jest metryką zgodną z jej topologiczną strukturą. Niech $\mathscr{H}(M)$ oznacza przestrzeń homeomorfizmów na M, wyposażoną w zupełną metrykę

$$\varrho_0(f,g) = \max\{\sup_{x\in M} d(f(x),g(x)), \sup_{x\in M} d(f^{-1}(x),g^{-1}(x))\},$$

która generuje topologię C^0 w $\mathscr{H}(M)$.

W pracach [R1, R2, R5] kontynuujemy wspomniane wcześniej badania, dotyczące problemu C^0 generyczności różnych form własności odtwarzania, ze specjalnym naciskiem na odtwarzanie okresowe. Przypomnijmy, że własność $\mathscr{P}$, przysługująca elementom przestrzeni topologicznej S, jest nazywana generyczną, jeżeli zbiór wszystkich elementów S posiadających własność $\mathscr{P}$ jest rezydualny, co oznacza, że zbiór ten zawiera przecięcie przeliczalnej rodziny otwartych i gęstych podzbiorów S.

Zacznijmy od następującego twierdzenia, które rozszerza pokrewny rezultat Pilyugina i Plamenevskiej [54].

Twierdzenie 3.15 (Kościelniak i Mazur [R1])**.** *Załóżmy, że M jest rozmaitością gładką bez brzegu. Wówczas generyczny homeomorfizm $f \in \mathscr{H}(M)$ posiada własność okresowego odtwarzania pseudo-orbit.*

Dowód twierdzenia 3.15 łączy techniki używane w [54] (tzn. rozkład rozmaitości na rączki oraz twierdzenie o topologicznej transwersalności) z koncepcją relacji nakrywających (ang. *covering relations*), w jej ogólnej wersji, zaproponowanej przez Zgliczyńskiego i Gideę w [74]. Warto także wspomnieć, że dowód ten został później uproszczony przez Kościelniaka [34] tak, że korzystał już jedynie ze specjalnego przypadku relacji nakrywających (z 1-wymiarowym kierunkiem rozciągającym) oraz nie wymagał zastosowania twierdzenia o topologicznej transwersalności. Co więcej, w pracy [R2] podajemy znacznie prostszą argumentację, bazującą na [26, D7], która nie używa żadnego z wymienionych powyżej narzędzi, angażując tylko techniki czysto topologiczne. Tym niemniej, metoda ta pozwala jedynie na wykazanie generyczności własności okresowego odtwarzania orbitalnego.

Twierdzenie 3.16 (Kościelniak i Mazur [R2])**.** *Załóżmy, że M jest rozmaitością (z brzegiem lub bez brzegu) o wymiarze większym lub równym 2. Wówczas generyczny homeomorfizm $f \in \mathscr{H}(M)$ posiada własność okresowego orbitalnego odtwarzania pseudo-orbit.*

Zauważmy także, że natychmiastową konsekwencją powyższych twierdzeń są niezależne dowody tzw. C^0 ogólnego twierdzenia o gęstości (ang. *the* C^0 *General Density Theorem*), głoszącego generyczność własności, która polega na posiadaniu przez układ gęstego zbioru punktów okresowych w jego zbiorze łańcuchowo rekurencyjnym (ang. *the chain recurrent set*). Oryginalna wypowiedź tego twierdzenia pochodzi z pracy Palisa i wsp. [47], jednakże podana tam argumentacja zawierała pewne luki, które zostały wskazane i częściowo poprawione przez Covena i wsp. [16] oraz Pilyugina [50] (kompletny i poprawny dowód został podany przez Hurley'a w [26]).

Nasze ostatnie wyniki, które zostały uzyskane w klasie homeomorfizmów, są zawarte w pracy [R5]. Aby je w pełni sformułować, potrzebne było wprowadzenie nowego pojęcia okresowego odtwarzania odwrotnego, w odniesieniu do klasy metod ciągłych.

Definicja 3.17 (Własność okresowego $\mathscr{T}_S$-odwrotnego odtwarzania, Kościelniak i Mazur [R5])**.** Załóżmy, że (X, d) jest zwartą przestrzenią metryczną, zaś $f\colon X \to X$ jest homeomorfizmem. Niech $\mathscr{T}_S$ będzie klasą ciągłych metod, określoną przez (3.1). Dla dowolnej dodatniej stałej całkowitej k rozważmy podrodzinę $\mathscr{T}_S^{k-\mathrm{per}} \subset \mathscr{T}_S$, składającą się z metod k-okresowych, tzn. metod generowanych przez (k-okresowe) rodziny odwzorowań ciągłych $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, spełniających następujący warunek: $\psi_{n+k} = \psi_n$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że homeomorfizm f posiada własność okresowego $\mathscr{T}_S$-odwrotnego odtwarzania, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego dodatniego $k \in \mathbb{Z}$, każdej (k-okresowej) δ-metody $\chi \in \mathscr{T}_S^{k-\mathrm{per}}$ oraz każdego k-okresowego punktu $x \in X$, możemy znaleźć $y \in X$ takie, że (k-okresowa) δ-pseudo-orbita $\chi(y)$ ε-odtwarza orbitę punktu x.

