RECENZJA OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO ORAZ POZOSTAŁEGO DOROBKU W PRZEWODZIE HABILITACYJNYM DR SŁAWOMIRA DINEWA

ANNA ZDUNIK

Pan dr Sławomir Dinew przedstawił do oceny w postępowaniu habilitacyjnym cykl prac (Osiągnięcie naukowe w rozumieniu Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym): *Regularność pewnych całkowicie nieliniowych równań eliptycznych w dziedzinie zespolonej.*

Cykl składa się z pięciu publikacji, z których cztery zostały napisane z różnymi współautorami. Wnioskodawca precyzyjnie określa swój wkład w te prace. Współautorzy przedstawili oświadczenia, które również szczegółowo opisują rolę wnioskodawcy w pracy nad publikacjami, i określają przybliżony wkład procentowy współautorów i wnioskodawcy.

Do cyklu prac dołączony jest znakomicie zredagowany i uporządkowany Autoreferat. Autoreferat rozpoczyna się od obszernego, i bardzo pomocnego dla czytelnika, wprowadzenia w tematykę i przedstawienia jej głównych problemów i trudności. Wyniki prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego są uszeregowane w przemyślany sposób. Autor jasno formułuje najważniejsze wyniki poszczególnych prac i wyjaśnia ich znaczenie dla dziedziny. Autoreferat przedstawia też wystarczająco szczegółowo pozostały dorobek naukowy.

Ocena Osiągnięcia naukowego.

Zgodnie z koncepcją Autora, prace stanowiące *Osiągnięcie naukowe* są ułożone w Autoreferacie według porządku *od czysto analitycznych do geometrycznych.*

Omówienie rozpoczyna się więc od pracy [CMAPDE2] (notacja referencji według Autoreferatu), wspólnej z Z. Błockim, i opublikowanej w Math. Ann. w 2011 roku. Ta efektowna i elegancka praca daje oszacowanie *a priori* dla Δu, gdzie u jest rozwiązaniem równania Monge'a Ampère'a w obszarze Ω w $\mathbb{C}^n$. Zakładamy że ψ (funkcja w prawej stronie równania) jest w klasie $C^{1,1}$, a rozwiązanie u w klasie $W^{2,p}$. $p > n(n-1)$. Otrzymuje się szacowanie na $\sup_{\Omega'} \Delta U$ w dziedzinie $\Omega' \subset\subset \Omega$ przez stałą zależną od n, p $\inf \psi$, $||\psi||_{C^{1,1}}$, $||\Delta u||_{L^p(\Omega)}$ oraz odległość Ω' od brzegu Ω.

Ważną konsekwencją otrzymanego wyniku jest możliwość jego rozszerzenia na przypadek gładkiej prawej strony:

Jeśli u jest rozwiązaniem w klasie $W^{2,p}$. $p > n(n-1)$, i dodatkowo zakładamy że ψ jest w klasie C^∞, to u jest też w klasie C^∞.

Dowód korzysta między innymi z wyników uzyskanych wcześniej przez S. Kołodzieja. Omawiana praca stanowi rozszerzenie i pewną kontynuację wcześniejszej pracy Z. Błockiego.

Praca [CMAPDE3] przedstawia wyniki dotyczące podobnej grupy zagadnień. Pojawia się kolejne naturalne pytanie o regularność rozwiązań Monge'a -Ampère'a. Praca nawiązuje do klasycznego już wyniku Caffarelliego dla rzeczywistego równania Monge'a Ampère'a. Twierdzenie w wersji rzeczywistej głosi, że jesli funkcja f po prawej strona równania jest α Hölderowsko ciągła, to (przy pewnych naturalnych dodatkowych założeniach na dziedzinę i warunku brzegowym) rozwiązanie równania jest funkcją w klasie $C^{2+\alpha}$.

