prof. dr hab. Jacek Jakubowski
profesor zwyczajny UW
Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa, 21.12.2018

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Ewy Marciniak

p.t. „ Optymalizacja polityki dywidend w modelach z premią zależną od poziomu rezerwy"

Mgr Ewa Marciniak bada w rozprawie problem optymalizacji polityki wypłaty dywidend dwu typów firm. Pierwszy rodzaj firm to firmy ubezpieczeniowe, dla których wysokość rezerw rośnie w sposób ciagły i przewidywalny, a straty związane są z losowo pojawiającymi się szkodami o losowej wysokości. Drugi rodzaj firm to firmy, których zyski będące zmiennymi losowymi pojawiającymi się losowo i które ponoszą wydatki w sposób ciagły. W obu przypadkach proces bogactwa firmy opisany jest przez proces Markowa kawałkami deterministyczny. Polityka wypłaty dywidend polega na wyborze wysokości i czasu wypłaty. Optymalizacja polega na wyborze postępowania maksymalizującego wartość oczekiwaną zdyskontowanych dywidend wypłacanych do momentu ruiny firmy, z tym, że ruina nie jest powodowana przez wypłatę dywidendy. Autorka koncentrowała się na strategiach barierowych, które są naturalne dla rozpatrywanego problemu. W pracy podała warunki, kiedy strategia barierowa jest optymalna.

Praca składa się ze wstępu, trzech rozdziałów i dodatku. We wstępie (rozdział 1) zostały przedstawione dwa główne zagadnienia rozważane w pracy doktorskiej. Dotychczas rozważano procesy rezerw (bogactwa) R postaci $R_t = x + pt - S_t$ gdzie S jest złożonym procesem Poissona. W pracy rozważane są procesy R postaci

$$R_t = x + \int_0^t p(R_s)ds - S_t,$$

gdzie funkcja p jest borelowska i dodatnia. Odpowiada to sytuacji stałego przypływu składek i losowych strat w losowych momentach. W drugiej części rozprawy rozważane są procesy postaci

$$\tilde{R}_t = x - \int_0^t p(\tilde{R}_s)ds + S_t,$$

co odpowiada sytuacji wydatków ponoszonych w sposób ciagły i losowych zysków w losowych momentach. We wstępie został także przedstawiony stan wiedzy dotyczący tych zagadnień wraz z odnośnikami do literatury.

W rozdziale 2 pt. „Problem optymalnej dywidendy dla firmy ubezpieczeniowej – The Optimal Dividend Problem in the Insurance Risk Model" zostało przedstawione rozwiązanie tego problemu dla firmy ubezpieczeniowej. Dowody twierdzeń zostały podane w rozdziale 3. Model zakłada, że straty mają skończoną średnią, czynnik dyskontowy q jest stały, funkcja p jest monotoniczna i spełnia „speed condition" (2.2). Dopuszczalność strategii wypłaty dywidendy jest zdefiniowana w naturalny sposób, a mianowicie nie można więcej wypłacić niż się ma. Strategie barierowe na poziomie a polegają na tym, że wypłaca się w momencie, w którym bogactwo przekroczy wielkości a całą nadwyżkę ponad a jako dywidendę. Gdy L jest procesem dywidendy, to rezerwa (bogactwo) opisywane jest przez proces X^L: $X_t^L = x + \int_0^t p(X_s^L)ds + S_t - L_t$, a funkcja wartości $v(x) = \sup v_L(x)$, gdzie

$$v_L(x) = E_x\Big(\int_0^T e^{-qt}dL_t + e^{-qT}w(X_T^L)1_{\{T<\infty\}}\Big),$$

E_x jest wartością oczekiwaną względem miary $P_x(\cdot) = P(\cdot|X_0^L = x)$, T jest momentem ruiny, w funkcją kary i supremum jest brane po wszystkich strategiach dopuszczalnych gdy kapitał początkowy był równy x. Celem rozprawy jest znalezienie funkcji wartości i znalezienie strategii optymalnej realizującej supremum. Funkcja kary w jest tak zwaną funkcją Gerber-Shiu (definicja i własności są podane w & 2.3). Technikami użytymi do otrzymania szukanych wyników są techniki związane z systemem Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (HJB). Jednym z głównych wyników rozprawy jest twierdzenie 2.4.1 (Verification Theorem), mówiące że jeśli strategia generuje funkcję wartości absolutnie ciągłą, mającą afiniczną dominację i spełniającą HJB system, to jest ona strategią optymalną. Następnie jest zdefiniowana wielkość a^*, taka że strategia barierowa na poziomie a^* jest optymalna pośród wszystkich strategii barierowych (lemat 2.4.3). Drugim istotnym wynikiem z tego rozdziału jest twierdzenie 2.4.4 określające warunki konieczne i dostateczny na to, by strategia barierowa na poziomie a^* była optymalna pośród wszystkich strategii dopuszczalnych. Następnie podane są dwa łatwiejsze do sprawdzenia warunki zapewniające, że strategia barierowa na poziomie a^* jest optymalna. W sekcji 2.5 przy założeniu, że straty mają rozkład wykładniczy zostały zaprezentowane przykłady wyliczenia a^* dla funkcji p liniowej i ułamkowej przy użyciu pakietu Maple. W ostatniej sekcji 2.6 rozważano modyfikację powyższego problemu polegającą na tym, że gdy kapitał spada poniżej zera to właściciele dokładają brakującą wielkość by kapitał stał się równy zero (w ten sposób nigdy nie ma ruiny). W ten sposób proces bogactwa staje się procesem odbitym od zera. Dla tego procesu została znaleziona transformata Laplace pierwszego przejścia przez poziom a i wartość funkcji v_L dla strategi barierowej na poziomie a.