Aby udowodnić kolejne twierdzenie, które podsumowuje rezultaty pracy [R5], konieczne było dokonanie pewnego technicznego ulepszenia narzędzi stosowanych w [34].

Twierdzenie 3.18 (Kościelniak i Mazur [R5])**.** *Załóżmy, że M jest rozmaitością (z brzegiem lub bez brzegu), która dopuszcza skończony rozkład na zbiory homeomorficzne z kulą domkniętą. Wówczas generyczny homeomorfizm $f \in \mathscr{H}(M)$ posiada zarówno własność $\mathscr{T}_S$-odwrotnego odtwarzania, jaki i własność okresowego $\mathscr{T}_S$-odwrotnego odtwarzania.*

W naszych dalszych rozważaniach skoncentrujemy się na przypadku nieodwracalnym. Oznaczmy przez $\mathscr{C}(M)$ przestrzeń odwzorowań ciągłych na M, zaś przez $\mathscr{S}(M)$ podzbiór $\mathscr{C}(M)$ składający się ze wszystkich odwzorowań surjektywnych. Oczywiście, w obu przypadkach topologia C^0 może być wprowadzona za pomocą zupełnej metryki supremum

$$\varrho_1(f, g) = \sup_{x\in M} d(f(x), g(x)).$$

Jak już było wspominane w tym autoreferacie, prawdopodobnie pierwszy ogólny rezultat dotyczący generyczności własności odtwarzania pseudo-orbit w $\mathscr{C}(M)$ oraz w $\mathscr{S}(M)$ został udowodniony w [36]. Bazował on jednakże (tak jak twierdzenie 3.18) na założeniu, że rozmaitość M dopuszcza skończony rozkład na zbiory homeomorficzne z kulą domkniętą. W pracy [R9] podajemy inny, choć nieco podobny dowód, który działa w przypadku ogólnym. Co więcej, używając analogicznych narzędzi wykazujemy także gęstość własności s-granicznego odtwarzania. Otrzymane w [R9] wyniki podsumowuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.19 (Mazur i Oprocha [R9]). *Zbiór odwzorowań posiadających własność odtwarzania pseudo-orbit (lub odpowiednio: własność s-granicznego odtwarzania pseudo-orbit) jest rezydualny (lub odpowiednio: gęsty) w $\mathscr{C}(M)$ oraz w $\mathscr{S}(M)$.*

Aby udowodnić powyższe twierdzenie, konieczne było wprowadzenie pewnych technik perturbacyjnych, które dostarczały narzędzi do kontroli przebiegu pseudo-orbit za pomocą odpowiednio wybranego pokrycia rozmaitości M, stabilnego względem dobrze dobranych zaburzeń układu.

Kończymy tę część wskazując kilka kolejnych wariantów problemu C^0 generyczności własności odtwarzania, które są dla nas szczególnie interesujące, choć wciąż pozostają „otwarte" dla przyszłych badań:

- generyczność własności s-granicznego odtwarzania w $\mathscr{H}(M)$, $\mathscr{C}(M)$ oraz $\mathscr{S}(M)$,
- generyczność własności odtwarzania pseudo-orbit dla odwzorowań ciągłych (lub homeomorfizmów), określonych na 1-wymiarowych kontinuach, takich jak dendryty (ang. *dendrites*) lub kontinua łańcuchowe (ang. *chainable continua*).

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

Prace stanowiące pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze (w porządku chronologicznym).

[D1] M. Mazur, K. Stolot oraz J. Tabor, *Semi-hyperbolicity implies hyperbolicity in the linear case*, Proceedings of the Conference "Topological Methods in Differential Equations and Dynamical Systems" (Kraków-Przegorzały, 1996), Univ. Iagel. Acta Math. **36** (1998), 121–126.

[D2] M. Mazur oraz J. Szybowski, *The implementation of the Allili-Kaczyński algorithm for the construction of a chain homomorphism induced by a multivalued map*, w: „International Conference on Differential Equations", Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), 225–227, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.

[D3] M. Mazur, *Topological transitivity of the chain recurrent set implies topological transitivity of the whole space*, Univ. Iagel. Acta Math. **38** (2000), 219–226.

[D4] M. Mazur, *Hyperbolicity, expansivity and shadowing for the class of normal operators*, Funct. Differ. Equ. **7** (2000), 147–156 (2001).

[D5] J. Ombach oraz M. Mazur, *Shadowing and likes as C^0 generic properties*, w: Proceedings of the 3rd Polish Symposium on Nonlinear Analysis, str. 159–168, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, Vol. 3, 2002.

