Prof. dr hab. Krzysztof Frączek
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 28 maja 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej
Probabilistic methods in small divisors problems
mgr Piotr Kamieński

Wstęp. Wyniki rozprawy doktorskiej dotyczą klasycznego twierdzenia Kołmogorowa-Arnolda-Mosera, którego różnorakie wersje pojawiają się od lat 50-tych ubiegłego, gdy Kołmogorow zapoczątkował tę tematykę swoją słynną pracą. Obiektem zainteresowania są tu potoki liniowe na torusach parzystego wymiaru (pochodzące od stałych pól wektorowych), a dokładniej ich hamiltonowskie zaburzenia. Jak zauważył Kołmogorow, jeśli wektor częstotliwości wyznaczający pole wektorowe (obrót liniowy) spełnia pewien warunek diofantyczny, zaburzenie pola wektorowego jest analityczne oraz niewielkie, wówczas zaburzone równanie różniczkowe na torusie jest analitycznie sprzężone z oryginalnym liniowym równaniem, tzn. istnieje analityczna zamiana zmiennych, taka że w nowych zmiennych zaburzone równanie ma taką samą formę jak przed zaburzeniem. To słynne twierdzenie oraz schemat jego dowodu doczekały się wielu (równie sławnych) kontynuacji, najpierw przez Arnolda i Mosera, później m.in. przez tak znamienitych matematyków jak Herman i Yoccoz. Jedną z istotnych poruszanych kwestii był problem obniżania się gładkości sprzężenia, w przypadku zaburzeń o niższym stopniu gładkości niż analityczność. Pomimo długiej historii tematyka KAM jest cały czas żywa i przez lata przyniosła wiele istotnych rezultatów również poza oryginalnym kontekstem, m.in. w dynamice zespolonej, przy badaniu spektrum operatora Schrödingera z quasi-okresowymi współczynnikami oraz w równaniach różniczkowych cząstkowych.

W recenzowanej rozprawie zbadano oryginalny problem zaburzenia analitycznego dla równań na dwuwymiarowym torusie. Ograniczenie do wymiaru dwa daje możliwość użycia bardzo efektywnych i dobrze rozbudowanych metod wykorzystujących rozkład w ułamek łańcuchowy ilorazu częstotliwości. Głównym celem rozprawy jest udowodnienie efektywnej (ilościowej) wersji twierdzenia KAM, tzn. podanie jawnego wzoru na wielkość dopuszczalnego zaburzenia w zależności od własności ułamka łańcuchowego oraz szerokości paska analityczności zaburzenia. W tym celu wprowadzono rodzinę warunków nazwanych warunkami Chinczyna-Levy'ego, które są wyznaczone przez trzy (czasem dwa) parametry. Warunki Chinczyna-Levy'ego stanowią naturalny substytut klasycznych warunków diofantycznych i są użyte w rozprawie do uzyskania oszacowań wielkości dopuszczalnego zaburzenia wykorzystujących ich parametry. Kolejnym celem rozprawy jest zbadanie wielkości zbioru liczb spełniających warunki Chinczyna-Levy'ego.

Omówienie rezultatów. Rozprawa składa się ze wstępu i pięciu rozdziałów. Wstęp jest napisany dość zwięźle i tylko w niewielkim stopniu może pomóc czytelnikowi, który nie orientuje się w poruszanej tematyce. Brakuje w nim precyzyjnych odniesień do klasycznych wyników. Szczęśliwie następująca po wstępie merytoryczna część rozprawy napisana została z dużo większą dbałością o czytającego.

W rozdziale 1 zaprezentowano niezbędny materiał wprowadzający omawiając podstawowe zagadnienia z teorii liczb (ułamki łańcuchowe) oraz teorii prawdopodobieństwa.