W rozdziale 3 zostały podane dowody faktów przedstawionych w rozdziale 2. Dowody są bardzo zaawansowane technicznie. Wymagały dobrej znajomości technik używanych w optymalizacji stochastycznej i teorii procesów Markowa. Bardzo istotne było użycie pojęcia pełnego generatora (full generator) operatora. By udowodnić twierdzenie 2.4.1 (Verification Theorem) zostało wprowadzone ciekawe pojęcie sterowanego nadrozwiązania systemu HJB i udowodnione, że funkcja wartosci jest równa minimum z funkcji tej klasy. Dowód twierdzenia 2.4.1 wymagał sporej pomysłowości.

W rozdziale 4 pt. „Problem optymalnej dywidendy w modelu dualnym" został rozpatrzony problem optymalizacji dywidend, gdy proces bogactwa jest zadany przez $\tilde{R}$, gdzie funkcja p jest dodatnia i absolutnie ciągła. Analogicznie jak poprzedni celem było znalezienie funkcji wartości $\tilde{v}(x) = \sup v_L(x)$, gdzie

$$\tilde{v}_L(x) = E_x\Big(\int_0^{\tilde{T}} e^{-qt} dL_t \Big),$$

i L jest procesem dywidendy, a $\tilde{T}$ momentem ruiny. Wykorzystując równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (HJB) autorka formułuje równanie, które spełnia $\tilde{v}_{L^\beta}$ dla strategii barierowej L^β i twierdzenie weryfikacyjne. Zostały podane warunki wystarczające i konieczne na optymalność strategii barierowej. Ponadto, przy dodatkowych założeniach, wyprowadzony został jawny wzór na $\tilde{v}_{L^\beta}$. Jak w poprzedniej sytuacji otrzymane wyniki są zilustrowane przykładami.

W dodatku (rozdział 5) zostały przedstawione definicje i twierdzenia pomocnicze używane w zasadniczej części rozprawy.

Mam trochę uwag krytycznych dotyczących prezentacji wyników.
1. Autorka mogłaby staranniej zredagować rozprawę. Podam parę przykładów uchybień:
– Na str. 10 pojawia się niezdefiniowany proces $L_t(x)$.
– (2.8) jest nazywane HJB equation.
– Na str 24 pojawia sie zdanie wtrącone: „Any bounded random variable has the strong Markov property described above", którego sens dla mnie jest niejasny.
– str 63 P_t is a contradiction, zamiast contraction.

2. Jak było napisane we wstępie i powtórzone na początku rozdziału 3 wyniki z rozdziału 2 są rozszerzeniem wyników z pracy E. Marciniak, Z. Palmowski, „On the optimal dividend problem for insurance risk models with surplus-dependent premiums", Journal of Optimization Theory and Applications 168 (2016), no. 2, 723–742. Autorka powinna napisać na czym to rozszerzenie polega.

3. Na str 24^4 autorka napisała: „Przyjmujemy za pewnik, że R jest procesem Markowa, a ponieważ jest to process Fellera to R jest silnie Markowa." Fakt, że R jest procesem Markowa jest oczywisty, ale fakt, że to jest proces Fellera wymaga uzasadnienia.

W rozprawie zostały rozwiązane dwa ciekawe zagadnienia optymalizacji polityki wypłaty dywidend. Problemy były technicznie trudne i wymagały zaawansowanego aparatu matematycznego. Wykorzystywana jest teoria sterowania stochastycznego, teoria martyngałów, równania i system Hamiltona-Jacobiego-Bellmana, własności procesów Markowa i pełnego generatora. Dowody, które są bardzo zaawansowane technicznie wymagały dobrej znajomości technik używanych w optymalizacji stochastycznej i teorii procesów

Markowa. W celu udowodnienia twierdzenia 2.4.1 zostało wprowadzone ciekawe pojęcie sterowanego nadrozwiązania HJB systemu i udowodnione, że funkcja wartości jest równa minimum z funkcji tej klasy. Z punktu widzenia matematycznego praca jest dobrze napisana.

Reasumując, uważam że mgr Ewa Marciniak wykazała dobrą znajomość technik dowodowych oraz umiejętność przeprowadzania pomysłowych rachunków. Potrafiła udowodnić ciekawe i nietrywialne twierdzenia. Pozytywnie oceniam recenzowaną pracę.

Konkluzja

Podsumowując uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o jej przyjecie i dopuszczenie magister Ewy Marciniak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Jakubowski