[D6] M. Mazur, *Tolerance stability conjecture revisited*, Topology Appl. **131** (2003), 33–38.

[D7] M. Mazur, *Weak shadowing for discrete dynamical systems on nonsmooth manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **281** (2003), 657–662.

[D8] M. Mazur oraz J. Szybowski, *Algebraic construction of a coboundary of a given cycle*, Opuscula Math. **27** (2007), 291–300.

1. Krótkie wprowadzenie

W tej części autoreferatu przedstawiamy rezultaty pozostałych prac naukowych, oznaczonych jako [D1–D8]. Odnoszą się one do następujących zagadnień:

(i) równoważne warunki zapewniające hiperboliczność operatora liniowego [D1, D4],

(ii) komputerowo wspierana metoda wyznaczania homomorfizmu indukowanego w homologiach przez odwzorowanie ciągłe [D2, D8],
(iii) asymptotyczne zachowanie dyskretnego układu dynamicznego [D3],
(iv) wstępne badania dotyczące C^0 generyczności własności odtwarzania, tj. problemu, który był wcześniej oznaczony jako (P3) [D6, D7].

2. Równoważne warunki zapewniające hiperboliczność operatora liniowego [D1, D4]

Rezultaty pracy [D1] nawiązują do problemu (P1), który był omawiany wcześniej, jako część głównego osiągnięcia naukowego. Mówiąc konkretniej, zostało tam udowodnione, że semi-hiperboliczny, ograniczony operator liniowy na przestrzeni Banacha jest, w rzeczywistości, hiperboliczny (przedstawione są dwa niezależne dowody, z których jeden działa tylko w przypadku skończenie-wymiarowym, zaś drugi uwzględnia dowolną przestrzeń Banacha). Analogiczny wynik, jednakże z zupełnie innym dowodem, został uzyskany w tym samym czasie przez Al-Nayefa i wsp. w [6].

W pracy [D4] badamy możliwość rozszerzenia do przypadku nieskończenie-wymiarowego pewnych wcześniejszych rezultatów Ombacha [46], dotyczących równoważności własności hiperboliczności i odtwarzania, w klasie operatorów liniowych na $\mathbb{R}^n$. Jako główny wynik podane jest następujące twierdzenie, które całkowicie rozwiązuje ten problem dla operatorów normalnych na przestrzeni Hilberta.

Twierdzenie 2.1 (Mazur [D4])**.** *Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz niech $A\colon H \to H$ będzie ograniczonym operatorem liniowym. Załóżmy, że A jest normalny, tzn. $AA^* = A^*A$. Wówczas A jest hiperboliczny wtedy i tylko wtedy, gdy A posiada własność odtwarzania pseudo-orbit. Dodatkowo, A jest ekspansywny wtedy i tylko wtedy, gdy widmo punktowe (czyli zbiór wartości własnych) operatora AA^* jest rozłączne z okręgiem jednostkowym w $\mathbb{C}$.*

Powyższy rezultat był dowodzony w [D4] przy użyciu technik charakterystycznych dla teorii spektralnej (zob. np. [63]), a także został uzupełniony kilkoma odpowiednimi przykładami.

3. Komputerowo wspierana metoda wyznaczania homomorfizmu indukowanego w homologiach przez odwzorowanie ciągłe [D2, D8]

W serii prac [4, 5, 27] Allili i Kaczynski opracowali algorytm konstrukcji homomorfizmu łańcuchowego, indukowanego przez odwzorowanie wielowartościowe reprezentowalne, co było niezbędne do wyznaczenia homomorfizmu indukowanego w homologiach przez odwzorowanie ciągłe. Pewien znaczący problem techniczny był związany z koniecznością konstrukcji kobrzegu danego cyklu σ, czyli takiego łańcucha τ, który spełnia warunek $\partial\tau = \sigma$, co zostało zrealizowane przy użyciu narzędzi geometrycznych (zob. [5, 27]). Autorzy artykułu [4] zasugerowali także, że problem ten może zostać rozwiązany za pomocą elementarnej algebry liniowej. Celem prac [D2, D8] było rozwinięcie koncepcji alternatywnej algebraicznej konstrukcji kobrzegu oraz przedstawienie pewnych uwag dotyczących implementacji algorytmu Allili-Kaczynski'ego, która została przez nas samych (wsp. z J. Szybowskim) wykonana w języku C++, jako wkład w tzw. Computational Homology Project (zob. [75]). W celu poznania zastosowań opisanego algorytmu, które używają tego oprogramowania, odsyłamy do [42, 49].

4. Asymptotyczne zachowanie dyskretnego układu dynamicznego [D3]

Praca [D3] została zainspirowana prze dwa podobne twierdzenia, znalezione w monografii Aoki'ego i Hiraide [8] oraz w artykule Chu i Koo [18]. Poniżej opisujemy krótko jej główne wyniki.

Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną, zaś $f\colon X \to X$ będzie homeomorfizmem. Oznaczmy przez $CR(f)$ zbiór łańcuchowo rekurencyjny dla f, tzn. zbiór punktów $x \in X$, które spełniają następujący warunek: dla każdego $\delta > 0$ istnieje okresowa δ-pseudo-orbita zawierająca x, natomiast przez $\Omega(f)$ oznaczmy podzbiór $CR(f)$ składający się z punktów niewędrujących (ang. *nonwandering points*). Niech $Y \subset X$ oznacza zbiór $CR(f)$ lub $\Omega(f)$

Twierdzenie 4.1 (Mazur [D3])**.** *Załóżmy, że istnieje punkt $x \in Y$ taki, że orbita x jest gęsta w Y (tzn. $f|_Y$ jest topologicznie tranzytywny). Wówczas $CR(f) = X$.*

Powyższe twierdzenie, przy dodatkowym założeniu wymagającym, aby homeomorfizm f był topologicznie hiperboliczny, zostało udowodnione w [8] jako twierdzenie 3.1.7, a także może być uważane za uogólnienie twierdzenia 2.8 z artykułu [18], które daje tę samą konkluzję w przypadku, gdy f posiada własność odtwarzania pseudo-orbit (zauważmy, że konsekwencją własności odtwarzania jest równość $CR(f) = \Omega(f)$, zob. np. [8]).

W pracy [D3] badamy także problem odwrotny oraz dowodzimy, że jeżeli X jest rozmaitością topologiczną, zaś f jest topologicznie tranzytywny, to $f|_Y$ jest także topologicznie tranzytywny. Przedstawiamy dodatkowo kilka odpowiednich przykładów pokazujących np., że nie ma prostej zależności pomiędzy topologiczną tranzytywnością $f|_{CR(f)}$ i $f|_{\Omega(f)}$.

Zauważmy także, że wszystkie przedstawione w [D3] dowody działają jednocześnie dla ciągłych układów dynamicznych (potoków).

5. Wstępne badania dotyczące C^0 generyczności własności odtwarzania [D6, D7]

W pracy [15] Corless i Pilugin wykazali, że słabe odtwarzanie pseudo-orbit jest własnością generyczną w przestrzeni $\mathscr{H}(M)$, złożonej z homeomorfizmów określonych na zwartej rozmaitości gładkiej M, wyposażonej w topologię C^0. Następnie, Pilyugin i Plamenevska [54] wzmocnili ten rezultat pokazując w tym przypadku generyczność (zwykłej) własności odtwarzania.

Wymienione powyżej artykuły są, w pewnym sensie, związane ze znacznie wcześniejszą pracą Takensa [68], w której autor wprowadza pojęcie tolerancyjnej stabilności (ang. *tolerance stability*, poniżej przypominamy odpowiednią definicję) oraz formułuje, w terminach topologicznych, tzw. hipotezę Zeemana o tolerancyjnej stabilności (ang. *Zeeman's Tolerance Stability Conjecture*). Hipoteza ta głosi, że dla dowolnego zbioru $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}(X)$, gdzie X jest zwartą przestrzenią metryczną, stanowiącego przestrzeń topologiczną z topologią nie słabszą niż topologia C^0 indukowana z $\mathscr{H}(X)$, tolerancyjna stabilność (względem $\mathscr{D}$) jest własnością generyczną w przestrzeni $\mathscr{D}$.

W odniesieniu do wspomnianego problemu, niewielki postęp został dokonany od czasu pracy Takensa. W pracy [70] White przedstawił kontrprzykład pokazujący, że zbiór $\mathscr{D}$ nie może być wybrany dowolnie. Inne pokrewne rezultaty zostały uzyskane np. przez Robinsona [56], który udowodnił hipotezę Zeemana-Takensa dla dyfeomorfizmów spełniających aksjomat A, a także przez Odani'ego [44], który wykazał silną wersję hipotezy w przypadku, gdy $\mathscr{D} = \mathscr{H}(M)$ oraz M jest rozmaitością co najwyżej 3-wymiarową. W pracy [D6] wzmacniamy ten ostatni wynik, usuwając ograniczenie na wymiar M.

Wyrazimy teraz powyższe stwierdzenia w bardziej formalnym języku, ograniczonym do kontekstu ustalonego w [D6, D7].

