Wydział MiNI
Politechnika Warszawska
Koszykowa 75
00-662 Warszawa

11 września 2018

dr hab. Piotr Niemiec
Prodziekan d/s studenckich
Wydziału Matematyki i Informatyki UJ
ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Piotra Kamieńskiego.

Recenzję przedstawię rozpoczynając od charakterystyki problematyki rozprawy. Następnie omówię kolejne jej części pod względem zawartości opatrując uwagami. Z kolei postaram się ocenić wartość matematyczną pracy, aby na koniec przejść do pytania, czy spełnia ona wymogi stawiane rozprawom doktorskim.

Charakterystyka problematyki rozprawy.
Zjawiska o charakterze okresowym lub kwazi-okresowym fascynowały człowieka od czasów niepamiętnych. Zmiany pór dnia i roku wywierały bezpośredni wpływ na jego życie, a z nimi wiązały się ruchy ciał niebieskich. Ze względu na te relacje rozwinęły się najpierw poglądy przednaukowe określane jako astrologia, a następnie arcydzieło myśli antycznej, jakim był model matematyczny ruchów planaternych Ptolemeusza.

W matematyce współczesnej kontynuacją tego kierunku jest mechanika hamiltonowska. W jej myśl ewolucja całkowalnego układu hamiltonowskiego odbywa się na torusach niezmienniczych i na każdym z nich jest sprzężona z obrotem o pewien wektor. Całkowalny jest na przykład układ planetarny składający się z ciała centralnego o masie dodatniej i dwóch planet o masie zero. Ponieważ planety nie oddziaływuja między sobą, to mamy iloczyn kartezjański dwóch ruchów opisanych prawami Keplera, co sprowadza się właśnie do obrotu na $\mathbb{T}^2$ o wektor $\mathfrak{w}t$, gdzie $\mathfrak{w} = (\omega_1, \omega_2)$ jest wektorem. Można przyjąć ω_1 za nową jednostkę czasu, zatem własności tego układu zależą od pojedynczej liczby obrotu $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Teoria KAM, dziś już klasyczna, zadaje pytanie, na ile obraz ten przetrwa przy małym zaburzeniu układu całkowalnego, a więc powiedzmy po nadaniu choć jednej z planet niewielkiej dodatniej masy. Już intuicyjnie widać, że odpowiedź powinna zależeć od liczby obrotu. Gdy jest ona wymierna, to po pewnym czasie układ wróci do stanu początkowego i nie można oczekiwać, aby ta sytuacja przetrwała po jakimkolwiek zaburzeniu. Tryumf teorii KAM polega na wykazaniu, że przy odpowiednio niewymiernej liczbie obrotu jej torus niezmienniczy przeżywa zaburzenie - przesunie się nieco i powygina w przestrzeni fazowej, ale ruch pozostanie sprzężony z obrotem o tej samej liczbie obrotu.

"Odpowiednia niewymierność" oznacza, iż liczba obrotu nie aproksymuje się zbyt dobrze liczbami wymiernymi, tj. $D_\omega(q) = \inf\{|\omega - \frac{p}{q}| : p \in \mathbb{Z}\}$ nie maleje zbyt szybko ze wzrostem w q w rozważanej klasie liczb niewymiernych ω. Klasycznie używany jest warunek diofantyczny: $D_\omega(q) = \frac{C}{q^r}$ ze stałymi $C, r > 0$, a liczby ω, dla których jest spełniony z pewnymi stałymi, nazywamy diofantycznymi. Oszacowanie dolne na $D_\omega(q)$ i jego rola w rozważaniach własności układu są znane jako "problemy małych mianowników".

Oprócz teorii KAM, problemy małych mianowników pojawiają się w badaniach dyfeomorfizmów okręgu z niewymierną liczbą obrotu, w której podstawowym zagadnieniem jest istnienie dyfeomorficznego sprzężenia z liniowym obrotem. Zespolonym odpowiedniem tego zagadnienia jest linearyzacja przekształceń jednolistnych z punktem stałym, ktorego pochodna ma postać $\exp(2\pi\iota\omega)$.