Rozdział 2 jest w całości poświęcony własnościom Chinczyna-Levy'ego (w skrócie KL). Wprowadzona w rozprawie koncepcja własności KL opiera się o klasyczne twierdzenie Chinczyna-Levy'ego. Stanowi ono, że dla typowej liczby niewymiernej (prawie każdej w sensie miary) ciąg tzw. mianowników w rozkładzie na ułamek łańcuchowy oraz ciąg iloczynów tzw. ilorazów rosną wykładniczo. Ponadto, wyznacza ono dokładnie wykładniki wzrostu dla obu ciągów. Twierdzenie Chinczyna-Levy'ego dla ciągu iloczynów ilorazów to proste (ale piękne) zastosowanie twierdzenia ergodycznego dla odwzorowania Gaussa. Wprowadzona prze Doktoranta własność KL mówi, że wzrost ciągu od pewnego momentu jest wykładniczy z precyzyjnym szacowaniem z góry i z dołu tempa wzrostu. Głównym rezultatem rozdziału 2 jest twierdzenie 2.3.2, które podaje ograniczenie z dołu na miarę zbioru liczb z przedziału $[0, 1)$ spełniających warunki KL. Z postaci tego ograniczenia widać, że przy odpowiednim doborze parametrów miara zbioru liczb spełniających warunek KL może być dowolnie bliska jedynki. Wspomniane szacowanie zostało uzyskane w pomysłowy sposób technikami wielkich odchyleń. Głównym narzędziem jest tutaj klasyczne twierdzenie o wielkich odchyleniach bazujące na szacowaniu kumulant. Aby wyszacować kumulanty odpowiedniej zmiennej Doktorant skorzystał z faktu, że ciąg ilorazów (ich logarytmów) tworzy proces φ-mieszający będący funkcją od procesu Markowa. Jest to niewątpliwie interesujący i zaawansowany technicznie dowód, szczególnie, że wszystkie stałe w dowodzonych szacowaniach muszą być precyzyjnie doliczone.

Zawartość rozdziału 3 ma charakter służebny w stosunku do dalszych kluczowych rozdziałów rozprawy. Zawiera on szczegółową analizę wielkości $|q\omega - p|$, gdzie ω jest ilorazem częstotliwości oraz $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$. Jest to bardzo ważne klasyczne zagadnienie z punktu widzenia rozwiązywania tzw. równań kohomologicznych. Głównym rezultatem tego rodziału jest twierdzenie 3.2.3, w którym dla pewnej stałej $C > 0$ precyzyjnie opisano zbiór „złych" par (p, q), dla których $|q\omega - p| < C/|q|$. Jego dowód jest całkowicie elementarny, ale wymagał od autora dużej pomysłowości. Mimo że, sformułowanie twierdzenia jest dość techniczne stanowi ono bardzo ważny punkt całej rozprawy i moim zdaniem jest interesujące samo w sobie.

Krótki rozdział 4 stanowi wstęp do finałowych rozważań dotyczących zagadnienia KAM. Następny rozdział 5 jest poświęcony w większości problemowi rozwiązywania równania kohomologicznego postaci $(\partial_x + \omega\partial_y)g = a$. Równanie kohomoliczne jest w pewnym sensie linearyzacją problemu znajdowania zamiany zmiennych w zagadnieniu KAM. Klasycznie rozwiązanie takiego równania tworzy krok iteracyjny w procedurze wzorowanej na metodzie Newtowa rozwiązywania równań nieliniowych. Wspomniana klasyczna metoda znajdowania zamiany zmiennych jest również stosowana w recenzowanej rozprawie. Ogólne podejście do rozwiązywania równania kohomolicznego bazuje również na standardowym użyciu formalnych szeregów Fouriera i szacowaniu współczynników Fouriera formalnego rozwiązania. Następnym krokiem jest analiza ubytku analityczności rozwiązania równania g w stosunku do funkcji danej a. Ten krok zwykle jest najbardziej newralgiczny. W istotny sposób korzysta się w nim z diofantycznych własności ω. Realizacja tego kroku zaprezentowana w rozprawie korzysta z nowego podejścia używając własności KL zamiast używanego klasycznie warunku diofantycznego. Ponadto wykorzystuje istotnie postać „złych" par (p, q) zidentyfikowanych w rozdziale 3. Dowód finałowego rezultatu wskazującego precyzyjnie ubytek analityczności wymagał od autora dużej zręczności rachunkowej i nietrywialnych pomysłów. Rozdział 5 kończy zastosowanie wspominanego rezultatu do znalezienia zamiany zmiennych w zagadnieniu KAM. Ta część rozważań jest opisana tylko pobieżnie, a może szkoda, bo w tego typu rachunkach zawsze diabeł tkwi w szczegółach. Z drugiej strony usprawiedliwieniem dla autora jest to, że w opisanej procedurze tworzenia zamiany zmiennych, choć skomplikowanej, nie wprowadza zbyt wielu nowych elementów w stosunku do klasycznych rozważań.

