

STRESZCZENIE ROZPRAWY

Celem tej rozprawy jest zbadanie pewnych szczególnych kohomologicznych własności foliacji posiadających geometryczne struktury transversalne. Skupimy się głównie na bazowym $dd^{\mathcal{T}}$ -lemacie dla transversalnie uogólnionych zespolonych foliacji którego szczególnymi przypadkami są bazowy dd^{Λ} -lemat (w przypadku foliacji transversalnie symplektycznych) oraz bazowy $\partial\bar{\partial}$ -lemat (w przypadku foliacji transversalnie holomorficznych). Obie te własności są spełnione przez foliacje transversalnie Kählerowskie (skąd można wnioskować że można je wykorzystać jako przeszkody do istnienia struktury transversalnie Kählerowskiej). Implikują one także wiele kohomologicznych własności podobnych tym posiadanym przez foliacje Kählerowskie. Na przykład transversalnie symplektyczne foliacje spełniające bazowy dd^{Λ} -lemat spełniają również Hipotezę Brylińskiego oraz Twardą Własność Lefschetza (przy pewnych dodatkowych założeniach bazowy dd^{Λ} -lemat jest równoważny każdemu z nich). Co więcej bazowy $\partial\bar{\partial}$ -lemat dla transversalnie holomorficznych foliacji implikuje degenerację ciągu spektralnego Frölichera na pierwszej stronie oraz rozkład Hodge'a w kohomologiach bazowych. W tym celu wgłębiamy się w badanie transversalnych struktur uogólnionych zespolonych, przedstawiamy twierdzenie o lokalnej postaci takich struktur, konstruujemy nietrywialne przykłady oraz uzupełniamy pewne drobne niedociągnięcia w artykule A. Wade. To podejście zdaje się nie dość dobrze zbadane biorąc pod uwagę, że transversalnie uogólnione zespolone foliacje stanowią pomost między foliacjami transversalnie symplektycznymi i transversalnie zespolonymi, a także czasami nadaje geometryczną strukturę, gdy dwóch uprzednio wspomnianych nie ma (co potencjalnie jest bardzo użyteczne gdyż foliacje nie posiadające żadnej geometrycznej struktury nie zachowują się dobrze). Następnie zajmujemy się bazowym $dd^{\mathcal{T}}$ -lematem uogólniając wyniki G. Cavalcantiego oraz przedstawiając dodatkowe kryterium w duchu prac O. Mathieu. Wynik ten choć dość techniczny daje ciekawe rezultaty po zastosowaniu do foliacji transversalnie symplektycznych. Podajemy także krótki dowód tego iż transversalnie Kählerowskie foliacje spełniają zarówno dd^{Λ} -lemat jak i $\partial\bar{\partial}$ -lemat.

Potem zajmujemy się innym podejściem do wcześniej wspomnianych lematów. Wykorzystujemy w tym celu pewne specjalne teorie kohomologii (bazowe kohomologie Bott-Chern cohomology oraz bazowe kohomologie Aeppli'ego dla foliacji transversalnie holomorficznych; bazowe kohomologie $(d + d^{\Lambda})$ i (dd^{Λ}) dla foliacji transversalnie symplektycznych). Przedstawiamy dowody twierdzeń o skończoności wymiaru i dualności powyższych kohomologii używając w tym celu operatorów różniczkowych transversalnie eliptycznych. Przy pomocy tych teorii kohomologii przedstawiamy warunki równoważne bazowemu $\partial\bar{\partial}$ -lematowi i bazowemu dd^{Λ} -lematowi dowodząc nierówności typu Frölichera dla foliacji.

Rozprawę kończymy rozpatrując kilka interesujących przykładów. Najpierw przedstawiamy przykłady foliacji dla których specjalne kohomologie nie są skończeniem wymiarowe. W jednym z tych przykładów zachodzi dodatkowo ciekawy (wcześniej niezaobserwowany fenomen). Mianowicie bazowe kohomologie foliacji z tego przykładu są nieskończeniem wymiarowe w stopniach 2 i 4 podczas gdy w stopniu 3 powracają do bycia skończeniem wymiarowymi (w poprzednich przykładach tego typu kohomologie bazowe pozostawały nieskończeniem wymiarowe aż do stopnia w którym zniknęły permanentnie). Przedstawiamy także przykłady przedstawiające wykorzystanie nierówności typu Frölichera w celu weryfikacji dd^{Λ} -lematu oraz $\partial\bar{\partial}$ -lematu.

Paweł Raczny

SUMMARY OF THE THESIS

The purpose of this thesis is to study certain cohomological properties of foliations with transverse geometric structures. Our main focus is the basic $dd^{\mathcal{T}}$ -lemma on transversely generalized complex foliations which contains as special cases the basic dd^{Λ} -lemma (in the transversely symplectic setting) and the basic $\partial\bar{\partial}$ -lemma (in the transversely holomorphic setting). Both of these lemmas are of great importance as they are both satisfied by transversely Kähler foliations (hence providing obstructions to the existence of such structures) and they govern much of the nice cohomological properties of such foliations (meaning that transversely symplectic and transversely holomorphic foliations which satisfy these lemmas share some cohomological features with transversely Kähler foliations). More explicitly, transversely symplectic foliation satisfying the basic dd^{Λ} -lemma satisfy both the Brylinski Conjecture as well as the Hard Lefschetz Property (under some additional assumptions the dd^{Λ} -lemma is equivalent to each of them). Furthermore, the basic $\partial\bar{\partial}$ -lemma for a transversely holomorphic foliation guarantees that the Frölicher spectral sequence degenerates at the first page and provides the Hodge Decomposition Theorem. In order to study these properties we first recall and further develop the language of transverse generalized complex structures, by providing a local description theorem, constructing some non-trivial examples of such structures and filling in some minor omissions in the exposition provided in the paper of A. Wade. We feel that this approach is fairly neglected considering it provides a bridge between transversely holomorphic foliations and symplectic foliations as well as gives some geometrical structure in the absence of these transverse structures (which is potentially very useful since foliations with absolutely no transverse structures can behave very wildly). Then we proceed to the study of basic $dd^{\mathcal{T}}$ -lemma by generalizing some of the results of G. Cavalcanti as well as providing an additional criterion in the spirit of the works of O. Mathieu. This result though technical provides some interesting results when applied to the symplectic case. We also give a brief proof of the fact that transversely Kähler foliations satisfy the dd^{Λ} -lemma and the $\partial\bar{\partial}$ -lemma.

After this we proceed to a different approach to the aforementioned lemmas. Namely, through some special cohomology theories (basic Bott-Chern cohomology and basic Aeppli cohomology in the transversely holomorphic case; basic $(d + d^{\Lambda})$ - and (dd^{Λ}) -cohomologies in the symplectic case). We provide finiteness and duality theorems for said cohomology through the use of the machinery of transversely elliptic differential operators. We then use these cohomology theories to provide additional computable conditions equivalent to the $\partial\bar{\partial}$ -lemma and the dd^{Λ} -lemma by proving Frölicher-type inequalities for foliations.

We finish this thesis by studying some interesting examples. Firstly we provide foliations for which the special cohomologies are not finitely dimensional. One of these examples exhibits an interesting phenomenon which to our knowledge has not been observed so far. Namely the basic cohomology of this foliation is infinitely dimensional in degree 2 and 4 while in degree 3 it reverts to being finitely dimensional (previously studied examples of foliations with infinitely dimensional basic cohomology have infinitely dimensional cohomology up to the degree in which it becomes trivial permanently). We also provide a number of examples to show that the Frölicher-type inequalities are in fact a convenient way of verifying the dd^{Λ} -lemma as well as the $\partial\bar{\partial}$ -lemma.

Paweł Rośnag