Definicja 5.1 (Tolerancyjna stabilność, Takens [68]; silna tolerancyjna stabilność, Odani [44])**.** Mówimy, że homeomorfizm $f \in \mathscr{H}(X)$ jest tolerancyjnie stabilny, ang. *tolerance stable* (lub odpowiednio: silnie tolerancyjnie stabilny, ang. *strongly tolerance stable*), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego $g \in \mathscr{H}(X)$ spełniającego warunek $\varrho_0(f, g) \leqslant \delta$, zachodzi następująca własność: każda orbita f jest orbitalnie ε-odtwarzana (lub odpowiednio: ε-odtwarzana) przez pewną orbitę g, zaś każda orbita g jest orbitalnie ε-odtwarzana (lub odpowiednio: ε-odtwarzana) przez pewną orbitę f.

Zauważmy, że warunek silnej tolerancyjnej stabilności zawiera w sobie koncepcję $\mathscr{T}_H$-odwrotnego odtwarzania, a także implikuje (zwykłą) własność odtwarzania pseudo-orbit w przypadku, gdy M jest rozmaitością (zob. [44]).

Kolejne twierdzenie stanowi główny rezultat pracy [D6].

Twierdzenie 5.2 (Mazur [D6])**.** *Załóżmy, że M jest zwartą rozmaitością gładką bez brzegu. Wówczas generyczny homeomorfizm $f \in \mathscr{H}(M)$ posiada własność silnej tolerancyjnej stabilności.*

Dowód twierdzenia 5.2 bazuje na koncepcji Pilyugina i Plamenevskiej [54], angażującej technikę rozkładu rozmaitości na rączki (zob. [30]) oraz twierdzenie o topologicznej transwersalności (zob. [55]). Zauważmy także, że stosując tę sama metodę, w pracy [D6] otrzymaliśmy następujący, dodatkowy wynik, który rozszerzał wcześniejszy rezultat Hurley'a [25] oraz został niezależnie wykazany (z wykorzystaniem innej techniki) przez Akina i wsp. [3].

Twierdzenie 5.3 (Mazur [D6])**.** *Załóżmy, że M jest zwartą rozmaitością gładką. Wówczas dla generycznego homeomorfizmu $f \in \mathscr{H}(M)$, zbiór łańcuchowo rekurencyjny $CR(f)$ jest zbiorem Cantora.*

Aby przedstawić główne twierdzenie pracy [D7], które rozszerza wspomniany wcześniej rezultat Corlessa i Pilyugina [15], musimy odwołać się do pojęcia homogeniczności (ang. *homogeneity*) w jego ogólnej wersji.

Definicja 5.4 (Uogólniona przestrzeń homogeniczna, np. [3])**.** Zwartą przestrzeń metryczną (X, d) nazywamy uogólnioną przestrzenią homogeniczną (ang. *a generalized homogeneous space*), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $\{x_1, \ldots, x_n\}$ i $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset X$ są dwoma rozłącznymi zbiorami parami różnych punktów takich, że $d(x_i, y_i) \leqslant \delta$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, wówczas istnieje homeomorfizm $h \in \mathscr{H}(X)$ spełniający warunki: $\rho_0(h, \mathrm{id}_X) \leqslant \varepsilon$ oraz $h(x_i) = y_i$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ważnymi przykładami przestrzeni homogenicznych są zwarta rozmaitość (gładka), kostka Hilberta lub zbiór Cantora (zob. [D7] oraz znajdujące się tam odpowiednie odnośniki do literatury).

Kolejne twierdzenie jest głównym wynikiem pracy [D7].

Twierdzenie 5.5 (Mazur [D7])**.** *Załóżmy, że X jest uogólnioną przestrzenią homogeniczną. Wówczas generyczny homeomorfizm $f \in \mathscr{H}(X)$ posiada własność słabego odtwarzania pseudo-orbit.*

Na zakończenie wspomnijmy także, że główne idee prac [D6, D7] są tematem rozprawy doktorskiej autora oraz zostały wcześniej ogłoszone w [D5]. Niemniej jednak, twierdzenia formułowane w [D7] posiadają ogólniejsze wypowiedzi, zaś ich dowody używają prostszych, bardziej bezpośrednich i bardziej elementarnych metod.

Literatura

[1] F. Abdenur oraz L.J. Díaz, *Pseudo-orbit shadowing in the C^1 topology*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **17** (2007), 223–245.

[2] E. Akin, „The general topology of dynamical systems", Graduate Studies in Mathematics, Vol. 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[3] E. Akin, M. Hurley oraz J. Kennedy, *Dynamics of topologically generic homeomorphisms*, Mem. Amer. Math. Soc. **164** (2003).

[4] M. Allili oraz T. Kaczynski, *An algorithmic approach to the construction of homomorphisms induced by maps in homology*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2261–2281.

[5] M. Allili oraz T. Kaczynski, *Geometric construction of a coboundary of a cycle*, Discrete Comput. Geom. **25** (2001), 125–140.

[6] A.A. Al-Nayef, P.E. Kloeden oraz A.V. Pokrovskii, *Semi-hyperbolic mappings, condensing operators, and neutral delay equations*, J. Differential Equations, **137** (1997), 320–339.

