

Warszawa, 31 Marca 2019

prof. dr hab. Wojciech Rytter
Wydział, Matematyki, Informatyki
i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego
e-mail: rytter@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Karola Kosińskiego
pt.
”Różnorodne oblicza ciągów bez powtórzeń ”

Problematyka pracy związana jest z kombinatoryką powtórzeń w słowach, jak również w niewielkim stopniu z kombinatoryką na płaszczyźnie. Dziedzina ta jest częścią klasycznej kombinatoryki słów zapoczątkowanej dawno temu. Klasycznym wynikiem w tej dziedzinie jest pokazanie przez Thue’ego ponad sto lat temu, że istnieją nieskończone słowa ternarne nie zawierające kwadratów (słów postaci *ww*) oraz nieskończone słowa binarne nie zawierające tzw. *nakładek* (ang. overlaps, słów postaci *awawa*), które też można nazwać kwadratami plus. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat dziesiątki publikacji naukowych poświęcono różnego rodzaju wersjom unikania powtórzeń w różnych strukturach.

Rozprawa dotyczy nowego otwarcia w tej dziedzinie jakim są różnego rodzaju gry związane z powtórzeniami. W grze uczestniczą dwie osoby, w pracy nazywane Ann i Ben. Zaczynając od pustego słowa kolejno dopisują one jedną literę na końcu słowa, wygrywa Ann gdy otrzymane słowo osiągnie zadaną długość n i nie zawiera powtórzenia. W przypadku kwadratów mówimy o *square-free* grze a w przypadku nakładek o *overlap-free* grze. Rozważamy też gry w których unikamy wyższych potęg słów.

W 1-szym rozdziale autor przedstawia wiele faktów związanych z powtórzeniami oraz ze specjalnymi słowami. Wiele tych faktów jest folklorem i dowody są tutaj zbyt techniczne, jednakże jest też kilka ciekawych nowych faktów.

W 2-gim rozdziale wprowadzono i pokazano nowe własności słów, w których po każdej normalnej literze jest dopisany symbol uniwersalny. W szczególności pokazano różnego rodzaju powtórzenia w tak zmodyfikowanych nieskończonych słowach Thuego.

Trzeci rozdział jest według mnie najciekawszy, choć nie najbardziej skomplikowany. Rozważono w nim najbardziej naturalną wersję gier unikających powtórzeń dotyczącą kwadratów w słowach. Konstrukcja strategii wygrywającej dla unikania kwadratów w alfabecie 9-literowym jest perełką kombinatoryczną, pomimo swojej prostoty. Bardziej skomplikowana wersja redukuje alfabet do

rozmiaru 8. W przypadku unikania kwadratów o rozmiarze większym niż 2 otrzymano alfabet wielkości 7.

Czwarty rozdział jest poświęcony grom unikających tzw. nakładek (ang. overlaps). Podano strategię wygrywającą unikania nakładek w 4-literowym alfabecie i udowodniono, że dla 3-literowej strategii wygrywającej nie ma. Dowód jest krótki ale bardzo pomysłowy.

Piąty rozdział jest najbardziej skomplikowany i imponujący technicznie. Autor dowodzi że istnieje strategia unikania piątych potęg w alfabecie binarnym. Jest to wynik optymalny, gdyż autor również dowodzi nieistnienia strategii w alfabecie binarnym unikania 4-tych potęg. W przypadku 5-tych potęg dowód jest niesłychanie techniczny i składa się z 16 częściowych lematów.

Rozdział szósty wychodzi poza kombinatorykę słów i rozważa różnego rodzaju grafy w których wierzchołki są etykietowane symbolami ze skończonego alfabetu. Rozważamy słowa odpowiadające ścieżkom, problemem jest tutaj minimalizacja wielkości alfabetu w którym istnieje etykietowanie bez powtórzeń (słowa odpowiadające ścieżkom mają być bezkwadratowe). Uzyskano szerego nowych wyników. Jednakże ta część pracy nie całkiem przystaje do reszty rozprawy, która jest poświęcona głównie grom.

Dorobek naukowy autora składa się z dwóch prac w czasopismach, których wyniki wchodziły w skład rozprawy. Mgr Kosiński wykazał się w swojej rozprawie doktorskiej świetną znajomością matematyki dyskretnej. Jego rozprawa doktorska jest podsumowaniem dwóch wybitnych osiągnięć naukowych.

Rozprawa chociaż jest pod względem formalnym technicznie dobrze napisana, jednakże brak w niej nieformalnych opisów wyrabiających intuicję o co chodzi, jak również sensownych przykładów. Pomimo tego, że rozważamy grafy i drzewa, w pracy nie ma żadnych ilustracji graficznych poza jedną stroną z tabelkami. Napisana jest w sposób skrótowy i niezbyt strawny.

Dużą zaletą pracy jest konstruktywność wyników, w każdym z przypadków jest opisana algorytmicznie konkretna wygrywająca strategia. Z reguły strategie te są krótko opisywalne natomiast są bardzo pomysłowe. Szkoda że autor nie napisał jak doszedł do takich konstrukcji.

Konkluzja.

Moja ocena rozprawy jest wysoka, gdyż rozwiązano w sposób nietrywialny bardzo trudne i ciekawe problemy.

Stwierdzam, że rozprawa magistra Karola Kosińskiego spełnia wszystkie ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim.



Wojciech Rytter