Załącznik nr. 2

Autoreferat

1. Imię i nazwisko: **Janusz Gwoździewicz**
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:
   - dyplom magistra matematyki: Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, 1987
   - stopień doktora nauk matematycznych: Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, 1996, rozprawa doktorska pod tytułem *Wykładnik Łojasiewicza funkcji analitycznej o zerze izolowanym*
3. Dotychchczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:
   Katedra Matematyki Politechniki Świętokrzyskiej: asystent w roku 1986, adiunkt w latach 1987–2011, starszy wykładowca od roku 2011
4. Osiągnięcie naukowe, o którym mówi art. 16 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki, stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:
   Jakobianowy diagram Newtona i osobliwości krzywych

   Cykl składa się z pięciu prac:

   [20] E. R. García Barroso, J. Gwoździewicz, Characterization of Jacobian Newton polygons of plane branches and new criteria of irreducibility, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 60(2), (2010), 683–709

   [21] E. R. García Barroso, J. Gwoździewicz, A discriminant criterion of irreducibility, *Kodai Mathematical Journal*, 35(2), (2012), 403–414

   [22] J. Gwoździewicz, Invariance of the Jacobian Newton diagram, *Mathematical Research Letters*, 19(2), (2012), 377–382

   [23] J. Gwoździewicz, Ephraim's pencils, *International Mathematics Research Notices*, doi:10.1093/imrn/rns148, (2012)

   [24] E. R. García Barroso, J. Gwoździewicz, On the approximate jacobian Newton diagrams of an irreducible plane curve, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 65, No. 1 (2013), 169–182, doi: 10.2969/jmsj/06510169

   Wszystkie te prace dotyczą osobliwości lokalnych krzywych analitycznych. Ich omówienie jest poprzedzone wstępem. Cytowane publikacje oznaczono według klucza – [Skróty nazwisk autorów, rok wydania].

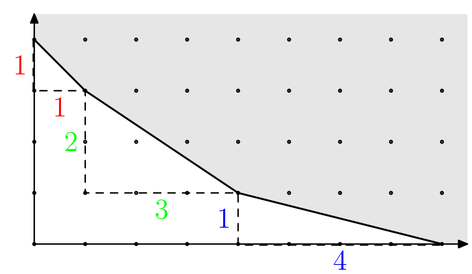
Wstęp

W siedemnastym wieku Izaak Newton wymyślił sposób rozwikływania równań algebraicznych $f(x,y)=0$ tak, aby rozwiązania były szeregami $y=y(x)$ o wymiernych wykładnikach. W jego metodzie pojawia się po raz pierwszy pomysł skojarzenia z wielomianem $f(x,y)$ pewnego wielokąta zwanego współcześnie diagramem Newtona. Pojęcie diagramu Newtona jest centralne w pracach [20-22] i [24]. Dlatego przytoczymy jego definicję i współczesną notację wprowadzoną przez Bernarda Teissiera.

Definicja: Diagram Newtona $\Delta(f)$ szeregu potęgowego $f(x,y)=\sum_{ij} a_{ij}x^iy^j$ jest to otoczka wypukła zbioru

$$\bigcup_{a_{ij}\neq 0}\{(i,j)+\mathbf{R}^2_+\}.$$

Przykład: Niech $f(x,y)=y^4+3xy^3+2x^4y+10x^8$. Diagram Newtona szeregu $f(x,y)$ jest na rysunku poniżej. Jest on sumą trzech *elementarnych diagramów Newtona* zapisanych jako *ułamki Teissiera*.



$$\Delta(f)=\left\{\frac{1}{1}\right\}+\left\{\frac{3}{2}\right\}+\left\{\frac{4}{1}\right\}$$

Pierścień szeregów potęgowych zmiennych zespolonych x, y o dodatnim promieniu zbieżności będzie oznaczany $\mathbf{C}\{x,y\}$. Dowolny element tego pierścienia można utożsamić z kiełkiem w zerze funkcji holomorficznej $f:(\mathbf{C}^2,0)\to\mathbf{C}$.

Lokalną krzywą analityczną w zerze $f=0$, zwaną dalej krótko krzywą, utożsamiamy z ideałem ideałem generowanym przez $f(x,y)$ w pierścieniu $\mathbf{C}\{x,y\}$. Ta definicja odzwierciedla fakt, że pomnożenie funkcji f przez funkcję holomorficzną u, dla której $u(0,0)\neq 0$, nie zmienia jej zbioru zer w pobliżu początku układu współrzędnych.

Jeśli $f(x,y) = ax+by+$ *wyrazy wyższych rzędów*, gdzie $ax+by\not\equiv 0$, to krzywą $f=0$ nazywamy *gładką*. Krzywa $f=0$ jest *osobliwa*, gdy szereg $f(x,y)$ rozpoczyna się od wyrazów rzędu wyższego niż 1. Jeśli $f(x,y)$ jest szeregiem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbf{C}\{x,y\}$, to $f=0$ nazywamy *krzywą nierozkładalną* lub *gałęzią*. Gdy szereg $f\in\mathbf{C}\{x,y\}$ rozkłada się w tym pierścieniu na iloczyn $f_1^{\nu_1}\cdots f_n^{\nu_n}$, gdzie f_i są nierozkładalne i parami względnie pierwsze, to mówimy, że gałąź $f_i=0$ występuje w krzywej $f=0$ z krotnością ν_i. Krzywą, w której wszystkie gałęzie występują z krotnością 1, nazywamy *zredukowaną*. Na dowolną krzywą zredukowaną można spojrzeć geometrycznie jako na kiełek w zerze zbioru $\{\,(x,y)\in\mathbf{C}^2 : f(x,y)=0\,\}$.

W latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku Oskar Zariski wprowadził pojęcie ekwisingularności krzywych płaskich. Krzywe zredukowane $f = 0$, $\tilde{f} = 0$ nazwiemy *ekwisingularnymi*, gdy istnieje homeomorfizm $\Phi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ który przeprowadza krzywą $f = 0$ na krzywą $\tilde{f} = 0$.

Rozszerzymy to pojęcie na pary krzywych. Pary krzywych zredukowanych $f = 0$, $g = 0$ oraz $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$ nazwiemy *ekwisingularnymi* gdy istnieje homeomorfizm $\Phi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ który przeprowadza krzywą $f = 0$ na krzywą $\tilde{f} = 0$ a krzywą $g = 0$ na krzywą $\tilde{g} = 0$. Definicja ekwisingularności w "duchu Zariskiego" obejmująca przypadek krzywych niezredukowanych jest podana w Dodatku 1.

Jeśli jakaś wielkość przypisana krzywym płaskim jest taka sama dla krzywych ekwisingularnych, to nazywamy ją *niezmiennikiem ekwisingularności*. Najprostszymi numerycznymi niezmiennikami ekwisingularności są liczba stycznych do krzywej i liczba gałęzi krzywej. Diagram Newtona $\Delta(f)$ nie jest niezmiennikiem ekwisingularności (bo na przykład krzywe $x^2 - y = 0$, $x - y^2 = 0$ są ekwisingularne a mają różne diagramy Newtona).

Rozpatrzmy kiełek odwzorowania holomorficznego $\phi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$, dla którego $\phi^{-1}(0,0) = \{(0,0)\}$. Dla dowolnej lokalnej krzywej analitycznej $h = 0$ można utworzyć jej *obraz prosty* $\phi_*(h = 0)$ *poprzez odwzorowanie* ϕ, czyli krzywą, której gałęzie są obrazami gałęzi krzywej $h = 0$ poprzez ϕ i krotności tych gałezi w obrazie prostym są tak dobrane, aby zachodziła tzw. formuła rzutowania (zob. [Cas2000], [Cas2003]). Definicja obrazu prostego pochodząca z [Cas2000] jest podana w Dodatku 2.

Jeśli $\operatorname{jac}\phi = \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}$ jest jakobianem odwzorowania ϕ, to obraz prosty krzywej $\operatorname{jac}\phi = 0$ poprzez ϕ nazywamy *krzywą wyróżnikową*. Gdy $D = 0$ jest krzywą wyróżnikową, to szereg D (określony z dokładnością do mnożenia przez szereg odwracalny) nazywamy *wyróżnikiem* a diagram Newtona $\Delta(D)$ nazywamy *jakobianowym diagramem Newtona* odwzorowania ϕ.

Jakobianowe diagramy Newtona zostały wprowadzone przez Bernarda Teissiera. Udowodnił on w fundamentalnej pracy [Te1977], że w ekwisingularnej rodzinie krzywych płaskich $f(t, x, y) = 0$ rodzina krzywych wyróżnikowych $D_t = 0$ kiełków odwzorowań $\phi_t = (f(t, x, y), l(x, y))$ (gdzie $l(x, y) = 0$ jest generyczną krzywą gładką) co prawda niekoniecznie jest rodziną ekwisingularną, ale mimo to diagramy Newtona wyróżników tej rodziny są jednakowe.