[7] D.V. Anosov, „Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature", Trudy Mat. Inst. Steklov. **90** (1967), in Russian. Translated from the Russian by S. Feder, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[8] N. Aoki oraz K. Hiraide, „Topological theory of dynamical systems. Recent advances", North-Holland Mathematical Library, 52, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.

[9] Z. Arai, *On Hyperbolic Plateaus of the Hénon Maps*, Experiment. Math. **16** (2007), 181–188.

[10] C. Bonatti, L.J. Díaz oraz G. Turcat, *Pas de "shadowing lemma" pour des dynamiques partiellement hyperboliques (French) [There is no shadowing lemma for partially hyperbolic dynamics]*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), 587–592.

[11] C. Bonatti, L.J. Díaz oraz M. Viana, „Dynamics beyond uniform hyperbolicity. A global geometric and probabilistic perspective", Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 102., Mathematical Physics, III, Springer, Berlin, 2005.

[12] R. Bowen, *ω-limit sets for axiom A diffeomorphisms*, J. Differential Equations **18** (1975), 333–339.

[13] R.C. Churchill, J. Franke oraz J. Selgrade, *A geometric criterion for hyperbolicity of flows*, Proc. Amer. Math. Soc. **62** (1976), 137–143 (1977).

[14] B.A. Coomes, H. Koçak oraz K.J. Palmer, *Periodic shadowing*, w: Chaotic numerics (Geelong, 1993), 115–130, Contemp. Math., Vol. 172, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[15] R.M. Corless oraz S.Yu. Pilyugin, *Approximate and real trajectories for generic dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 409–423.

[16] E. M. Coven, J. Madden oraz Z. Nitecki, *A note on generic properties of continuous maps*, w: Ergodic theory oraz dynamical systems, II (College Park, Md., 1979/1980), str. 97–101, Progr. Math., Vol. 21, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.

[17] S. Crovisier, *Periodic orbits oraz chain-transitive sets of C^1-diffeomorphisms*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **104** (2006), 87–141.

[18] C.-K. Chu oraz K.-S. Koo, *Recurrence and the shadowing property*, Topology Appl. **71** (1996), 217–225.

[19] M.J. Davis, R.S. MacKay oraz A. Sannami, *Markov shifts in the Hénon family*, Phys. D **52** (1991), 171–178.

[20] P. Diamond, P. Kloeden, V. Kozyakin oraz A. Pokrovskii, „Semi-Hyperbolicity and Bi-Shadowing", Random and Computational Dynamics, Vol. 1, American Institute of Mathematical Sciences, 2012.

[21] R. Devaney oraz Z. Nitecki, *Shift automorphisms in the Hénon mapping*, Comm. Math. Phys. **67** (1979), 137–146.

[22] R. Hagiwara oraz A. Shudo, *An algorithm to prune the area-preserving Hénon map*, J. Phys. A **37** (2004), 10521–10543.

[23] B. Hasselblatt, *Hyperbolic dynamical systems*, w: „Handbook of dynamical systems", Vol. 1A, str. 239–319, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[24] S.L. Hruska, *A numerical method for constructing the hyperbolic structure of complex Hénon mappings*, Found. Comput. Math. **6** (2006), 427–455.

[25] M. Hurley, *Properties of attractors of generic homeomorphisms*, Ergodic Theory Dynam. Syst. **16** (1996) 1297–1310.

[26] M. Hurley, *On proofs of the C^0 general density theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996) 1305–1309.

[27] T. Kaczynski, *Recursive coboundary formula for cycles in acyclic chain complexes*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **18** (2001), 351–371.

[28] A. Katok oraz B. Hasselblatt, „Introduction to the modern theory of dynamical systems", Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[29] H.B. Keynes oraz J.B. Robertson, *Generators for topological entropy and expansiveness*, Math. Systems Theory **3** (1969), 51–59.

[30] R.C. Kirby oraz L.C. Siebenmann, „Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations", Annals of Mathematics Studies, No. 88, Princeton University Press, Princeton, N.J., University of Tokyo Press, Tokyo, 1977.

[31] U. Kirchgraber, U. Manz oraz D. Stoffer, *Rigorous proof of chaotic behaviour in a dumbbell satellite model*, J. Math. Anal. Appl. **251** (2000), 897–911.

[32] U. Kirchgraber oraz D. Stoffer, *Possible chaotic motion of comets in the Sun-Jupiter system — a computer-assisted approach based on shadowing*, Nonlinearity **17** (2004), 281–300.

[33] P.E. Kloeden oraz J. Ombach, *Hyperbolic homeomorphisms are bishadowing*, Ann. Polon. Math. **65** (1997), 171–177.

[34] P. Kościelniak, *On genericity of shadowing and periodic shadowing property*, J. Math. Anal. Appl. **310** (2005), 188–196.