Rozprawa jest starannie napisanym tekstem matematycznym. Szczególnie skomplikowane rachunki, głównie w rozdziale 5, są poprzedzone heurystycznymi wyjaśnieniami, które znacznie ułatwiają śledzenie właściwych obliczeń. Merytoryczną część rozprawy czyta się dość dobrze, widać trud włożony przez autora, aby czytelnik wiedział, co aktualnie czyta i jaki jest cel mozolnych obliczeń. Poza kilkoma miejscami, w których wprowadza się nadmiarową notację, można nadążyć za autorem. Mniejszy mój entuzjazm wzbudza sposób napisania wstępu. Brak szczegółowych odniesień do klasycznej literatury i precyzyjnego porównania wprowadzonych technik do już istniejących wzbudza we mnie element niepewności. Zarówno zagadnienie KAM, jak i statystyczne własności ułamków łańcuchowych, to niezwykle żywe tematy z bardzo bogatą literaturą. W rozprawie znajdujemy tylko sporadyczne do niej odniesienia. W takim przypadku czytelnik, który nie śledzi na bieżąco publikacji w tej tematyce (a to jest właśnie przypadek piszącego tę recenzję), nie może mieć pewności, czy wypracowane techniki są rzeczywiście oryginalne. Mój niepokój potęguje również fakt, że Doktorant do tej pory nie opublikował żadnej pracy naukowej, a przynajmniej nie znalazłem w bazie MathSciNet jego publikacji. Po dość długim już okresie bycia profesjonalnym matematykiem brak weryfikacji działalności naukowej przez zewnętrznych merytorycznie przygotowanych zagranicznych recenzentów (w czasopismach) nie jest zdrowe. Mój krytycyzm budzi również tytuł rozprawy doktorskiej, który nie do końca odpowiada jej zawartości. Metody probabilistyczne są używane w zaledwie jednym rozdziale i nie stanowią kluczowego zagadnienia rozprawy. Dodatkowo, autor jedynie korzysta z metod probabilistycznych, wcale ich nie rozwijając. Mój sceptycyzm budzi również fakt, że rozprawa została napisana w języku angielskim. Nie znajduję zbyt wielu argumentów, poza kwestiami ambicjonalnymi, dla takiej decyzji.

Mimo wspomnianych wątpliwości (wynikających może z pewnego oddalenia głównych zainteresowań recenzenta od tematu rozprawy), według mojego stanu wiedzy, wyniki uzyskane w rozprawie są nowe i interesujące. Wysoko oceniam dowód twierdzenia 2.3.2, w którym użyto metody kumulant do udowodnienia rezultatu typu wielkich odchyleń. Metoda kumulant, choć ma długą historię, nie często jest wykorzystywana w teorii ergodycznej. W rozprawie znajdujemy bardzo ładne jej zastosowanie. Szacowanie ubytku analityczności w równaniu kohomologicznym, przedstawione w rozdziale 5, wymagało od autora sporej pomysłowości i sprytu matematycznego. Dowód tego szacowania stanowi najbardziej wartościowe jądro rozprawy, którą w całości również wysoko oceniam.

Podsumowanie. W moim przekonaniu rozprawa mgr. Piotra Kamieńskiego pt. „Probabilistic methods in small divisors problems" spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. Uzyskane przez mgr. Kamieńskiego wyniki świadczą o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu matematycznego i umiejętności rozwiązywania trudnych problemów z dziedziny układów dynamicznych. Zagadnienie KAM, mimo że ma długą historię, to temat trudny badany przez wielu wybitnych matematyków. Osiągnięcie w tym temacie nowych i interesujących rezultatów nie jest łatwe. Uzyskanie w rozprawie nowych efektywnych oszacowań na dopuszczalne zaburzenie w dwuwymiarowym zagadnieniu KAM stanowi niewątpliwie takie osiągnięcie.

W związku z tym przedkładam Radzie Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego wniosek o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie mgr. Piotra Kamieńskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Krzysztof Frączek