W omawianej pracy, wspólnej z Xi Zhang i Xiangwen Zhang, Autorzy odnoszą się do podobnego pytania dla zespolonego równania Monge'a Ampère'a; o funkcji po prawej stronie równania zakładamy że jest dodatnia (oddzielona od zera), i w klasie $C^\alpha(\Omega)$. Główny wynik pracy (Twierdzenie 4) to twierdzenie, które, przy założeniu że rozwiązanie u jest w klasie $C^{1,1}$, pozwala wywnioskować że u jest w klasie $C^{2,\alpha}$. Autorzy zwracają uwagę na pytanie czy można osłabić założenie (tzn założyć że założyć że $u \in C^{1,\beta}$ dla pewnego $\beta > 1 - \frac{2}{n}$ (jak sugerowałby przykład Pogorełowa) To pytanie jest dotąd otwarte.

Dowód wykorzystuje w pomysłowy sposób szereg wcześniejszych szacowań, a także metodę wypracowaną wcześniej, i zastosowaną w przypadku rzeczywistym, przez X-J. Wanga. W szczególności, wykorzystuje się *interior a priori estimate*, szacowanie pochodzące z klasycznej już pracy Bedforda i Taylora z 1976 roku, dające ograniczenie na $C^{1,1}$ normę rozwiązania równania Monge'a -Ampère'a w kuli w $\mathbb{C}^n$, z warunkiem brzegowym w klasie $C^{1,1}$, i przy założeniu $C^{1,1}$ regularności dla funkcji $f^{1/n}$ gdzie f jest funkcją po prawej stronie równania Monge'a– Ampère'a.

Ciekawe jest że w pracy udało się połączyć szacowania *zespolone* Bedforda –Taylora, ktore nie mają *rzeczywistych* odpowiedników, z metodami *rzeczywistymi* pochodzącymi od Wanga.

Wspomnijmy tu, że problem sformułowany w omawianej pracy -czy wystarczy założyć aby u spełniało warunek że Δu ograniczone – został potem pozytywnie rozstrzygnięty przez Wanga.

Praca [Hess1], wspólna z S. Kołodziejem, opublikowana w Anal. PDE, dotyczy teorii potencjału dla operatorów m–Hessjanu dla obszaru w $\mathbb{C}^n$ oraz na zwartej rozmaitości kählerowskiej.

Warto podkreślić, że w tej nowej teorii potencjału notuje się znaczący rozwój, od momentu ukazania się pracy [Hess1].

Autorzy omawianej pracy przedstawiali szereg rezultatów, które są, do pewnego stopnia, odpowiednikami wyników uzyskanych wcześniej dla równań Monge'a Ampère'a.

Wymieńmy tu wynik zawarty w Tw. 4.1 omawianej pracy, który jest odpowiednikiem szacowań uzyskanych we wspólnej pracy habilitanta z Z. Błockim ([CMAPDE2]), w przypadku równania Monge'a Ampère'a.

Udało się też uzyskać, między innymi, odpowiednik twierdzenia o rozwiązaniu problemu Dirichleta dla m–Hessjanu. Twierdzenie dla operatora Monge'a Ampère'a udowodnił wcześniej S. Kołodziej (Acta Math., 1998).

W moim przekonaniu jest to bardzo ważna praca; z jednej strony - zawierająca szereg ważnych wyników, z drugiej – otwierająca pole dla dalszych badań w tej nowej teorii. Należy też podkreślić pojawienie się w tej pracy metod, które wcześniej Habilitant wypracował w swojej rozprawie doktorskiej (nierówności dla mieszanych miar Monge'a – Ampère'a).

Pracę [Hess3], wspólną z S. Kołodziejem, opublikowaną w Amer. J. Math., uważam także za bardzo ważną. W moim przekonaniu jest to najważniejsza z prac przedstawionych przez Habilitanta.

Zawiera ona między innymi piękny dowód następującego, naturalnego w sformułowaniu twierdzenia *typu Liouville'a* dla funkcji m–subharmonicznych w $\mathbb{C}^n$ (Twierdzenie 3.2 w omawianej pracy): każda m–subharmoniczna maksymalna funkcja w $\mathbb{C}^n$ z ograniczonym gradientem jest stała.

