Marek Capiński
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Recenzja pracy doktorskiej Sebastiana Barana pt.

Optymalizacja oczekiwanej użyteczności
wypłat dywidendy firmy ubezpieczeniowej

Tytuł rozprawy dobrze opisuje jej treść i w kolejnych czterech rozdziałach problem jest rozwiązywany w różnych sytuacjach.

Rozdział 1 dotyczy modelu z czasem dyskretnym a metoda oparta jest na sterowaniu stochastycznym. Funkcja wartość, która maksymalizuje zdyskontowane oczekiwane użyteczności dywidend, jest wyznaczona jako rozwiązanie równania Bellmana. Najpierw, korzystając z twierdzenia Banacha o punkcie stałym pokazano że równanie ma jedyne rozwiązanie a następnie udowodniono twierdzenie weryfikacyjne pokazujące że funkcja wartości jest tym rozwiązaniem. W pewnej konkretnej sytuacji udało się uzyskać wzór na funkcję wartości. Metody są dość standardowe, ale wyniki są nowe, a na wyróżnienie zasługuje staranność dowodów.

Wypada jednak wspomnieć o kilku drobnych problemach związanych z modelem. Mamy definicję rekurencyjną $X_{n+1} = X_n - C_n + Y_{n+1}$, gdzie dla $n = 0, 1, 2, \ldots$, a C_n to dywidendy wypłacone na koniec okresu n. Kłopot polega na tym, że C_0 nie jest zdefiniowane. Następnie przyjęto filtrację generowaną przez proces X_n, ale ten proces zależy między innymi od procesu C_n. Stąd też następne założenie że C_n jest adaptowany budzi wątpliwości – mamy do czynienia z pętlą logiczną. Wyobraźmy sobie skrajną sytuację, gdzie $C_n = Y_{n+1}$ dla wszystkich n (zakładając nieujemne Y_n), wtedy X_n jest stały, filtracja jest trywialna i założenie o adaptowaniu nie będzie spełnione.

W rozdziale 2 mamy dodatkowo wpłaty kapitału i maksymalizujemy użyteczność dywidend pomniejszoną o wpłaty kapitału pomnożone przez pewien współczynnik (wzór (2.12), strona 38). Nie jestem zachwycony takim postawieniem zagadnienia. W dowolnej chwili nie ma sensu aby zarówno dywidenda jak i wpłata były dodatnie. Tą oczywistość mamy udowodnioną jako Lemat 2.1.1, ale przy pewnych założeniach. To jest zbędny wysiłek, gdyż można to założyć na podstawie zdrowego rozsądku: obie te wielkości to przepływy gotówki dla akcjonariuszy i nie wypłacą sobie oni dywidendy żeby ją zaraz oddać. W związku z tym wystarczy jeden ciąg przepływów gotówki, dodatnich lub ujemnych, a ten ciąg powinien się znaleźć pod funkcją użyteczności (która może promować wartości dodatnie). Obecnie jedynie dywidendy są objęte funkcją użyteczności. Niemniej matematycznie zagadnienie ma sens i jest zadowalająco rozwiązane metodami zastosowanymi w rozdziale pierwszym. W szczególności pokazano jednoznaczność optymalnego poziomu dywidend co wynika z tego, że funkcja wartości jest wklęsła.

Dwa pierwsze rozdziały pozostawiają pewien niedosyt, można by oczekiwać przykładu numerycznego oraz twierdzenia o aproksymacji ogólnego modelu z czasem ciągłym przez model dyskretny.

Rozdział 3 dotyczy ciągłego modelu poziomu rezerw, gdzie dywidendy wypłacane są w sposób dyskretny z kosztami transakcji, zarówno stałymi jak i zmiennymi, a maksymalizujemy średnie zdyskontowane wartości funkcji użyteczności dywidend. Wyniki są uogólnieniami twierdzeń udowodnionych przez Thonhausera i Albrechta dla potęgowej użyteczności. Uogólnienie polega na uwzględnieniu pewnej klasy funkcji użyteczności obejmującej funkcje potęgowe.

Rozdział 4 przedstawia wyniki wspólne ze Zbigniewem Palmowskim, już opublikowane choć szkoda że nie w czasopiśmie specjalistycznym, o profilu finansowym. W klasycznym ciągłym modelu Cramera-Lundberga dywidendy są zadane procesem o absolutnie ciągłych trajektoriach, a maksymalizujemy analogiczną wielkość jak w rozdziałach poprzednich. Pokazano, że funkcja wartości jest regularna i spełnia równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, oraz udowodniono twierdzenie weryfikacyjne. Do rozprawy zostało dołączone oświadczenie współautora o równych udziale.

Uwagi redakcyjne:

Oznaczenia ze wstępu nie zgadzają się z oznaczeniami części głównej.

str. 8, $I(X_n)$ jest zdefiniowane jako przedział, więc stwierdzenie $I(X_n) = 0$ nie ma sensu.

str. 8, we wzorze (1.1.1) mamy wartość oczekiwaną, a nie warunkową wartość oczekiwaną ($X_0 = x$ to zbiór pusty lub całe Ω).

str. 10, normę wypada zdefiniować w sformułowaniu twierdzenia i tekst w dowodzie "rozważmy normę" budzi wątpliwości.

str. 10, nierówność $Tf(x) < \infty$ nie pociąga ograniczoności (która zachodzi, nie ma luki, tylko brak precyzji).

Inne uwagi:

str. 1, motywacją wypłaty dywidend nie jest ograniczenie wzrostu rezerw ale żądza zysku akcjonariuszy.

str. 2, optymalizacja wypłat dywidendy to problem akcjonariuszy i nie jest analizowany z punktu widzenia ubezpieczonego.

str. 37, to nie towarzystwo a akcjonariusze podejmują decyzje o wysokości dywidend i wpłat kapitału (niekiedy pośrednio).

Uwagi krytyczne dotyczą głównie kwestii redakcyjnych i nie mają wpływu na ocenę wartości pracy. Udowodniono nowe wyniki rozwiązując problemy leżące w głównym nurcie matematyki finansowej. Końcowa konkluzja jest więc pozytywna i wnoszę o dopuszczenie autora do dalszych etapów przewodu.

Marek Capiński

Kraków, 10 października 2018.