Jakobianowy diagram Newtona odwzorowania $(f, g) : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ będziemy oznaczali $\mathcal{N}_J(f, g)$. Jeśli $\operatorname{jac}(f, g) = h_1 \cdots h_n$ jest rozkładem jakobianu na czynniki nierozkładalne w $\mathbf{C}\{x, y\}$ to (zob. [22])

$$\mathcal{N}_J(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{i_0(g, h_i)}{i_0(f, h_i)} \right\}.$$

W powyższym wzorze $i_0(g, h_i)$, $i_0(f, h_i)$ są krotnościami przecięcia (zob. Dodatek 1). Ułamki $\frac{i_0(g,h_i)}{i_0(f,h_i)}$, nazywane *ilorazami jakobianowymi*, odpowiadają nachyleniom krawędzi diagramu $\mathcal{N}_J(f, g)$, czyli ilorazom: długość rzutu krawędzi na oś poziomą podzielona przez długość rzutu krawędzi na oś pionową.

Omówienie publikacji [20]-[24]

Rozpoczynamy od najbardziej ogólnej pracy [22], która odpowiada na pytanie, czy jakobianowy diagram Newtona jest niezmiennikiem ekwisingularności. Związane ze sobą tematycznie prace [20] i [21] mają wspólne streszczenie. Jako ostatnia jest omówiona praca [23], którą pozornie łączą z pozostałymi tylko zastosowane narzędzia matematyczne. Jednak, jak się okazuje, jej główny wynik można sformułować jako twierdzenie o wyróżniku pewnego odwzorowania analitycznego.

[22]

W omawianej pracy dowodzi się, że diagram Newtona wyróżnika odwzorowania $(f,g):(\mathbf{C}^2,0)\to(\mathbf{C}^2,0)$ jest niezmiennikiem ekwisingularności pary krzywych $f=0$, $g=0$.

Wiele cząstkowych wyników tego typu było znanych wcześniej. Na ogół są to twierdzenia o faktoryzacji krzywej jakobianowej, ale jak wynika z przedstawionej we wstępie formuły dla $\mathcal{N}_J(f,g)$, znajomość czynników nierozkładalnych jakobianu wraz z informacją o krotnościach przecięcia pozwala wyznaczyć jakobianowy diagram Newtona.

Najpierw skoncentrujemy się na przypadku, w którym jedna z krzywych omawianej pary jest gładka. Krzywą jakobianową odwzorowania $(l,f):(\mathbf{C}^2,0)\to(\mathbf{C}^2,0)$, gdzie $l=0$ jest krzywą gładką a $f=0$ krzywą osobliwą, nazywamy *krzywą polarną*. Krzywe polarne mają bardzo bogatą literaturę. Są to między innymi prace: [1], [11], [18], [Del1994], [Egg1982], [Eph1983], [Gar2000], [KuoL1977], [Lê1975], [LêMW1989], [LêMW1991], [LenP2000], [LenMP2003], [Len2004], [Len2008], [Mer1977], [Pł2001], [Pł2002], [Te1976], [Te1977], [Wall2003].

W [Mer1977] wyznaczono faktoryzację krzywej polarnej przy założeniu, że $f=0$ jest nierozkładalna i transwersalna do $l=0$. W [Eph1983] uwolniono się od założenia transwersalności. Wyniki Merle'a i Ephraima dają formułę dla $\mathcal{N}_J(l,f)$ w terminach niezmienników ekwisingularności pary krzywych $l=0$, $f=0$ [Te1976], [18, Theorem 4.1].

W [Del1994] znaleziono faktoryzację krzywej polarnej dla $f=0$ o dwóch gałęziach.

W [KuoL1977] opisano położenie gałezi krzywej polarnej $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ względem gałęzi krzywej $f=0$. W cytowanym artykule wprowadzono kombinatoryczny obiekt $T(f)$, zwany obecnie *drzewem Kuo–Lu* szeregu f. Formułę wyrażającą $\mathcal{N}_J(y,f)$ poprzez $T(f)$ uzyskano w [20]. Autor przypuszcza, że drzewo Kuo–Lu $T(f)$ zależy tylko od klasy ekwisingularności pary $y=0$, $f=0$. Dawałoby to bezpośredni dowód głównego wyniku [22] dla odwzorowań (y,f).

W przez długi czas zapomnianej pracy [Egg1982] rozwiązano problem faktoryzacji krzywej polarnej dla dowolnej zredukowanej krzywej osobliwej $f=0$ i transwersalnej do niej krzywej gładkiej $l=0$. Dowodzi to głównego wyniku [22] dla odwzorowań (l,f).

Wróćmy do przypadku ogólnego. Wyniki [KuoP2004] dają ilorazy jakobianowe pary krzywych zredukowanych $f = 0$, $g = 0$, czyli nachylenia krawędzi jakobianowego diagramu Newtona $\mathcal{N}_J(f, g)$ w terminach drzewa Kuo-Lu $T(fg)$. Jednak rezultaty tej pracy nie pozwalają wyznaczyć długości niektórych krawędzi diagramu $\mathcal{N}_J(f, g)$. Prace [Del1991], [Mau1998], [Cas2007] dotyczą również zagadnienia opisu ilorazów jakobianowych.

Twierdzenie o faktoryzacji jakobianu pary (f, g) krzywych zredukowanych, z którego wynika niezmienniczość jakobianowego diagramu Newtona dla takiej pary, zostało udowodnione metodami topologicznymi w [Mich2008].

W [22] dopuszcza się, że krzywe $f = 0$, $g = 0$ mają składowe wielokrotne (nie są zredukowane). Dowód niezmienniczości jakobianowego diagramu Newtona w tej pracy jest algebraiczny. Opiera się na formule Casasa Alvero [Cas2003, Theorem 3.2], (zob. też [22, Theorem 2.3]) i interpretacji funkcji podpierającej diagramu Newtona wyróżnika w terminach niezmienników klasy ekwisingularności krzywej $f(x, y) - tg(x, y) = 0$, dla generycznego t, która jak się okazuje, zależy tylko od klasy ekwisingularności pary krzywych $f = 0$, $g = 0$.

[20] i [21]

Jakobianowy diagram Newtona odwzorowania $(x, f) : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ nie determinuje klasy ekwisingularności krzywej $f = 0$. W [Len2008] został podany przykład takich szeregów potęgowych $f(x, y)$, $g(x, y)$, że $\mathcal{N}_J(x, f) = \mathcal{N}_J(x, g)$ ale krzywe $f = 0$ i $g = 0$ mają odpowiednio 3 i 5 gałęzi.

Okazuje się, jak stwierdza główny wynik omawianych prac, że przypadek nierozkładalny jest zupełnie inny.

TWIERDZENIE: Niech $(l_i, f_i) : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ będą odwzorowaniami analitycznymi takimi, że $l_i = 0$ jest krzywą gładką nie będącą gałęzią krzywej $f_i = 0$ dla $i = 1, 2$. Jeśli krzywa $f_1 = 0$ jest nierozkładalna oraz $\mathcal{N}_J(l_1, f_1) = \mathcal{N}_J(l_2, f_2)$ to krzywe $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ są ekwisingularne.

W [20] to twierdzenie ma dodatkowe założenie, pominięte w [21], że krzywe $f_i = 0$, $l_i = 0$ $(i = 1, 2)$ nie mają wspólnej stycznej.

Nazwijmy dowolny diagram Newtona postaci $\mathcal{N}_J(l, f)$, gdzie $l = 0$ jest krzywą gładką a $f = 0$ jest osobliwą krzywą nierozkładalną, *diagramem typu Merle'a*. Twierdzenie 2.3 z [21] podaje arytmetyczne kryteria na to, czy dany diagram Newtona Δ jest diagramem typu Merle'a.

Wnioskiem z głównego twierdzenia jest Twierdzenie 3.1 z [21]:

TWIERDZENIE: Niech $f = 0$ będzie krzywą osobliwą a $l = 0$ dowolną krzywą gładką, nie będącą jej gałęzią. Wówczas $f = 0$ jest krzywą nierozkładalną wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{N}_J(l, f)$ jest diagramem typu Merle'a.

To kryterium nierozkładalności jest szczególnie proste w użyciu dla wielomianów wyróżnionych $f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_0(x)$. Zgodnie z Formułą 1.2 z [21], wyróżnik odwzorowania $(x, f) : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ jest zwykłym wyróżnikiem wielomianu jednej zmiennej

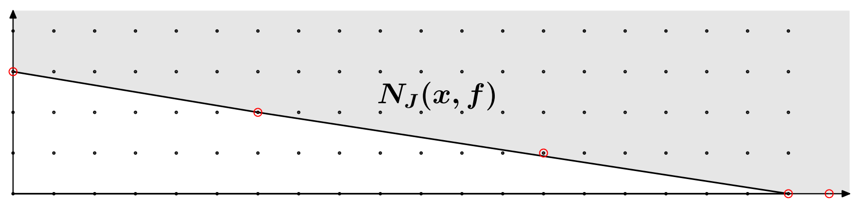
$$D(u, v) = \mathrm{Discr}_y(y^n + a_1(u)y^{n-1} + \cdots + a_0(u) - v).$$

Tak więc dla zbadania nierozkładalności $f(x,y)$ wystarczy obliczyć $D(u,v)$ i sprawdzić, czy $\Delta(D)$ jest diagramem typu Merle'a.

Przykład: Niech $f(x,y) = (y^2 - x^3)^2 - x^5 y$. Obliczając wyróżnik zgodnie z powyższym wzorem, dostajemy

$$D(u,v) = -256v^3 + 256u^6v^2 + 288u^{13}v - 256u^{19} - 27u^{20}.$$

Diagram Newtona wyróżnika jest na rysunku poniżej. Czerwonymi kropkami oznaczono punkty odpowiadające jednomianom występującym w $D(u,v)$.



Używając twierdzenia 2.3 z [21] łatwo sprawdzić, że $\mathcal{N}_J(x,f) = \{\frac{6}{1}\} + \{\frac{13}{2}\}$ jest diagramem typu Merle'a. Zatem krzywa $f = 0$ jest nierozkładalna.

Zauważmy, że inne kryteria nierozkładalności krzywych analitycznych są procedurami wieloetapowymi. Polegają albo na rozwiązywaniu osobliwości krzywej $f = 0$ poprzez kolejne rozdmuchania bądź modyfikacje toryczne, albo na wyznaczeniu początkowych części rozwinięć pierwiastków Newtona-Puiseux równania $f(x,y) = 0$, albo, jak kryterium Abhyankara [Abh1989], na analizie rozwinięcia G-adycznego wielomianu wyróżnionego f względem jego pierwiastków aproksymatywnych.

Odnotujmy jeszcze Twierdzenie 3.7 z [21], które jest kryterium lokalnej analitycznej nierozkładalności krzywej wielomianowej $F(x,y) = 0$ w dowolnym punkcie tej krzywej oraz Twierdzenie 5.1 z [21] będące kryterium nierozkładalności w nieskończoności krzywej rzutowej.

[24]

Niech A będzie pierścieniem bez dzielników zera. Załóżmy, że p, d są liczbami naturalnymi takimi, że liczba p dzieli d i jest odwracalna w pierścieniu A. Jeśli

$$F(Y) = Y^d + a_1 Y^{d-1} + \cdots + a_n$$

jest wielomianem o współczynnikach z pierścienia A, to istnieje jedyny wielomian unitarny

$$G(Y) = Y^{\frac{d}{p}} + b_1 Y^{\frac{d}{p}-1} + \cdots + b_{d/p}$$

o współczynnikach z pierścienia A taki, że $\deg(F - G^p) < d - \frac{d}{p}$. Nazywamy go *$p$-tym pierwiastkiem aproksymatywnym wielomianu $F(Y)$*.

Pierwiastki aproksymatywne są narzędziem w dowodzie słynnego twierdzenia Abhyankara i Moha o wielomianowym zanurzeniu prostej zespolonej w płaszczyznę zespoloną [AbhM1973], [AbhM1975]. Z każdym nierozkładalnym wielomianem wyróżnionym $f \in \mathbf{C}\{x\}[y]$ można skojarzyć pewien ciąg pierwiastków aproksymatywnych f_0, f_1,..., f_{g-1}, zwanych *charakterystycznymi pierwiastkami aproksymatywnymi.* Krzywe $f_i = 0$ są nierozkładalne i klasa ekwisingularności par $f_i = 0$, $f = 0$ zależy tylko od klasy ekwisingularności pary $x = 0$, $f = 0$ (zob. [AbhM1973] oraz [4, Theorem 1.4]).

Praca [24] podaje formuły na jakobianowe diagramy Newtona $\mathcal{N}_J(f_i, f)$ w terminach niezmienników ekwisingularności pary $x = 0$, $f = 0$. Są one oparte na faktoryzacji krzywej jakobianowej odwzorowania (f_i, f) analogicznej do faktoryzacji krzywej polarnej $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ z [Mer1977].

[23]

Omawiana praca zajmuje się problemem oszacowania liczby wartości specjalnych pęku krzywych płaskich postaci $f(x, y) - ty^M = 0$. *Wartość specjalna* jest to taka liczba $t \in \mathbf{C}$, że krzywa $f(x, y) - ty^M = 0$ nie jest ekwisingularna z generyczną krzywą pęku.

Takie pęki były od dawna przedmiotem badań. Y. Yomdin, Lê D. T. i B. Teissier studiowali takie deformacje około 1973 roku w związku z problemem ekwisingularności, używając niezmienników topologicznych takich jak liczba Milnora w bardziej ogólnym przypadku hiperpowierzchni. Pęki hiperpowierzchni tego typu zostały później nazwane *deformacjami Yomdina-Lê* w wielu artykułach opublikowanych około roku 1990 przez J. H. M. Steenbrika, D. Siersmę i innych.

Problem charakteryzacji wartości specjalnych pęków jest rozwiązany tylko w wymiarze 2 oraz dla specjalnych typów osobliwości w wyższych wymiarach. Podobnie jest w bliźniaczym przypadku *wartości atypowych* funkcji wielomianowych.

Wielu autorów podawało oszacowania na liczbę tych wartości. W [10] udowodniono, że liczba wartości atypowych wielomianu f dwóch zmiennych o skończonej liczbie punktów krytycznych nie przekracza $\min(1, \deg f - 3)$. Oszacowanie w terminach stopnia wielomianu w przypadku n zmiennych podano w [JelK2003]. W [LêO1994] zaproponowano oszacowanie liczby wartości atypowych wielomianu dwóch zmiennych w terminach diagramu Newtona. Jest ono poprawione w [LenM2009]. W tej samej pracy są twierdzenia charakteryzujące wartości specjalne pęku $f(x, y) - tx^N = 0$.

Głównym wynikiem [23] jest

TWIERDZENIE: Liczba niezerowych wartości specjalnych pęku krzywych płaskich $f(x, y) - ty^M = 0$ nie przekracza liczby gałęzi krzywej $f = 0$, liczonych bez uwzględnienia krotności.

Wynika z niego

WNIOSEK: Liczba niezerowych wartości atypowych wielomianu $f(x, y)$ nie przekracza liczby gałęzi w nieskończoności krzywej $f(x, y) = 0$, liczonych bez uwzględnienia krotności.

Praca [23] została zainspirowana przez [GarP2004] a jej metody są zaadaptowane z [KuoL1977] oraz [KuoP2004]. W jej tekście, poza dowodem pomocniczego Twierdzenia 3.1, nie ma mowy o wyróżniku. Jednak recenzent pracy zwrócił uwagę, że główny wynik [23] może być sformułowany następująco:

TWIERDZENIE: Liczba stycznych krzywej wyróżnikowej $D(u, v) = 0$ odwzorowania analitycznego $(y^M, f(x, y)) : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$, różnych od $u = 0$ i $v = 0$, nie przekracza liczby gałęzi krzywej $f = 0$, liczonych bez uwzględnienia krotności.

Podsumowanie

Uważam, że do najważniejszych wyników osiągnięcia naukowego pod tytułem **Jakobianowy diagram Newtona i osobliwości krzywych** należą:

Odkrycie i dowód Twierdzenia 2.1 z [20] mówiącego w skrócie, że jeśli szeregi potęgowe $f, g \in \mathbf{C}\{x, y\}$ wyznaczają jednakowe jakobianowe diagramy Newtona i f jest nierozkładalny, to g też jest nierozkładalny. Mój wkład w tę część osiągnięcia naukowego oceniam na 70%.

Opracowanie nowych kryteriów nierozkładalności krzywych analitycznych, wykorzystujących jakobianowy diagram Newtona. Są to Wnioski 8.6 i 9.9 z [20] podające geometryczną charakteryzację jakobianowego diagramu Newtona krzywej nierozkładalnej oraz Twierdzenie 3.1 z [21] które przy użyciu arytmetycznych formuł z Twierdzenia 2.3 z [21] pozwala dodatkowo wyznaczyć kompletny układ niezmienników topologicznych krzywej nierozkładalnej. Mój wkład w tę część osiągnięcia naukowego oceniam na 50%.

Efektywne kryteria: nierozkładalności dla wielomianu wyróżnionego (Wniosek 3.6 z [21]), lokalnej analitycznej nierozkładalności krzywej afinicznej bez składowych wielokrotnych (Twierdzenie 3.7 z [21]), nierozkładalności w nieskończoności krzywej rzutowej o jednym punkcie w nieskończoności (Twierdzenie 5.1 z [21]). Stosując te kryteria wystarczy obliczyć zwykły wyróżnik pewnego wielomianu jednej zmiennej a następnie zbadać diagram Newtona tego wyróżnika. Mój wkład w tę część osiągnięcia naukowego oceniam na 50%.