[35] P. Kościelniak, *On the genericity of chaos*, Topology Appl. **154** (2007), 1951–1955.

[R1] P. Kościelniak oraz M. Mazur, *On C^0 genericity of various shadowing properties*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **12** (2005), 523–530.

[R2] P. Kościelniak oraz M. Mazur, *Chaos and the shadowing property*, Topology Appl. **154** (2007), 2553–2557.

[R5] P. Kościelniak oraz M. Mazur, *Genericity of inverse shadowing property*, J. Difference Equ. Appl. **16** (2010), 667–674.

[36] P. Kościelniak, M. Mazur, P Oprocha oraz P. Pilarczyk, *Shadowing is generic – a continuous map case*, preprint (2013).

[R7] P. Kościelniak, M. Mazur oraz J. Tabor, *Appendix A. Semi-Hyperbolicity: Estimations*, w: „P. Diamond, P. Kloeden, V. Kozyakin oraz A. Pokrovskii, Semi-Hyperbolicity and Bi-Shadowing", str. 181–192, Random and Computational Dynamics, Vol. 1, American Institute of Mathematical Sciences, 2012.

[37] K. Kubicki, *Dynamika hiperboliczna w aspekcie obliczeniowym*, praca magisterska (opiekun: M. Mazur), Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 2013.

[38] T. Kułaga oraz J. Tabor, *Hyperbolic dynamics in graph-directed IFS*, J. Differential Equations 251 (2011), 3363–3380.

[39] R. Mañé, „Ergodic theory and differentiable dynamics", Results in Mathematics and Related Areas (3), Vol. 8, Springer, Berlin, 1987.

[D3] M. Mazur, *Topological transitivity of the chain recurrent set implies topological transitivity of the whole space*, Univ. Iagel. Acta Math. **38** (2000), 219–226.

[D4] M. Mazur, *Hyperbolicity, expansivity and shadowing for the class of normal operators*, Funct. Differ. Equ. **7** (2000), 147–156 (2001).

[D6] M. Mazur, *Tolerance stability conjecture revisited*, Topology Appl. **131** (2003), 33–38.

[D7] M. Mazur, *Weak shadowing for discrete dynamical systems on nonsmooth manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **281** (2003), 657–662.

[R4] M. Mazur, *On some useful conditions for hyperbolicity*, Proceedings of the Conference "International Workshop on Dynamical Systems and Related Topics" (Daejeon, Korea, 2008), Trends in Math. – New Series **10** (2008), 57–64.

[R8] M. Mazur, *On the relationship between hyperbolic and cone-hyperbolic structures in metric spaces*, Ann. Polon. Math. **109** (2013), 29–38.

[R9] M. Mazur oraz P. Oprocha, *S-limit shadowing is $\mathscr{C}^0$-dense*, J. Math. Anal. Appl. (2013), `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.004`.

[D1] M. Mazur, K. Stolot oraz J. Tabor, *Semi-hyperbolicity implies hyperbolicity in the linear case*, Proceedings of the Conference "Topological Methods in Differential Equations and Dynamical Systems" (Kraków-Przegorzały, 1996), Univ. Iagel. Acta Math. **36** (1998), 121–126.

[D2] M. Mazur oraz J. Szybowski, *The implementation of the Allili-Kaczyński algorithm for the construction of a chain homomorphism induced by a multivalued map*, w: „International Conference on Differential Equations", Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), 225–227, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.

[D8] M. Mazur oraz J. Szybowski, *Algebraic construction of a coboundary of a given cycle*, Opuscula Math. **27** (2007), 291–300.

[R6] M. Mazur oraz J. Tabor, *Computational hyperbolicity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **29** (2011), 1175–1189.

[R3] M. Mazur, J. Tabor oraz P. Kościelniak, *Semi-hyperbolicity and hyperbolicity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **20** (2008), 1029–1038.

[40] I. Mizera, *Generic properties of one-dimensional dynamical systems*, w: Ergodic theory and related topics, III (Güstrow, 1990), 163–173, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1514, Springer, Berlin, 1992.

[41] K. Mischaikow oraz M. Mrozek, *Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **32** (1995), 66–72.

[42] M. Mrozek oraz P. Pilarczyk, *The Conley index and rigorous numerics for attracting periodic orbits*, w: Variational and topological methods in the study of nonlinear phenomena (Pisa, 2000), str. 65–74, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. 49, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.

[43] S. Newhouse, *Cone-fields, domination, and hyperbolicity*, w: Modern Dynamical Systems and Applications, str. 419–432, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[44] K. Odani, *Generic homeomorphisms have the pseudo-orbit tracing property*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 281–284.

[45] J. Ombach, *Equivalent conditions for hyperbolic coordinates*, Topology Appl. **23** (1986), 87–90.