Głównym celem naukowym rozprawy jest przebadanie zagadnień małych mianowników dla liczb niewymiernych typu Chinczyna-Levy'ego. Pojawia się problem zaproponowania sensownego oszacowania $D_\omega(q)$ i pokazania jednostajności oszacowań względem ω w ustalonej klasie Chinczyna-Levy'ego. Wiadomo przy tym, że miara liczb typu Chinczyna-Levy'ego jest pełna.

Z punktu widzenia recenzenta uwagi te oznaczają tyle, że waga matematyczna podjętej tematyki jest oczywista i można pogratulować Doktorantowi odwagi intelektualnej jej pojęcia. Rodzi się wszakże niepokój, ile nowego zdołał on osiągnąć w tak klasycznej dziedzinie, szczególnie w obliczu stwierdzenia wyrażonego we wstępie do rozprawy, że rezultaty są zasadniczo elementarne.

Omówienie treści.
Rozdział pierwszy ma charakter wstępny i nie wymaga bliższego omówienia.

Rozdział drugi dotyczy definicji i podstawowych własności liczb Chinczyna-Levy'ego. Głównym celem jest uzyskanie dolnych oszacowań na miarę zbioru liczb spełniających ten warunek z odpowiednimi parametrami wprowadzonymi w Definicji 2.1.3. Wychodzi to poza rezultaty z klasycznej literatury dotyczącej twierdzenia Chinczyna-Levy'ego. Pod względem matematycznym rozdział jest więc ulepszeniem istniejącej teorii, choć nie wprowadza nowych metod. Jego poziom techniczny jest dobry i wskazuje na biegłe opanowanie przez Doktoranta podstaw rachunku prawdopodobieństwa oraz ułamków łańcuchowych. Niedosyt powoduje jednak brak odniesienia się do naturalnego pytania, jak rozważana klasa ma się do liczb diofantycznych. Nie znam odpowiedzi z literatury, ale nie wydaje się trudna do uzyskania. Skoro pogwałcenie warunku diofantycznosci z wykładnikiem r wymaga, aby q_{n+1} był co najmniej M_n' w potędze, która zależy liniowo od r, to każda liczba klasy KL' powinna być diofantyczna.

Rozdział trzeci wnosząc z tytułu traktuje o "istotnych indeksach" i przyznam, że nic mi ten termin nie mówi. Sądzę, że przedstawia on swoisty punkt widzenia Doktoranta na fakty dotyczące dynamiki obrotu niewymiernego na okręgu, w większości lub całości dobrze znane. Na przykład, głównym rezultatem jest tw. 3.2.3 z dowodem na 9 stron z rozbiciem na liczne przypadki. Wydaje się ono wynikać niemal natychmiast z dobrze znanego faktu, że kolejne $q_n + q_{n-1}$ obrazów punktu pod działaniem obrotu niewymiernego dzieli okrąg na łuki tylko dwóch długości, ρ_{n-1}, ρ_n, gdzie ρ_k oznacza odległość na okręgu miedzy punktem a jego q_k-tym obrazem. Zatem dla $q_n \leq q < q_{n+1}$ oszacowanie z tw. 3.2.3 jest zagrożone tylko wtedy, gdy q-ty obraz punktu wpada w jego otoczenie o promieniu ρ_{n-1}. Stosując kolejno podany wyżej fakt dochodzimy do wniosku, że są własnie iteracje odpowiadające indeksom SI i CSI w terminologii Doktoranta. Uważam, że każdy ma prawo do własnego punktu widzenia, o ile płynące z niego wnioski są poprawne, a tak jest w tym przypadku, natomiast nie dostrzegam w tym rozdziale istotnej wartości matematycznej.