Rozwiązanie, przez długi czas otwartego problemu, czy diagram Newtona wyróżnika odwzorowania $(f, g) : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ jest niezmiennikiem ekwisingularności pary krzywych $f = 0$, $g = 0$. Pozytywną odpowiedź daje Twierdzenie 3.1 z [22]. Krótki dowód opiera się na interpretacji funkcji podpierającej diagramu Newtona jako krotności przecięcia krzywych analitycznych oraz na formule Casasa Alvero będącej lokalną wersją znanej formuły Hurwitza dla charakterystyk Eulera powierzchni Riemanna.

Odkrycie oszacowania na liczbę wartości specjalnych pęku krzywych analitycznych $f(x, y) - ty^N = 0$ poprzez liczbę gałęzi krzywej $f = 0$. Jest to Twierdzenie 1.1 z [23]. Wynika z niego analogiczne oszacowanie na liczbę wartości krytycznych w nieskończoności odwzorowania wielomianowego $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ (Twierdzenie 2.1 z [23]). Dotychczas jedynym znanym rezultatem tego typu było twierdzenie Moha, którego równoważne sformułowanie stwierdza, że jeśli krzywa $f(x,y)=0$ ma tylko jedną gałąź w nieskończoności, to odwzorowanie wielomianowe $f:\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}$ nie posiada wartości krytycznych w nieskończoności.

Podanie w artykule [24] formuł dla jakobianowych diagramów Newtona odwzorowań $(f_i,f):(\mathbf{C}^2,0)\to(\mathbf{C}^2,0)$, gdzie f jest nierozkładalnym wielomianem wyróżnionym a f_i jest jego charakterystycznym pierwiastkiem aproksymatywnym. Uzyskane wzory uogólniają znane formuły Merle'a dla niezmienników polarnych krzywej nierozkładalnej. Mój wkład w tę część osiągnięcia naukowego oceniam na 50%.

5. Omówienie dorobku nie wchodzącego w skład osiągnięcia naukowego

Prace [1]–[19] wymienione w *Spisie publikacji* (Załącznik nr. 4) są uporządkowane według daty publikacji. Pozycje [1]-[4] zostały opublikowane przed doktoratem. Artykuł **[6]** zawiera wyniki rozprawy doktorskiej. Wyniki prac [1]-[19] dotyczą następujących zagadnień:

(A) Wykładnik Łojasiewicza: [3], [5], **[6]**, [14], [15].

(B) Odwzorowania wielomianowe płaszczyzny (problem Kellera, rzeczywista hipoteza jakobianowa, wartości krytyczne w nieskończoności, indeks topologiczny): [2], [4], [8]–[10], [12], [13], [17].

(C) Niezmienniki osobliwości krzywych: [1], [11], [16], [18], [19].

(D) Struktury o-minimalne: [7].

Omówimy je w zaproponowanej powyżej kolejności. Publikacje innych autorów w których są cytowane prace [1]-[19] zaznaczono w tekście na zielono.

(A) Wykładnik Łojasiewicza

Załóżmy, że f, g są ciągłymi funkcjami subanalitycznymi określonymi w otoczeniu zera w $\mathbf{R}^n$. Jeśli $f^{-1}(0)\subset g^{-1}(0)$ to istnieją takie $c>0$ oraz $\alpha>0$, że

$$|f(x)|\geq c|g(x)|^{\alpha} \quad \text{dla } x \text{ bliskich zeru.} \tag{1}$$

Dowodzi się [BierM1988], że w nierówności (1) można dobrać najmniejszy wykładnik α będący liczbą wymierną. Nazywamy go *wykładnikiem Łojasiewicza* na cześć Stanisława Łojasiewicza, który w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku badał tego typu nierówności w związku z problemem dzielenia dystrybucji. Stanisław Łojasiewicz zapoczątkował również teorię zbiorów semianalitycznych i subanalitycznych. Jest ona obecnie podstawowym narzędziem przy wyznaczaniu optymalnego wykładnika w nierówności (1). Omówimy teraz publikacje dotyczące tej problematyki.

Artykuł **[3]** bada szczególny przypadek nierówności Łojasiewicza dla gradientu [Łoj1965], [Łoj1984]. Niech $H(z_1, \ldots, z_n)$ będzie jednorodnym wielomianem zespolonym stopnia d. Połóżmy $z = (z_1 \ldots, z_n)$ i rozpatrzmy nierówność

$$|\mathrm{grad}\, H(z)| \geq c|H(z)|^\theta \quad \text{dla } z \text{ bliskich zeru.} \tag{2}$$

Jeśli θ_0 jest wykładnikiem Łojasiewicza w (2) to $(d-1)/d \leq \theta_0 < 1$. Oszacowanie z dołu jest łatwe do sprawdzenia. Oszacowanie z góry jest wnioskiem z dobrze znanej nierówności Łojasiewicza dla gradientu [Łoj1965].

Główne twierdzenie [3] stwierdza, że $\theta_0 = (d-1)/d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H(z)$ należy do całkowitego domknięcia pierścienia $\mathbf{C}\left[\frac{\partial H}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial z_n}\right]$.

Podano również przykład wielomianu jednorodnego, dla którego ten wykładnik jest większy od $(d-1)/d$.

Publikacja **[5]** analizuje wzrost funkcji wielomianowej w pobliżu nieskończoności. Jej główny wynik to

Twierdzenie: Niech $f(x_1, \ldots, x_n)$ będzie wielomianem rzeczywistym stopnia $d > 2$ o zwartym zbiorze zer. Wówczas istnieją takie stałe $c > 0$, $M > 0$, że

$$|f(x)| \geq c|x|^{d-(d-1)^n} \quad \text{dla } |x| > M.$$

Publikacja [5] jest cytowana w [Biv2007], [Jan2002], [Kollár1999], [Kra2007] i [VuiSon2008]. Artykuł [JohKol2011] zawiera pomysłowy dowód, jak z oszacowania lokalnego zawartego w [6] wynika oszacowanie w pobliżu nieskończoności dla wielomianu dwóch zmiennych.

Artykuł **[6]** prezentuje wyniki rozprawy doktorskiej. Załóżmy, że funkcja analityczna f określona w otoczeniu $0 \in \mathbf{R}^n$ ma minimum lokalne $f(0) = 0$. Rozważmy nierówności: $|f(x)| \geq c|x|^\alpha$, $|\mathrm{grad}\, f(x)| \geq c|x|^\beta$, $|\mathrm{grad}\, f(x)| \geq c|f(x)|^\theta$ dla x bliskich zeru.

W [6] udowodniono, że jeśli α_0, β_0, θ_0 są wykładnikami Łojasiewicza w powyższych nierównościach to $\alpha_0 = \beta_0 + 1$ oraz $\theta_0 = \beta_0/\alpha_0$. Zatem znając dowolny z tych wykładników można obliczyć dwa pozostałe.

Równość $\theta_0 = \beta_0/(\beta_0+1)$ w sytuacji zespolonej była znana wcześniej [Te1977]. Jednak dowód Teissiera nie przenosi się na sytuację rzeczywistą, gdzie trzeba stosować inne metody.

Często cytowanym ([JohKol2011], [Kollár1999], [Koz2010a], [Koz2010b]) wynikiem [6] jest następujące oszacowanie

Twierdzenie: Niech $f(x_1, \ldots, x_n)$ będzie rzeczywistym wielomianem stopnia d, mającym minimum lokalne $f(0) = 0$. Wówczas istnieją takie stałe $c > 0$, $\epsilon > 0$, że

$$f(x) \geq c|x|^{(d-1)^n+1} \quad \text{dla } |x| < \epsilon.$$

Omawianą publikację cytują również: [AcKu2005], [Biv2003], [Li2010], [Nied2006], [Pham2012]. Niedawno Tiên Son [Son2011] uogólnił wyniki [6] na przypadek ciągłej funkcji subanalitycznej o zerze izolowanym.

W publikacji **[14]** wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności gradientu wielomianu zespolonego $f(x, y)$ jest badany z punktu widzenia lokalnej teorii krzywych analitycznych. Płaszczyzna zespolona $\mathbf{C}^2$ zanurza się w płaszczyznę rzutową $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{L}_\infty$, gdzie $\mathbf{L}_\infty$ jest prostą w nieskończoności. Dla dowolnej pary $(p, t) \in \mathbf{L}_\infty \times \mathbf{C}$ takiej, że domknięcie rzutowe krzywej $f(x, y) = t$ przechodzi przez punkt p, rozpatruje się oszacowanie

$$|\mathrm{grad}\, f(x, y)| \geq c|(x, y)|^\theta \quad \text{dla } (x, y) \to p,\ f(x, y) \to t.$$

Niech $\theta_{p,t}$ będzie optymalnym (największym) wykładnikiem w tym oszacowaniu. Głównym wynikiem [14] jest Twierdzenie 1.2 wyrażające wykładnik Łojasiewicza $\theta_{p,t}$ poprzez lokalne niezmienniki analityczne kiełka domknięcia rzutowego krzywej $f(x, y) = t$ w punkcie p. Wnioskami z tych formuł są: *jeśli* $\theta_{p,t} < 0$ *to* $\theta_{p,t} < -1$ [Vui1990], [Dur1998] oraz *jeśli* $\theta_{p,t} = 0$*, to wielomian* $f(x, y)$ *ma postać* $H(ax + by)$*, gdzie* $H(T)$ *jest wielomianem jednej zmiennej* (zobacz również ([KuoP2000], [ChK2003]). Wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności rozpatrywany z tego punktu widzenia jest również tematem artykułów [Kra2007] i [RoSp2011].

