

Recenzja rozprawy doktorskiej Tomasza Kowalczyka

Real algebraic versions of Cartan's Theorems A and B.

Promotor – dr hab. Krzysztof Nowak

Temat rozprawy dotyczy szeregu ważnych zagadnień rzeczywistej geometrii algebraicznej i analitycznej. Praca jest poświęcona badaniu snopów nad rzeczywistymi rozmaitościami algebraicznymi, i dowodzeniu jakie własności mogą mieć te snopy po zastosowaniu cofnięcia snopu za pomocą pewnych rodzin rozdmuchań.

Praca jest napisana po angielsku. Składa się ze wstępu, dziewięciu rozdziałów i bibliografii.

Po wstępie, w rozdziale 2 wprowadzono szereg niezbędnych pojęć i definicji. W szczególności udowodniono tam, że dla skończonej rodziny regularnych funkcji istnieje takie "wielorozdmuchanie" (czyli złożenie skończonej rodziny rozdmuchań) po złożeniu z którym te funkcje można lokalnie liniowo uporządkować używając relacji podzielności.

W rozdziale 3 wprowadzono naturalną relację porządku w zbiorze wielorozdmuchań. Następnie udowodniono, że zbiór wielorozdmuchań z tą relacją jest zbiorem skierowanym.

W rozdziale 4 udowodniono pewną wersję Twierdzenia A Cartana. Mówi ono, że dla koherentnego snopa \mathcal{F} na rzeczywistej rozmaitości algebraicznej X istnieje wielorozdmuchanie $\rho: X_\rho \rightarrow X$ oraz skończona rodzina globalnych cięć snopa $\rho^*\mathcal{F}$, której kielki generują każde włókno $(\rho^*\mathcal{F})_y$, dla $y \in X_\rho$.

W rozdziale 5 zebrano kluczowe definicje i fakty dotyczące wymiaru homologicznego snopów quasi-koherentnych.

W rozdziale 6 udowodniono kilka wersji Twierdzenia B Cartana. Podają one dostateczne warunki na to, żeby "rozdmuchaniowe" q -te grupy kohomologii Čecha pewnych snopów, gdzie $q \geq 1$, były trywialne.

W rozdziale 7 autor formułuje addytywny problem Cousina, w którym dane Cousina opisane są w terminach relacji pomiędzy pewnymi wymiernymi i regularnymi funkcjami. Następnie dowodzi, że istnieje takie wielorozdmuchanie, że po cofnięciu danych problem Cousina jest rozwiązywalny.

W rozdziale 8 tematem badań są koherentne snopy homologicznego wymiaru 1. Udowodniono tu, że po wielorozdmuchaniu i stowarzyszonym z nim cofnięciu, taki snop ma postać sumy prostej pewnych "prostszych" snopów.

W rozdziale 9 przedstawiono kilka przykładów powiązanych z przedstawionymi wcześniej tematami. Opisano rodzinę lokalnie wolnych koherentnych snopów $\mathcal{F}_{k,\ell}$ na \mathbb{R}^2 , $k, \ell = 1, 2, \dots$, które nie są generowane przez globalne przekroje. Następnie pokazano wprost, że po jednokrotnym rozdmuchaniu \mathbb{R}^2 stowarzyszony cofnięty snop

Szol

posiada już nigdzie nieznikający globalny przekrój. Kolejny przykład udowadnia, że Twierdzenie A Cartana nie posiada uogólnienia na klasę snopów quasi-koherentnych. Na koniec tego rozdziału przedstawiono przykład danych Cousina na \mathbb{R}^2 , dla których problem Cousina nie posiada rozwiązania. W szczególności udowodniono, że grupa kohomologii $H^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2})$ jest nietrywialna.

W Dodatku autor dowodzi między innymi, że dla pre-algebraicznej wiązki wektorowej ξ rzędu p nad rozmaitością X istnieje takie wielorozdmuchanie $\rho: X_\rho \rightarrow X$, że wiązka $\rho^*\xi$ jest sumą prostą p wiązek liniowych algebraicznych nad X_ρ .

Problemy których dotyczy praca miały swój początek w badaniach obiektów (snopów, wiązek) stowarzyszonych z przestrzeniami zespolonymi. Uzyskanych wtedy wyników nie można na ogół w łatwy sposób przenieść na przypadek rzeczywisty, o czym świadczą przykłady omówione w pracy. Autor pokazał, że wiele ważnych twierdzeń dotyczących snopów, w szczególności Twierdzenie A i B Cartana czy problem Cousina, ma odpowiedniki w przypadku rzeczywistym wtedy, gdy dokonamy wielorozdmuchania przestrzeni. Dlatego twierdzenia przedstawione w pracy są ważnym wartościowym wkładem do rzeczywistej geometrii. Ich uzyskanie wymagało biegłości w posługiwaniu się wieloma technicznie zaawansowanymi narzędziami geometrii algebraicznej, oraz twórczego adoptowania ich do przypadku rzeczywistego. Uważam, że autor rozprawy bardzo dobrze sobie z tym poradził. Jego wyniki będą też istotnym wkładem do intensywnie ostatnio rozwijanej teorii różnych klas rzeczywistych funkcji wymiernych.

Wyniki rozprawy zostały już przedstawione w dwóch artykułach, z których jeden jest opublikowany.

Język angielski oraz redakcję pracy oceniam dobrze, choć uważam że w kilku miejscach należało dokładniej wyjaśnić używane argumenty. Podam jeden przykład. W kilku miejscach autor pisze, że mając skończoną rodzinę funkcji na X można znaleźć takie wielorozdmuchanie po złożeniu z którym te funkcje mają postać prostych przecięć normalnych, które można uporządkować liniowo za pomocą relacji podzielności na skończonym pokryciu przestrzeni X_ρ zbiorami otwartymi w topologii Zariskiego. Jest to jak rozumiem konsekwencja Wniosku 2.14, gdzie pojęcie "lokalności" odnosi się chyba raczej do topologii euklidesowej, a nie do topologii Zariskiego. Myślę jednak, że problem ten można będzie wyjaśnić podczas obrony pracy.

Reasumując, recenzowana rozprawa doktorska jest wartościową pracą, zawierającą oryginalne wyniki dotyczące rzeczywistej geometrii algebraicznej i analitycznej. Świadczy ona o dobrej znajomości tematu oraz zdolności autora do prowadzenia samodzielnych, twórczych badań.

Uważam, że rozprawa doktorska pana Tomasza Kowalczyka spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania. Wniosuję o skierowanie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Uważam też, że jej wysoki poziom zasługuje na wyróżnienie.

Zbigniew Szafraniec