Rozdział czwarty zawiera wstęp do teorii KAM. Nie wiadomo, do kogo jest on adresowany, bo specjalista niewiele się dowie, a niespecjalista tak pobieżnego przeglądu pełnego specjalistycznych terminów i tak nie zrozumie. Moją uwagę zwróciła luka w uzasadnieniu uwagi 4.1.4. Dotyczy ona przedstawienia funkcji w dziedzinie zespolonej w postaci szeregu Fouriera. Nie jest to fakt oczywisty, bo całki zadające współczynniki Fouriera są tylko po dziedzinie rzeczywistej, i powinien być opatrzony uzasadnieniem lub odnośnikiem do literatury. Uwaga jest jednak poprawna, a standardowy dowód przebiega poprzez oszacowania na współczynniki Fouriera z lematu 5.2.1 z kolejnego rozdziału. Rozdział czwarty nie zawiera ani nowych treści matematycznych, ani istotnych błędów, przy czym schematyczny i pobieżny sposób prezentacji nie przekonuje, że Doktorant dobrze przemyślał nad podstawy teorii.

Z rozdziału piątego wyodrębnie podrozdział 5.5 zajmujący się iteracyjnym schematem KAM oraz podrozdziały go poprzedzające, dotyczące problemu małych mianowników dla liczb Chinczyna-Levy'ego. Rozważania dotyczące małych mianowników oceniam bardzo wysoko. To, że pojawią sie w sposób naturalny funkcje typu Brjuna znane dobrze z teorii linearyzacji dyfeomorfizmów okręgu, nie było wcale oczywiste. Tymczasem właśnie okazało się, że rozważanej klasie one się efektywnie szacują. Z punktu widzenia technicznego oszacowania Doktoranta są tu precyzyjne i eleganckie, choć czyta się to nieco trudno ze względu na swoisty język i notacje. Ta część pracy jest bardzo dobrej jakości technicznej i zawiera wartościowe nowe rezultaty.

Podrozdział 5.5 jest dość pobieżnym uzasadnieniem tego, że rezultaty części poprzedzającej pozwalają na uzyskanie rezultatu KAM o torusach niezmienniczych. Nie przekonuje przede wszystkim brak ilościowego ujęciu problemu kurczenia się dziedzin przekształcenia linearyzującego, w szczególnosci na skutek przycinania potrzebnego od uzyskania oszacowań Cauchy'ego. Jeśli Doktorant spojrzy do cytowanych przez siebie prac Yoccoza, to będzie się mogł przekonać, iż tego typu oszacowania zajmuja tam sporo miejsca. Najwyraźniej więc ten wielki matematyk widział taką potrzebę. Osobiście zgadzam się, że opisany schemat powinien działać i nie widzę poważnych zagrożeń, ale można dyskutować, czy jest to naprawdę dowód. Podrozdział ten zatem nie ma może wielkiej wartości matematycznej sam w sobie, ale podaje dostateczny argument za tym, że rozwijana w rozprawie teoria małych mianowników da się zastosować w teorii KAM. Przekonuje też i do tego, że Doktorant dobrze rozumie to zagadnienie.

Na odrębną uwagę zasługuje końcowy pod-podrozdział 5.5.3 zawierający to, co zazwyczaj pisze się we wstępie, czyli uwagi dotyczące znaczenia uzyskanych rezultatów. Zgadzam się z Doktorantem, ze uzyskanie konkretnych oszacowań w teorii KAM jest ważne i niełatwe.

Jakość i znaczenie wyników rozprawy.
Recenzowana rozprawa jest niezwykle oszczędna jeśli idzie o dyskusje motywacji czy tez znaczenia uzyskanych rezultatów, poza wzmianowanym wyżej końcowym fragmentem. Tymczasem można tu mieć wątpliwości - jeśli liczby Chinczyna-Levy'ego są pozbiorem diofantycznych, to jaki jest zysk naukowy z udowodnienia znanych rezultatów teorii KAM w węższej klasie?

Nie o to jednak chodzi. Rozprawa wydaje się być częścią projektu, którego celem jest uzyskanie efektywnych oszacowań na wielkość dopuszczalnej perturbacji czy też dziedziny linearyzacji. Jest to notorycznie trudne do osiągnięcia w klasycznym ujęciu teorii KAM i byłoby sporym osiągnieciem. Temu celowi mają służyć efektywne oszacowania na miarę zbioru liczb Chinczyna-Levy'ego z zadanymi parametrami, jak i jawne oszacowania w problemie małych mianowników zależne od tychże parametrów. Niekoniecznie najlepszych przykładów dostarczy teoria KAM, bo nasuwa mi się także zadanie oszacowania dziedziny linearyzacji wokół punktu niewymiernie obojętnego, tj. w problemie Brjuna-Yoccoza.

Ciekawy jest już sam pomysł rozważenia tej klasy liczb obrotu, która wydaje się być niedaleka liczbom typu stałego, w szczególnosci dopuszając oszacowania na funkcje typu Brjuna, ale ma miarę dodatnią. Wydaje mi się, że warto by te liczby obrotu rozważyć nawet w problemach odległych od rozważanych w rozprawie, takich jak struktura brzegu dysków Siegela.

Dlatego uważam, że rezultaty rozprawy mają istotną wartość naukową. To dobrze, bo "na wagę" naprawdę wartościowego i oryginalnego materiału nie jest w rozprawie aż tak wiele, to w zasadzie rozdział drugi i pierwsze 4 podrozdziały piątego, łącznie 39 stron.

Wątpliwości budzi też tytuł rozprawy. Metody probabilistyczne odgrywają jedynie rolę w oszacowaniu miary zbioru liczb Chinczyna-Levy'ego, ale nie w problemie małych mianowników rozważanym w rozdziale piątym. Stąd uważam, że tytuł "Small denominators for Khintchine-Levy numbers" lepiej oddawałby istotną treść rozprawy.

Podsumowanie i konkluzja.
Wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim pracyzuje art. 13 ustawy o stopniach i tytule, przy czym wymogi merytoryczne są zawarte w punkcie 1. Czytamy tam, że rozprawa powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz wykazywać ogólną wiedzę autora i umie-

jętność samodzielnej pracy naukowej. Do tego wymogu ustawowego należy dodać zwyczajowy polegający na tym, że waga rozwiązanego problemu powinna być odpowiednio wysoka, bo bez tego niejedna dobra praca magisterska spełnia ustawowe kryterium. Nie ma natomiast wymogu ustawowego, ani moim zdaniem zwyczajowego, dotyczącego poziomu prezentacji osiągniętych wyników. Nie musi ona odpowiadać standardom literatury przedmiotu, musi być jedynie zrozumiała i poprawna.

W omawianym przypadku to właśnie prezentacja stanowi słabą stronę rozprawy. Jest mało przemyślana począwszy od doboru tytułu, rozwlekła w niektórych fragmentach (rozdział trzeci), zbyt pobieżna w innych (rozdziały czwarty i 5.5) i brakuje prezentacji głównych wyników z uzasadnieniem ich znaczenia. Rozprawę daje się jednak przeczytać i nie ma rzutujacych na jej poprawność błędów, a więc minimalny wymóg sformułowany wyżej jest spełniony.

Rozdziały drugi i pierwsze 4 podrozdziały piątego spełniają bez wątpliwości warunki ustawowe oryginalnego rozwiązania problemu, samodzielności pracy i odpowiedniego aparatu badawczego, o którym także zaświadcza podrozdział 5.5.

Waga problemu jest także wystarczająca w świetle znaczenia uzyskanych rezultatów oraz ich poziomu trudności.

Stwierdzam zatem, ze recenzowana praca spełnia ustawowe i zwyczajowe warunki stawiane rozprawom doktorskim oraz wnioskuję o dopuszczenie Doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Grzegorz Świątek

Grzegorz Świątek