Dodatkowa waga powyższego wyniku polega na jego zastosowaniu do rozwiązania równania Hessjanu na rozmaitości kählerowskiej, z gładką prawą stroną równania (Twierdzenie 0.3 w omawianej pracy- czyli odpowiednik twierdzenia Calabi-Yau).

Dowód prowadzi przez tzw. *szacowania a priori dla gradientu*; ta strategia (to znaczy sprowadzenie do oszacowań dla gradientu) była wcześniej stosowana. W omawianej pracy udalo się uzyskać, w pomysłowy sposób takie oszacowanie (niejawne) *a priori*, stosując odpowiednią metodę rozdmuchania, i sprowadzając problem do omówionego powyżej twierdzenia *typu Liouville'a*.

Praca [CMAK3] napisana bez współautorów, i opublikowana w 2010 roku nawiązuje do wcześniejszej pracy S. Kołodzieja (Math. Ann., 2005). Dotyczyła ona następującego zagadnienia: rozwiązujemy na zwartej rozmaitości kählerowskiej równanie Monge'a Ampère'a. Funkcja po prawej stronie równania jest całkowalna z p–tą potęgą. Wówczas rozwiązanie jest hölderowsko ciągłe, a wykładnik Höldera zależy od n, p i formy kählerowskiej ω. Habilitant wykazał zaś, że w obrębie pewnej klasy metryk, stala Höldera rozwiązania zależy tylko od wymiaru rozmaitości i od p. Podkreślmy, że tego typu pytania były już wcześniej przedmiotem żywego zainteresowania (pewną niezależność od metryki, w obrębie *jednorodnych (homogenicznych)* rozmaitości kählerowskich wykazali wcześniej Eyssidieux, Guedj i Zeriahi; podobne pytanie rozważał również Z. Błocki.

Warto wspomnieć, że [CMAK3] ma efektowną kontynuację w postaci pracy [CMAK7] (nie włączonej przez Habilitanta do *Osiągnięcia naukowego*). Technika wypracowana w [CMAK3] była glównym narzędziem zastosowanym w [CMAK7]. W pracy tej Habilitant ze współautorami wykazali przewidywaną niezależność wykładnika Höldera rozwiązania od geometrii.

Prace przedstawione do oceny składają się na piękną serię wyników dotyczących podstawowych zagadnień teorii pluripotencjału i geometrii zespolonej. Prace są niedługie, ale pomysłowe i efektowne.

Każda z prac ma wyraźnie wyartykułowany istotny nowy wynik, i o każdej można śmiało powiedzieć że jest ważnym wkładem w rozwój teorii. Publikacje [Hess1] i [Hess3] zaś- stanowią znaczący wkład w budowę nowego rodzaju teorii potencjału.

Prace są dobrze zredagowane, i czyta się je z satysfakcją.

Ocena pozostałego dorobku.

Poza cyklem monotematycznym opisanym powyżej, Habilitant przedstawil 14 publikacji. Wśród nich ważne miejsce zajmuje szereg prac związanych dość mocno z wyróżnionym jako *Osiągnięcie naukowe* cyklem monotematycznym.

W szczególności, wspomniana powyżej praca [CMAK7] jest kontynuacją [CMAK3], korzysta z jej metod, i rozwiązuje całkowicie problem wykładnika Höldera rozwiazania równania Monge'a- Ampère'a.

W tej grupie wyrożniłabym jeszcze, pracę [CMAK4], wspólną z Zhou Zhangiem, i opublikowana w Adv. Math. w 2010 roku. Pojawia się tu naturalne pytanie o to czy bliskość w L^p prawych stron równania Monge'a -Ampère'a tłumaczy się na bliskość rozwiązań w sensie normy jednostajnej.