[46] J. Ombach, *The shadowing lemma in the linear case*, Univ. Iagel. Acta Math. **31** (1994), 69–74.

[D5] J. Ombach oraz M. Mazur, *Shadowing and likes as C^0 generic properties*, w: Proceedings of the 3rd Polish Symposium on Nonlinear Analysis, str. 159–168, Lecture Notes in Nonlinear Analysis, Vol. 3, 2002.

[47] J. Palis, C. Pugh, M. Shub oraz D. Sullivan, *Genericity theorems in topological dynamics*, w: Dynamical systems — Warwick 1974 (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974), str. 241–250, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 468, Springer, Berlin, 1975.

[48] K. Palmer, „Shadowing in dynamical systems. Theory and applications”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[49] P. Pilarczyk, *Computer assisted method for proving existence of periodic orbits*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **13** (1999), 365–377.

[50] S. Yu. Pilyugin, *The space of dynamical systems with the C^0-topology*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1571, Springer, Berlin, 1994.

[51] S.Yu. Pilyugin, *Shadowing in dynamical systems*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1706, Springer, Berlin, 1999.

[52] S.Yu. Pilyugin, *Inverse shadowing by continuous methods*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **8** (2002), 29–38.

[53] S.Yu. Pilyugin, *Sets of dynamical systems with various limit shadowing properties*, J. Dynam. Differential Equations **19** (2007), 747–775.

[54] S.Yu. Pilyugin oraz O.B. Plamenevskaya, *Shadowing is generic*, Topology Appl. **97** (1999), 253–266.

[55] F. Quinn, *Topological transversality holds in all dimensions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **18** (1988), 145–148.

[56] C. Robinson, *Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems*, Proceedings of the Regional Conference on the Application of Topological Methods in Differential Equations (Boulder, Colo., 1976), Rocky Mountain J. Math. **7** (1977), 425–437.

[57] C. Robinson, „Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos” (wyd. drugie), w: Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[58] D. Ruelle, „Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics”, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 5, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978.

[59] R.J. Sacker oraz G.R. Sell, *Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems. I*, J. Differential Equations **15** (1974), 429–458.

[60] K. Sakai, *Hyperbolic metrics of expansive homeomorphisms*, Topology Appl. 63 (1995), 263–266.

[61] K. Sakai, *Shadowing properties of $\mathscr{L}$-hyperbolic homeomorphisms*, Topology Appl. 112 (2001), 229–243.

[62] K. Sakai, *Diffeomorphisms with the s-limit shadowing property*, Dyn. Syst. **27** (2012), 403–410.

[63] I.E. Segal oraz R.A. Kunze, „Integrals and operators. Second revised and enlarged edition”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 228, Springer, Berlin, 1978.

[64] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817.

[65] M. Shub, *Structurally stable diffeomorphisms are dense*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 817–818.

[66] D. Stoffer oraz K.J. Palmer, *Rigorous verification of chaotic behaviour of maps using validated shadowing*, Nonlinearity **12** (1999), 1683–1698.

[67] Ł. Struski, J. Tabor oraz T. Kułaga, *Cone-fields without constant orbit core dimension*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **32** (2012), 3651–3664.

[68] F. Takens, *On Zeeman's tolerance stability conjecture*, w: Manifolds — Amsterdam 1970 (Proc. Nuffic Summer School), str. 209–219, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 197, Springer, Berlin, 1971.

[69] P. Walters, *On the pseudo-orbit tracing property and its relationship to stability*, w: The structure of attractors in dynamical systems (Proc. Conf., North Dakota State Univ., Fargo, N.D., 1977), str. 231–244, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 668, Springer, Berlin, 1978.

[70] W. White, *On the tolerance stability conjecture*, w: Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), str. 663–665, Academic Press, New York, 1973.

[71] D. Wilczak, *Uniformly hyperbolic attractor of the Smale-Williams type for a Poincaré map in the Kuznetsov system*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **9** (2010), 1263–1283.

[72] K. Yano, *Generic homeomorphisms of S^1 have the pseudo-orbit tracing property*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **34** (1987), 51–55.

[73] E. Zehnder, „Lectures on dynamical systems. Hamiltonian vector fields and symplectic capacities", EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010.

[74] P. Zgliczyński oraz M. Gidea, *Covering relations for multidimensional dynamical systems*, J. Differential Equations **202** (2004), 32–58.

[75] Computational Homology Project (CHomP), `http://chomp.rutgers.edu/`.

[76] Computational Hyperbolicity Project, `http://www2.im.uj.edu.pl/MarcinMazur/comphyp/`.

[77] Computer Assisted Proofs in Dynamics (CAPD) group, `http://capd.ii.uj.edu.pl/`.

[78] Global Analysis of Invariant Objects (GAIO), `http://www2.math.uni-paderborn.de/ags/ag-dellnitz/software.html`.