Artykuł **[15]** również analizuje wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności gradientu wielomianu zespolonego $f(z_1, \ldots, z_n)$. Ustalmy $t \in \mathbf{C}$, oznaczmy $z = (z_1, \ldots, z_n)$ i rozpatrzmy oszacowanie

$$|\mathrm{grad}\, f(z)| \geq c|z|^\theta \quad \text{dla } |z| > M,\ |f(z) - t| < \varepsilon$$

z małymi dodatnimi stałymi c, ε i dużą dodatnią stałą M.

Niech θ_0 będzie optymalnym (największym) wykładnikiem w powyższym oszacowaniu. Główny wynik [15] stwierdza, że dla wielomianu $f(z_1, z_2)$ stopnia $d > 2$ zachodzi równoważność: $\theta_0 < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta_0 \leq -1 - 1/(d-2)$. Jako wniosek otrzymuje się równoważność warunków Malgrange'a i Fedoryuka dla wielomianów dwóch zmiennych (zob. [14], [Vui1990], [Dur1998]).

Innym wynikiem [15] jest uogólniona nierówność Bochnaka–Łojasiewicza (zobacz [BoŁo1971]): istnieją stałe C, $\varepsilon > 0$ przy których jeśli $|f(z)| \leq \varepsilon$ to $|z|\,|\mathrm{grad}\, f(z)| \geq C|f(z)|$.

Tematy poruszone w [15] były kontynuowane w [Kra2007], [Os2011], [RoSp2009], [RoSp2011], [Ska2004].

(B) Odwzorowania wielomianowe płaszczyzny

W artykule **[2]** udowodniono następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE: Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero i niech $H : k^2 \to k^2$ będzie odwzorowaniem wielomianowym o stałym, niezerowym jakobianie. Jeśli odwzorowanie H jest różnowartościowe na pewnej prostej afinicznej $l \subset k^2$, to H jest automorfizmem wielomianowym.

Praca [2] jest cytowana w: [Cam1996], [CamE1995], [Cass2009], [CheWa1995], [Dru1995], [MiShYu2004], [ShYu2000], [Van2003], [Van2006], [van1995], [van2004].

Teoria pierwiastków aproksymatywnych wielomianów o współczynnikach w ciele funkcji meromorficznych została rozwinięta przez S. S. Abhyankara i T. T. Moha w fundamentalnej pracy [AbhM1973]. Później użyli jej oni w dowodzie twierdzenia o wielomianowym zanurzeniu prostej w płaszczyznę [AbhM1975]. W artykule **[4]** zaproponowano uproszczone podejście do tej teorii, ograniczając rozważania do wielomianów wyróżnionych z pierścienia $\mathbf{C}\{x\}[y]$ poprzez odpowiednią zmianę zmiennych. Dowód główngo twierdzenia teorii pierwiastków aproksymatywnych w omawianym artykule opiera się na własnościach półgrupy kiełka nierozkładalnej krzywej analitycznej i zastosowaniu klasycznej transformacji Tschirnhausena. Nie używa się deformacji szeregów potęgowych stosowanych w klasycznym podejściu Abhyankara i Moha. Publikacja [4] jest cytowana w [GarKP2005], [CossM2005], [Gon2003], [Gon2010], [Pł2001], [Pł2002], [Pop2003].

Siergiej Pinchuk [Pin1994] podał przykład odwzorowania wielomianowego $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ o dodatnim jakobianie które nie jest globalnym dyffeomorfizmem. Był to pierwszy kontrprzykład na tak zwaną rzeczywistą hipotezę jakobianową. W publikacji **[8]** wyznacza się zbiór punktów niewłaściwości (zob. [Jel2000]) odwzorowania Pinchuka. Pozwala to podzielić obraz odwzorowania F na obszary o stałej krotności włókien. W szczególności dwa punkty płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ leżą poza obrazem. Analogiczną charakteryzację odwzorowania Pinchuka podał L. A. Campbell w [Cam1998], jednak w oparciu o fałszywe twierdzenie z [Per1996]. Artykuł [8] cytują [Cam2011] oraz [Jel2002].

W artykule **[9]** dowodzi się że każde odwzorowanie wielomianowe $(f, g) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ o dodatnim jakobianie którego składowe mają stopień mniejszy lub równy 3 jest globalnym dyffeomorfizmem. Kluczowy fragment dowodu opiera się na twierdzeniu Kusznirenki [Kou1976] dzięki któremu można stwierdzić, że wielomiany stopnia 3 o pewnych diagramach Newtona mają rzeczywiste punkty krytyczne a więc nie mogą być składowymi odwzorowania o dodatnim jakobianie. Ciekawym uogólnieniem [9] jest artykuł [BraFil2010], którego autorzy posługując się klasyfikacją wielomianowych pól wektorowych stopnia 2 dowodzą, że wystarczy aby tylko jeden z wielomianów f lub g miał stopień mniejszy lub równy 3.

Publikacja **[10]** zbiera razem stare i nowe formuły dotyczące osobliwości w nieskończoności wielomianów $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ o izolowanych punktach krytycznych. Jej intencją jest uzupełnienie zestawu formuł przedstawionego przez Phama w dodatku do jego artykułu [Pham1973]. Formuły te wiążą niezmienniki (lokalne i globalne) wielomianu f i jego włókien $f^{-1}(t)$.

Artykuł zawiera, między innymi, następujące nowe oszacowanie na liczbę wartości krytycznych w nieskończoności wielomianu f:

$$\#\Lambda(f) \leq \frac{(d-1)^2 - \mu(f) - \lambda(f)}{d},$$

gdzie d jest stopniem f, $\mu(f)$ jest globalną liczbą Milnora oraz $\lambda(f)$ jest sumą "skoków" liczb Milnora w punktach w nieskończoności. Nowe są też oszacowania na wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności gradientu. Publikację [10] cytują artykuły [Bar2003], [ChK2003], [LenM2009], [Mas2010] i książka [Rud2005].

Przypomnijmy, że $t \in \mathbf{C}$ nazywamy *wartością krytyczną w nieskończoności* wielomianu $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$, gdy istnieje taki ciąg punktów $z_n \in \mathbf{C}^2$, że $|z_n| \to \infty$, $|\operatorname{grad} f(z_n)| \to 0$ oraz $f(z_n) \to t$ dla $n \to \infty$. Inne równoważne definicje są podane w [Dur1998].

Główne twierdzenie **[12]** charakteryzuje wielomiany zespolone dwóch zmiennych bez punktów krytycznych i z jedną wartością krytyczną w nieskończoności.

Jeśli t_0 jest jedyną wartością krytyczną w nieskończoności wielomianu $f(x, y)$ bez punktów krytycznych to zachodzi alternatywa:

albo $f^{-1}(t_0)$ rozkłada się na $l > 1$ krzywych afinicznych, z których jedna jest izomorficzna z prostą, a pozostałe są wymierne z dwiema gałęziami w nieskończoności,

albo $f^{-1}(t_0)$ rozkłada się na $l > 2$ krzywych afinicznych, z których $l - 1$ jest izomorficznych z prostą, a jedna jest wymierna z l gałęziami w nieskończoności.

Twierdzenie to zostało uogólnione w [Bod2002]. Innymi publikacjami, które cytują [12], są [LenM2009] oraz [Rud2005].

W notce **[13]** zdefiniowano wielomian $f(x, y) = (A^2(x)y - x)^2 + B(x)$, gdzie $A(x) = x^k - 1$ oraz $B(x) = x^{k+1}/(k + 1) - x$.

Pokazano, że wielomian $f(x, y)$ nie nie ma punktów krytycznych w $\mathbf{C}^2$ i posiada $2k$ wartości krytycznych w nieskończoności. Podany przykład przybliża odpowiedź na pytanie jak wiele wartości krytycznych w nieskończoności może mieć wielomian ustalonego stopnia bez punktów krytycznych.

Niech $f(x, y)$ bedzie wielomianem rzeczywistym o skończonej liczbie punktów krytycznych i niech $r_\infty(t)$ oznacza liczbę gałęzi w nieskończoności poziomicy $f(x, y) = t$. W **[17]** dowodzi się twierdzenia M. Sękalskiego [Sęk2005], wyrażającego indeks topologiczny w nieskończoności odwzorowania $\operatorname{grad} f$ poprzez funkcję $t \to r_\infty(t)$. Krótki topologiczny dowód wykorzystuje tak zwane całkowanie względem charakterystyki Eulera [Viro1989], a twierdzenie Sękalskiego w sformułowaniu całkowym stwierdza, że

$$i_\infty(\operatorname{grad} f) = 1 + \int_{\mathbf{R}} r_\infty(t)\, d\chi.$$

(C) Niezmienniki osobliwości krzywych

Publikacje [1], [11], [18] dotyczą krzywych polarnych i niezmienników polarnych. Rozpoczniemy od przypomnienia tych pojęć.

Symbolem $\mathbf{C}\{x, y\}$ oznaczamy pierścień szeregów potęgowych zmiennych zespolonych x, y o dodatnim promieniu zbieżności. Szereg $f(x, y) \in \mathbf{C}\{x, y\}$

nazywamy *regularnym*, gdy $f(x,y) = ax + by +$ *wyrazy wyższych rzędów*, gdzie $ax + by \neq 0$, a *osobliwym*, gdy rozpoczyna się od wyrazów rzędu wyższego niż 1. Niech $l(x,y)$, $f(x,y) \in \mathbf{C}\{x,y\}$ będą odpowiednio szeregiem regularnym i szeregiem osobliwym oraz niech $J(x,y) = \frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial l}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$. Lokalną krzywą analityczną $J(x,y) = 0$ nazywamy *krzywą polarną krzywej* $f(x,y) = 0$ *względem krzywej gładkiej* $l(x,y) = 0$.

Jeśli $J(x,y) = h_1 \cdots h_n$ jest rozkładem $J(x,y)$ na iloczyn czynników nierozkładalnych w $\mathbf{C}\{x,y\}$, to liczby $q_j = \frac{i_0(f,h_j)}{i_0(l,h_j)}$ dla $j = 1,\dots,n$ nazywamy *ilorazami polarnymi* lub *niezmiennikami polarnymi* (symbol $i_0(\phi,\psi)$ oznacza krotność przecięcia krzywych $\phi(x,y) = 0$, $\psi(x,y) = 0$ w zerze). Jeśli q jest ustalonym ilorazem polarnym, to sumę $\sum i_0(l,h_j)$ przebiegającą po indeksach j dla których $q_j = q$ nazywamy jego krotnością.

Więcej informacji o krzywych i niezmiennikach polarnych wraz z obszerną bibliografią można znaleźć w przeglądowym artykule [18].

W artykule **[1]** podano dowód formuł Merle'a [Mer1977] dla niezmienników polarnych i ich krotności dla nierozkładalnej krzywej osobliwej $f(x,y) = 0$ względem krzywej $x = 0$. Dowód jest oparty na lemacie Kuo i Lu [KuoL1977], wypowiedzianym i udowodnionym w przypadku dowolnym, (dopuszcza się możliwość, że prosta $x = 0$ jest styczną krzywej $f(x,y) = 0$). Artykuł [1] jest cytowany w [Cass2009] i [Len2004].

W artykule **[11]** wyprowadzono wzory na ilorazy polarne krzywej rozkładalnej $f = 0$ bez składowych wielokrotnych względem krzywej gładkiej $l = 0$. Wzory są wypowiedziane w terminach niezmienników ekwisingularności pary krzywych $f = 0$, $l = 0$, co dowodzi, że zbiór ilorazów polarnych jest niezmiennikiem ekwisingularności tej pary. Ten fakt w przypadku transwersalnym dowodzono w [Egg1982], [KuoL1977], [Te1977]. Artykuł [11] jest cytowany w [Gar2000], [Len2004], [Len2008], [Mel2011] oraz [Pł2001].

Notka **[16]** podaje rozwiązanie jednego z zadań ze zbioru problemów [Arn2004] z seminariów Arnolda w Moskwie i Paryżu. Oto ono:

> **1982–16** Rozważmy wielościan Newtona Δ w $\mathbf{R}^n$ i liczbę $\mu(\Delta) = n!\,V - \sum(n-1)!\,V_i + \sum(n-2)!\,V_{ij} - \cdots$, gdzie V jest objętością obszaru pod Δ, V_i jest objętością obszaru pod Δ na hiperpowierzchni $x_i = 0$, V_{ij} jest objętością obszaru pod Δ na hiperpowierzchni $x_i = x_j = 0$, i tak dalej.
>
> Wówczas $\mu(\Delta)$ rośnie (niekoniecznie silnie) wzraz ze wzrostem Δ (o ile Δ pozostaje wypukły i całkowitoliczbowy?). Nie ma elementarnego dowodu nawet dla $n = 2$.

Rozwiązanie jest oparte o twierdzenie Kusznirenki [Kou1976] i półciągłość liczby Milnora.

Artykuł **[18]** jest przeglądem wyników dotyczących krzywych i niezmienników polarnych. Są w nim przytoczone nowe rezultaty autorów z tej tematyki.

Niech C będzie kiełkiem krzywej analitycznej w punkcie $0 \in \mathbf{C}^2$ oraz niech $\pi : M \to (\mathbf{C}^2, 0)$ będzie lokalną modyfikacją toryczną. W **[19]** podano wzór wiążący niezmiennik $\delta_0(C)$, zwany klasycznie liczbą punktów podwójnych krzywej C ukrytych w zerze, z sumą $\sum \delta_P(\tilde{C})$ rozciągniętą na punkty przecięcia przeciwobrazu właściwego $\tilde{C}$ krzywej C z dywizorem wyjątkowym $\pi^{-1}(0)$. Podano też analogiczne wzory na liczbę Milnora $\mu_0(C)$ oraz na krotność przecięcia $(C, D)_0$ krzywych analitycznych. Te wyniki, w przypadku, gdy π jest modyfikacją toryczną o dostatecznie subtelnym wachlarzu, uogólniają twierdzenia Kusznirenki [Kou1976] i Bernsztajna [Ber1975] a w przypadku, gdy π jest rozdmuchaniem, klasyczną formułę Noethera (zob. [BriK1986]). Preprint artykułu [19] jest cytowany w [Gon2010].

(D) Struktury o-minimalne

W artykule **[7]** dowodzi się że każdy wielomian $P(x, y)$ stopnia d ma co najwyżej $2(d+2)^{12}$ miejsc zerowych na krzywej $y = e^x + \sin x$, $x > 0$. Wynika stąd, że podobne oszacowanie zachodzi na globalnej krzywej analitycznej $y = e^{x^2} + \sin x^2$, nie należącej do żadnej struktury o-minimalnej. Artykuł jest cytowany w [Pila2006] oraz w [Pila2007].

5. Informacje o autorze

Dane osobowe:

- Imię i nazwisko: Janusz Gwoździewicz
- Data urodzenia: 17 maja 1963
- Adres: al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 19/35, 25–314 Kielce
- E-mail: matjg@tu.kielce.pl

Wykształcenie:

1987 magister matematyki: Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, promotor: profesor Tadeusz Winiarski

1996 doktor nauk matematycznych: Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, *Wykładnik Łojasiewicza funkcji analitycznej o zerze izolowanym*, promotor: profesor Arkadiusz Płoski

Przebieg pracy zawodowej:

1987–obecnie Katedra Matematyki Politechniki Świętokrzyskiej: 1986 asystent, od 1987 adiunkt, od 2011 starszy wykładowca

Działalność naukowo–badawcza:

- 24 publikacje w czasopismach recenzowanych, suma indeksów impact factor z roku publikacji: 4.664, indeks Hirscha: 6
- udział w 15 konferencjach międzynarodowych, referaty na 7 z nich, sesje plakatowe na 3
- recenzje dla: Annales Polonici Mathematici, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Mathematische Zeitschrift
- artykuły w materiałach corocznej Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej organizowanej przez Uniwersytet Łódzki; ich lista jest w *Spisie publikacji* (Załącznik nr. 4)
- referaty na seminarium Gdańsko–Krakowsko–Warszawskim z teorii osobliwości

Udział w szkołach naukowych:

2004 Winter School and Conference on Real Algebraic and Analytic Geometry and Motivic Integration, Aussois (Francja)

2006 Summer School on Resolution of Singularities, Triest (Włochy)

Doświadczenia zawodowe:

krótkie (do 2 tygodni) wyjazdy naukowe: Université de Nice Sophia–Antipolis (2 razy), Universidad de La Laguna (3 razy), Université de Savoie

1994 staż doktorancki na Wydziale Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

1997 4 miesięczna wizyta w Instytucie Fieldsa w Toronto

1998 roczny post–doc na Vrije Universiteit, Amsterdam

Granty:

1995–1997 grant KBN 8P03A07908, kierownik grantu: A. Płoski

1999–2001 grant KBN 2P03A02215, kierownik grantu: P. Tworzewski

1998–2000 projekt Polonium, koordynatorzy: P. Cassou-Noguès (Francja), A. Płoski (Polska)

2002–2004 grant KBN 2P03A01522, kierownik grantu: P. Tworzewski

Doświadczenie dydaktyczne:

- wykłady i ćwiczenia z algebry liniowej, analizy matematycznej, logiki, równań różniczkowych i metod numerycznych
- opieka naukowa nad uczestnikami olimpiad matematycznych (dwóch finalistów)

Nagrody:

Wyróżnienie w Konkursie im. G. Białkowskiego – 1998 r. na najlepszą pracę doktorską w dziedzinie astronomii, matematyki i informatyki

Dodatek 1 – Ekwisingularność krzywych płaskich

Dla dowolnych $f, g \in \mathbf{C}\{x,y\}$ określamy *krotność przecięcia* $i_0(f,g)$ jako wymiar zespolonej przestrzeni wektorowej $\frac{\mathbf{C}\{x,y\}}{(f,g)\mathbf{C}\{x,y\}}$.

Półgrupa krzywej nierozkładalnej $f=0$ jest to zbiór

$$\Gamma(f) = \{i_0(f,g) : g \in \mathbf{C}\{x,y\},\ f \text{ nie dzieli } g\}.$$

Jest to półgrupa ze względu na dodawanie (bo $i_0(f,gh) = i_0(f,g) + i_0(f,h)$).

DEFINICJA: Krzywe $f=0$, $\tilde{f}=0$ nazywamy *eksiwingularnymi*, gdy istnieją takie rozkłady $f = h_1 \cdots h_s$, $\tilde{f} = \tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_{\tilde{s}}$ na iloczyn czynników nierozkładalnych w $\mathbf{C}\{x,y\}$, że

- $s = \tilde{s}$,
- $\Gamma(h_i) = \Gamma(\tilde{h}_i)$ dla $i = 1, \ldots, s$,
- $i_0(h_i, h_j) = i_0(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)$ dla $1 \le i < j \le s$.

DEFINICJA: Pary krzywych $f=0$, $g=0$ oraz $\tilde{f}=0$, $\tilde{g}=0$ nazywamy *ekwisingularnymi*, gdy istnieją takie rozkłady $f = h_1 \cdots h_s$, $g = h_{s+1} \cdots h_r$, $\tilde{f} = \tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_{\tilde{s}}$, $\tilde{g} = \tilde{h}_{\tilde{s}+1} \cdots \tilde{h}_{\tilde{r}}$, na iloczyn czynników nierozkładalnych w $\mathbf{C}\{x,y\}$, że

- $s = \tilde{s}$, $r = \tilde{r}$,
- $\Gamma(h_i) = \Gamma(\tilde{h}_i)$ dla $i = 1, \ldots, r$,
- $i_0(h_i, h_j) = i_0(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j)$ dla $1 \le i < j \le r$.

Dodatek 2 – Obraz prosty krzywej

Niech $\phi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ będzie kiełkiem odwzorowania holomorficznego takiego, że $\phi^{-1}(0,0) = \{(0,0)\}$. Dla dowolnej lokalnej krzywej analitycznej $h=0$ określamy *obraz prosty* $\phi_*(h=0)$. Definicja jest dwuetapowa:

(i) jeśli $h=0$ jest gałezią o parametryzacji analitycznej $t \to \lambda(t)$ to jej obraz prosty jest krzywą $g^n = 0$, gdzie $g=0$ jest gałęzią będącą teoriomnogościowo obrazem gałęzi $h=0$ poprzez odwzorowanie ϕ oraz n jest największą liczbą naturalną taką, że $\phi(\lambda(t))$ można przedstawić jako złożenie $\psi(t^n)$, w którym ψ jest kiełkiem odwzorowania analitycznego w zerze,

(ii) jeśli $h = h_1 \cdots h_s$ jest rozkładem szeregu h na iloczyn czynników nierozkładalnych w $\mathbf{C}\{x,y\}$, to obraz prosty $\phi_*(h=0)$ jest krzywą $H_1 \cdots H_s = 0$, gdzie krzywe $H_i = 0$ są obrazami prostymi gałęzi $h_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, s$.

Bibliografia

[Abh1989] S.S. Abhyankar, *Irreducibility Criterion for Germs of Analytic Functions of Two Complex Variables*, Adv. in Math., 74, 190–257.

[AbhM1973] S.S. Abhyankar, T. Moh, *Newton-Puiseux Expansions and Generalized Tschirnhausen Transformation*, J. Reine Angew. Math., 260, 47–83; 261, 29–54.

[AbhM1975] ———, *Embeddings of line in the plane*, J. Reine Angew. Math., 276, 148–166.

[AcKu2005] D. D Acunto, K. Kurdyka, *Explicit bounds for the Łojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials*, Ann. Polon. Math., 87.

[Arn2004] V.I. Arnold, Arnold's Problems, Springer, 2004.

[Bar2003] E.A. Bartolo, *Quotients Jacobiens*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 53 (2), 399–428.

[Ber1975] D.N. Bernshtein, *The number of roots of a system of equations*, Funktsionalnyi Analiz i Ego Prilozheniya, 9 (3), 183–185.

[BierM1988] E. Bierstone, P.D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Publ. Math. I.H.E.S., 67, 5–42.

[Biv2003] C. Bivià-Ausina, *Łojasiewicz exponents, the integral closure of ideals and Newton polyhedra*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (3), 655–668.

[Biv2007] ———, *Injectivity of real polynomial maps and Łojasiewicz exponents at infinity*, Mathematische Zeitschrift, 257 (4), 745–767.

[Bod2002] A. Bodin, *Classification of polynomials from $\mathbf{C}^2$ to $\mathbf{C}$ with one critical value*, Mathematische Zeitschrift, 242 (2), 303–322.

[BraFil2010] F. Braun, J.R. dos Santos Filho, *The real Jacobian conjecture on $\mathbf{R}^2$ is true when one of the components has degree 3*, Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A, 26, 75–87.

[BriK1986] E. Brieskorn, H. Knörrer, Plane algebraic curves, Birkhäuser, Boston 1986.

[BoŁo1971] J. Bochnak, S. Łojasiewicz, *A converse of the Kuiper–Kuo theorem*, in Proc. Liverpool Singularities Symposium I (1969/70), Lecture Notes in Math., 192, Springer, Berlin 1971, 254–261.

[Cam1996] L.A. Campbell, *Partial properness and the Jacobian conjecture*, Applied Mathematics Letters, 9 (2), 5–10.

[Cam1998] ———, *Picturing Pinchuk's Plane Polynomial Pair*, Arxiv preprint math.AG/9812032.

[Cam2011] ———, *The asymptotic variety of a Pinchuk map as a polynomial curve*, Applied Mathematics Letters, 24 (1), 62–65.

[CamE1995] L.A. Campbell, A. van den Essen, *Jacobian pairs, D-resultants, and automorphisms of the plane*, Journal of Pure and Applied Algebra, 104 (1), 9–18.

[Cas2000] E. Casas-Alvero, Singularities of Plane Curves, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 276, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[Cas2003] ———, *Discriminant of a morphism and inverse images of plane curve singularities*, in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 135, 385–394, Cambridge Univ Press.

[Cas2007] ———, *Jacobian quotients, an algebraic proof*, Journal of Pure and Applied Algebra, 208 (3), 1055–1062.

[Cass2009] P. Cassou-Noguès, M. Miyanishi, *Smoothness of the images of members of a linear system under an endomorphism of the affine plane*, Journal of Pure and Applied Algebra, 213 (5), 711–723.

[ChK2003] J. Chądzyński, T. Krasiński *The gradient of a polynomial at infinity*, Kodai Math. J., 26, 317–339.

[CheWa1995] C. Cheng, S. Wang, *An algorithm that determines whether a polynomial map is bijective*, Automorphisms of Affine Spaces, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 169–176.

[CossM2005] V. Cossart, G. Moreno-Socías *Racines approchées, suites génératrices, suffisance des jets*, Ann. Fac. Sci. Tolouse Math., 14 (3), 353–394.

[Del1991] F. Delgado de la Mata, *An arithmetical factorization for the critical point set of some map germs from* $\mathbf{C}^2$ *to* $\mathbf{C}^2$, Singularities (Lille 1991), 61–100. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 201, 1994.

[Del1994] ———, *A factorization theorem for the polar of a curve with two branches*, Compositio Math., 92, 327–375.

[Dru1995] L.M. Drużkowski, Automorphisms of affine spaces: proceedings of a conference held in Curaçao (Netherlands Antilles), July 4-8, 1994, Springer 1995.

[Dur1998] A.H. Durfee, *Five Definitions of Critical Points at Infinity*, Singularities: The Brieskorn anniversary volume, Progr. Math., 162, 345–360.

[Egg1982] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*, Bonner Math. Schriften, 147, Universität Bonn, Bonn 1982.

[Eph1983] R. Ephraim, *Special polars and curves with one place at infinity* (P. Orlik ed.), Proc. of Symp. in Pure Math., 40 Part 1, AMS, Providence, 1983, 353–359.

[Gar2000] E. García Barroso, *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite*, Proc. London Math. Soc., 81 (3), 1–28.

[GarKP2005] E. R. García Barroso, T. Krasiński, A. Płoski, *The Łojasiewicz numbers and plane curve singularities*, Ann. Polon. Math., 87, 127–150.

[GarP2004] E. R. García Barroso, A. Płoski, *Pinceaux de courbes planes et invariants polaires*, Ann. Polon. Math., 82 (2), 113–128.

[Gon2003] P.D. González Pérez, *The semigroup of a quasi–ordinary hypersurface*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 2 (03), 383–399.

[Gon2010] ———, *Approximate roots, toric resolutions and deformations of a plane branch*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 62 (3), 975–1004.

[Jan2002] P. Jankowski, *The Łojasiewicz exponent at infinity of a polynomial of two real variables*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 50 (1), 25–31.

[Jel2000] Z. Jelonek, *A geometry of polynomial transformations of the real plane*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 48 (1), 57–62.

[Jel2002] ———, *Geometry of real polynomial mappings*, Mathematische Zeitschrift, 239 (2), 321–333.

[JelK2003] Z. Jelonek, K. Kurdyka, *On asymptotic critical values of a complex polynomial*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 565, 1–11.

[JohKol2011] J.M. Johnson, J. Kollár, *How small can a polynomial be near infinity?* American Mathematical Monthly, 118 (1), 22–40.

[Kollár1999] J. Kollár, *An effective Łojasiewicz inequality for real polynomials*, Periodica Mathematica Hungarica, 38 (3), 213–221.

[Kou1976] A. G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombre de Milnor*, Invent. Math., 32, 1–31.

[Koz2010a] V. Kozyakin, *Polynomial reformulation of the Kuo criteria for v-sufficiency of map-germs*, Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B, 14 (2), 587–602.

[Koz2010b] ———, *Polynomial criteria for the v-sufficiency of jets in classes of finitely smooth mappings*, Doklady Mathematics, 81 (1), 101–104.

[Kra2007] T. Krasiński, *On the Łojasiewicz exponent at infinity of polynomial mappings*, Acta Math. Vietnam., 32, 2–3.

[KuoL1977] T-C. Kuo, Y. C. Lu, *On analytic function germ of two complex variables*, Topology, 16, 299–310.

[KuoP2000] T-C. Kuo, A. Parusiński, *Newton polygon relative to an arc*, in: Real and Complex Singularities (São Carlos 1998), J.W. Bruce and F. Tari (eds.), Chapman & Hall and CRC, 2000, 76–93.

[KuoP2004] ———, *Newton-Puiseux roots of Jacobian determinants*, Journal of Algebraic Geometry, 13 (3), 579–602.

[Lê1975] D. T. Lê, *Topological use of polar curves*, *Algebraic geometry*, Arcata 1974, Proc. Sym. Pure Math., 29, (AMS Providence) RI, 507–512.

[LêMW1989] D. T. Lê, F. Michel, C. Weber, *Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes*, Compositio Math., 72, 87–113.

[LêMW1991] ———, *Courbes polaires et topologie des courbes planes*, Ann. Sci. ENS, 24, 141–169.

[LêO1994] Lê Van Thành, M. Oka, *Note on estimation of the number of the critical values at infinity*, Kodai Math. J., 17, 409–419.

[LenP2000] A. Lenarcik and A. Płoski, *Polar invariants of plane curves and the Newton polygon*, Kodai Math. J., 23 (3), 309–319.

[LenMP2003] A. Lenarcik, M. Masternak, A. Płoski, *Factorization of the polar curve and the Newton polygon*, Kodai Math. J., 26 (3), 288–303.

[Len2004] A. Lenarcik, *Polar quotients of a plane curve and the Newton algorithm*, Kodai Math. J., 27 (3), 336–353.

[Len2008] ———, *On the jacobian Newton polygon of plane curve singularities*, Manuscripta Math., 125, 309–324.

[LenM2009] A. Lenarcik, M. Masternak, *Pencils of plane curves and the Newton polygon*, Univ. Iagell. Acta Math., 47, 283–296.

[Li2010] G. Li, *On the asymptotically well behaved functions and global error bound for convex polynomials*, SIAM Journal of Optimization, 20 (4), 1923–1943.

[Łoj1965] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi–analytiques*, I.H.E.S. preprint

[Łoj1984] ———, *Sur les trajectoires du gradient dune fonction analytique, Seminari di Geometria 1982–1983*, Università di Bologna, Istituto di Geometria, Dipartamento di Matematica, 115–117, 1984.

[Mas2010] M. Masternak, *Invariants of singularities of polynomials in two complex variables and the Newton diagrams*, Univ. Iagel. Acta. Math., 39, 179–188.

[Mau1998] H. Maugendre, *Discriminant d'un germe* $\Phi : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ *et résolution minimale de* $f \cdot g$, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 7 (3), 497–525.

[Mel2011] A. Melle Hernández, E. Artal Bartolo, P. Cassou-Noguès, I. Luengo Velasco, *v-Quasi-ordinary power series: Factorisation, Newton trees and resultants*, Contemporary Mathematics., 538, 321–343.

[Mer1977] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Invent. Math., 41, 103–111.

[Mich2008] F. Michel, *Jacobian curves for normal complex surfaces*, Contemporary Mathematics, 475, 135–149.

[MiShYu2004] A.A.Mikhalev, V. Shpilrain, J.T. Yu, Combinatorial methods: free groups, polynomials, and free algebras, 19, Springer Verlag 2004.

[Nied2006] L. Niederman, *Hamiltonian stability and subanalytic geometry*, Ann. Inst. Fourier, 56 (3), 795–813.

[Os2011] B. Osińska, *Extensions of regular mappings and the Łojasiewicz exponent at infinity*, Bulletin des sciences mathematiques, 135 (2), 215–229.

[Per1996] R. Peretz, *The variety of the asymptotic values of a real polynomial étale map*, Journal of Pure and Applied Algebra, 106 (1), 103–112.

[Pham1973] F. Pham, *Courbes discriminantes des singularités planes d'ordre 3*, Astèrisque, 7 et 8, 363–391.

[Pham2012] T.S. Pham, *An explicit bound for the Łojasiewicz exponent of real polynomials*, Kodai Math. J., 35 (2), 311–319.

[Pila2006] J. Pila, *Note on the rational points of a pfaff curve*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 49 (2), 391–397.

[Pila2007] J. Pila, *The density of rational points on a Pfaff curve*, Ann. Fac. Sci. Tolouse Math., 16 (3), 635–645.

[Pin1994] S. Pinchuk, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Mathematische Zeitschrift, 217 (1), 1–4.

[Pł2001] A. Płoski, *On the maximal polar quotient of an analytic plane curve*, Kodai Math. J., 24 (1), 120–133.

[Pł2002] ———, *Polar quotients and singularities at infinity of polynomials in two complex variables*, Ann. Polon. Math., 78 (1), 49–58.

[Pop2003] P. Popescu–Pampu, *Approximate roots*, Valuation theory and its applications, 2, 285–321.

[RoSp2009] T. Rodak, S. Spodzieja, *Effective formulas for the Łojasiewicz exponent at infinity*, Journal of Pure and Applied Algebra, 213 (9), 1816–1822.

[RoSp2011] ———, *Łojasiewicz exponent near the fibre of a mapping*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (4), 1201–1213.

[Rud2005] L. Rudolph, *Knot theory of complex plane curves*, Handbook of knot theory, 349, Elsevier Science 2005.

[Sęk2005] M. Sękalski, *The degree at infnity of the gradient of a polynomial in two real variables*, Ann. Polon. Math., 87, 229–235.

[ShYu2000] V. Shpilrain, J.T. Yu, *Polynomial retracts and the Jacobian conjecture*, Transactions of the American Mathematical Society, 352 (1), 477.

[Ska2004] G. Skalski, *On the Łojasiewicz exponent near the fibre of a polynomial*, Bull. Polish Acad. Sci. Math, 52 (3), 231–236.

[Son2011] P. Tiên Son, *The Łojasiewicz exponent of a continuous subanalytic function at an isolated zero*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (1), 1–9.

[Te1976] B. Teissier, *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*, Nordic Summer School/NAVF Symposium in Mathematics. Oslo. August 5–25, 1976.

[Te1977] ———, *Varietés polaires I. Invariants polaires des singularités des hypersurfaces*, Invent. Math., 40, 267–292.

[van1995] A. van den Essen, *Algebra, arithmetic and geometry with applications*: papers from Shreeram S. Abhyankar's 70th birthday conference, Springer Verlag, 2004.

[van2004] ———, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Proceedings of Septiemes Rencontres du contact Franco-Belge en Algebre, 1995.

[Van2003] N. Van Chau, *Two remarks on non–zero constant Jacobian polynomial maps of* $\mathbf{C}^2$, Ann. Polon. Math., 82 (1), 39–44.

[Van2006] N. Van Chau, *Integer points on a curve and the plane Jacobian problem*, Ann. Polon. Math., 88 (1), 53–58.

[Viro1989] O. Viro, Some integral calculus based on Euler characteristic, Lecture Notes in Math., 1346, 1989.

[Vui1990] Hà Huy Vui, *Nombres de Łojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I, 311, 429–432.

[VuiSon2008] Hà Huy Vui, P.T. Son, *On the Łojasiewicz exponent at infinity of real polynomials*, Ann. Polon. Math., 94 (3), 197–208.

[Wall2003] C. T. C. Wall, *Chains on the Eggers tree and polar curves*, Rev. Mat. Iber., 19, 745–754.

Janusz Gwoździewicz