Wyniki opisane w tej grupie w rozdziałach 4.3 i 4.4 robią w ogóle bardzo dobre wrażenie, i pokazują że Habilitant ma o równaniu Monge'a - Ampère'a sporo więcej do powiedzenia niż to co wybrał do cyklu monototematycznego.

Praca [Hess2], opisywania przez Autora jako wtórna, w tym sensie ze powiela (przenosi automatycznie) metody z [CMAK2] i [CMAPDE1] zawiera jednak podstawowe wyniki dotyczące operatora Hessjanu.

Podsumowując- widać że pozostały dorobek jest pokaźny, i że zawiera szereg istotnych wyników, głównie w tematyce pokrewnej w stosunku do tematyki *Osiągnięcia naukowego.*

Dorobek naukowy. Podsumowanie.

Habilitant prowadzi swoje badania w znakomitym ośrodku krakowskim, i niewątpliwie ten fakt ułatwił mu wejście w świetną, nowoczesną tematykę tam uprawianą. Habilitant ma też szereg prac wspólnych z matematykami z tego ośrodka (m.in. z S. Kołodziejem i Z. Błockim).

Nie ulega jednak dla mnie wątpliwości że mamy do czynienia z dojrzałym, samodzielnym matematykiem, który potrafi pracować z szerokim gronem współautorów (długa lista współpracowników z wielu miejsc na świecie, w tym. m.in. z silnego ośrodka w Tuluzie). Nie ulega też wątpliwości, że w tej współpracy idee pochodzące od Habilitanta, w tym- idee z jego prac bez współautorów- są często głównymi narzędziami.

Wyniki -zarówno te zawarte w *Osiągnięciu naukowym*, jak i szereg wyników w pozostałym dorobku - są istotnym wkładem w uprawianą dziedzinę, czyli analizę i geometrię zespoloną.

Prace Habilitanta ukazują się w bardzo dobrych czasopismach (m.in. Amer. J. Math., J. Eur. Math.Soc., Adv. Math., Math. Z.). Prace są zauważane i cytowane (wysokie, jak na ten etap kariery, wskaźniki cytowań). Co ważniejsze, prace te są motywacją dla innych autorów, ktorzy korzystają z metod wypracowanych przez Habilitanta; prowadzi to często do wspólnych publikacji z liczną grupą współautorów.

Habilitant uczestniczył w pięciu projektach badawczych (w tym w dwóch - Sonata i Iuventus Plus- jako kierownik). Wygłosił wykłady na licznych konferencjach, na seminariach w znaczących ośrodkach naukowych. Odbył też dwuletni staż podoktorski, a wcześniej- doktorski w bardzo dobrych ośrodkach.

Ocena dorobku naukowego jest zdecydowanie pozytywna.

Ocena w zakresie dorobku dydaktycznego i popularyzatorskiego. Opieka naukowa nad studentami.

Tę stronę działalności pana dr. Dinewa oceniam pozytywnie. Co prawda pan dr Dinew opiekował się tylko jedną pracą magisterską (co nieco dziwi, i pozostawia pewien niedosyt), ale jest promotorem pomocniczym w dwóch przewodach doktorskich. Prowadził różnorodne zajęcia dydaktyczne (wykłady i ćwiczenia), w tym kilka wykładów o charakterze popularnym.

Działalność recenzencka, działalność na rzecz środowiska. Habilitant podaje długą listę czasopism, dla których przygotowywał recenzje. Są wśród nich czasopisma bardzo wysokiej rangi. Ponadto Habilitant był członkiem kilku komisji konkursowych i paneli eksperckich.

Ocena w tym zakresie jest więc pozytywna.

Konkluzja.

Uważam że przedstawione do oceny *Osiągnięcie naukowe*, jak również pozostały dorobek spełniają bez wątpliwości wymagania stawiane w przewodach habilitacyjnych. Przedstawione *Osiągnięcie naukowe* stanowi znaczny wkład w rozwój uprawianej dziedziny naukowej.

Z prawdziwą przyjemnością popieram wniosek pana dr. Sławomira Dinewa o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Anna Zdunik, Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa