

Rzeczywiste algebraiczne wersje Twierdzeń Cartana A i B - streszczenie

Głównym celem niniejszej rozprawy doktorskiej jest udowodnienie rzeczywistej algebraicznej wersji Twierdzeń Cartana A i B po rozdmuchaniu. Niech X będzie nieosobliwą rzeczywistą afiniczną rozmaitością a \mathcal{F} będzie snopem koherentnym na X . Twierdzenie Cartana A mówi, że istnieje wielorozdmuchanie $\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ takie, że cofnięcie $\alpha^* \mathcal{F}$ jest generowane przez sekcje globalne na X_α . Twierdzenie Cartana B jest sformułowane dla rozdmuchaniowych kohomologii Čecha, które są wprowadzone za pomocą systemu skierowanego wielorozdmuchań X . Twierdzenie to jest prawdziwe dla snopów koherentnych wymiaru homologicznego ≤ 1 i snopów quasi-koherentnych mających globalną prezentację, i których źródła są wymiaru projektywnego ≤ 1 .

W drugim rozdziale przedstawiamy podstawowe informacje dotyczące rzeczywistych afinicznych rozmaitości, snopów quasi-koherentnych oraz prostych przecięć normalnych. Następnie dowodzimy, że zbiór wielorozdmuchań nieosobliwej rzeczywistej afinicznej rozmaitości X ma strukturę zbioru skierowanego. Kolejny rozdział zawiera dowód Twierdzenia Cartana A. Rozdział 5 zawiera podstawowe informacje dotyczące wymiaru homologicznego snopów quasi-koherentnych. Jesteśmy wtedy w stanie wypowiedzieć i udowodnić rozdmuchaniowe Twierdzenie Cartana B. Rozdział 7 zawiera zastosowanie rozdmuchaniowych kohomologii Čecha do rozwiązania algebraicznej wersji pierwszego problemu Cousina. Dowodzimy, że pierwszy problem Cousina jest uniwersalnie rozwiązywalny po rozdmuchaniu. Następnie opisujemy lokalną strukturę snopów koherentnych wymiaru homologicznego 1, po rozdmuchaniu. Rozdział 9 zawiera przykłady. Opisujemy zastosowanie Twierdzenia Cartana A do pewnego snopa $\mathcal{F}_{1,1}$, a także konstruujemy kontrprzykład na quasi-koherentną rozdmuchaniową wersję Twierdzenia Cartana A. Podajemy przykład danych Cousina na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 , które nie są rozwiązywalne. W szczególności, dowodzimy, że $H^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}) \neq 0$. Dodatek A.1 opisuje procedurę rozszczepiania wiązek pre-algebraicznych do sumy prostej algebraicznych wiązek liniowych poprzez wielorozdmuchania. W Dodatku A.2 podajemy przykład, że opisana wcześniej procedura rozszczepiania, nie prowadzi w ogólnej sytuacji do trywialnych wiązek liniowych.

Real algebraic versions of Cartan's Theorems A and B - summary

The main aim of the thesis is to establish real algebraic versions of Cartan's Theorems A and B after blowing up. Let X be a non-singular real affine variety and \mathcal{F} be a coherent sheaf on X . Cartan's Theorem A states that there exists a multi-blowup $\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ such that $\alpha^*\mathcal{F}$ is generated by global sections on X_α . Cartan's Theorem B is formulated for blown-up Čech cohomology introduced by means of a directed set of multi-blowups. It is valid for coherent sheaves of homological dimension ≤ 1 and for quasi-coherent sheaves of global presentation with stalks of projective dimension ≤ 1 .

In Chapter 2 we present some basic definitions concerning real affine varieties, quasi-coherent sheaves and simple normal crossing. We then prove that the multi-blowups of a non-singular real affine variety X form a directed system. In Chapter 4 we prove Cartan's Theorem A. In the next chapter we provide basic properties of homological dimension of quasi-coherent sheaves. We are then able to define blown-up Čech cohomology and prove a version of Cartan's Theorem B. Chapter 7 contains application of the blown-up Čech cohomology to a real algebraic version of the first Cousin problem. We show there that the first Cousin problem is universally solvable after blowing up. We then describe the local structure of coherent sheaves of homological dimension 1 after blowing up. Chapter 9 contains various examples. An explicit usage of Cartan's Theorem A to a certain sheaf $\mathcal{F}_{1,1}$ is shown and a counterexample to the quasi-coherent version of our Cartan's Theorem A is provided. We also give a concrete example of an additive Cousin data on \mathbb{R}^2 which is not solvable and we deduce that $H^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}) \neq 0$. In Appendix A.1, we prove that each pre-algebraic vector bundle splits into a direct sum of algebraic line bundles by multi-blowups. In Appendix A.2, we show that the construction from A.1 does not lead to the trivial line bundles in general.