Dr hab. Elżbieta Ferenstein
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Poczta elektroniczna: efer@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 3 stycznia 2019

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr Ewy Marciniak zatytułowanej

„On the optimal dividend problems in the models with surplus-dependent premiums"

(„Optymalizacja polityki dywidend w modelach z premią zależną od poziomu rezerwy")

Zawartość pracy

Opiniowana praca, zredagowana w języku angielskim, liczy 69 stron, składa się z pięciu rozdziałów (w tym dodatku) i bibliografii złożonej z 37 pozycji.

Praca poświęcona jest szczególnemu problemowi sterowania stochastycznego – problemowi dywidendy wypłacanej akcjonariuszom firmy, w szczególności ubezpieczeniowej. Rozważane są dwa różne modele procesu rezerw pomniejszone o proces dywidend - model ubezpieczeniowy oraz model dualny.

Zagadnienie wyznaczenia optymalnej dywidendy dla różnych modeli procesu ryzyka i klas dywidend jest przedmiotem badań od przeszło 60-ciu lat począwszy od procesu z czasem dyskretnym i dywidend barierowych (De Finetti 1957, [16]). Najnowsze wyniki badań, z okresu ostatnich kilkunastu lat, w przypadku czasu ciągłego przedstawione są w pracy Avrama, Palmowskiego i Pistoriusa (2015, [10]). Trzy główne badane klasy procesów rezerw to klasyczny model Cramera – Lundberga, model dodatkowo zaburzony procesem ruchu Browna, i w najogólniejszej sytuacji proces Levy'ego. Proces ryzyka z dywidendą jest różnicą procesu rezerw i procesu dywidendy. Poszukuje się optymalnego procesu dywidendy i odpowiadającej mu funkcji wartości, który maksymalizuje funkcję zysku. W najprostszym przypadku jest nią wartość oczekiwana skumulowanej zdyskontowanej dywidendy wypłacanej do momentu ruiny, czyli momentu spadku poniżej zera procesu rezerw pomniejszonego o dywidendę. W ogólniejszych przypadkach dodaje się do powyższej funkcji wypłaty funkcję kary Gerbera i Shiu oraz uwzględnia koszty za transakcje.
W cytowanej powyżej pracy Autorzy wyróżniają dwa główne sposoby badania optymalnych rozwiązań – przy pomocy lepkościowych rozwiązań równań HJB oraz metody probabilistyczne. W rozprawie zastosowano te ostatnie.
Cechą wspólną powyższych zagadnień optymalizacji jest brak sterowania, tzn. że wypłata dywidend nie zmienia procesu rezerw.

Problemy dywidendy badane w rozprawie są istotnie różne od problemów rozważanych we wcześniejszych pracach ze względu na występowanie sterowania w procesie rezerw, którym w rozprawie jest proces dywidendy.

W pierwszym rozdziale (wprowadzenie) Autorka rozprawy przedstawia historię badań problemów optymalnej dywidendy, strukturę pracy oraz usytuowanie własnych wyników w tej obszernej problematyce.

W rozdziale drugim sformułowany jest problem dywidendy w modelu ubezpieczeniowym oraz podane są główne wyniki dotyczące optymalnej dywidendy i funkcji wartości. Rozdział trzeci poświęcony jest ich dowodom. Autorka przedstawia sterowany proces rezerw X^L w postaci

$$X_t^L = x + \int_0^t p(X_s^L)ds - \sum_{k=1}^{N_t} C_k - L_t, \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

Wysokość rezerwy X_t^L w momencie t jest sumą kapitału początkowego x i skumulowanej losowej składki (o intensywności będącej funkcją $p(\cdot)$ od bieżących stanów procesu rezerw) pomniejszoną o łączną wysokość strat do momentu t (określoną przez złożony proces Poissona) oraz wysokość wypłaconej dywidendy do momentu t : L_t.
Dla danego procesu dywidendy L funkcja zysku $v_L(\cdot)$ jest wartością oczekiwaną zysku obligatoriuszy rozumianego jako suma oczekiwanej skumulowanej zdyskontowanej dywidendy do momentu ruiny $T = \inf\{t \geq 0: X_t^L < 0\}$ oraz funkcji kary Gerbera-Shiu:

$$v_L(x) = E_x\left(\int_0^T e^{-qt}dL_t + e^{-qT}w(X_T^L)I_{\{T<\infty\}}\right). \tag{2}$$

Celem decydenta jest znalezienie optymalnej dywidendy L^* w klasie strategii dopuszczalnych (m.in. nie doprowadzających bezpośrednio do ruiny). Optymalny oczekiwany zysk określa funkcja wartości $v(\cdot)$:

$$v(x) = \sup_{L\in\Pi(x)} v_L(x) = v_{L^*}(x) \tag{3}$$

Wyniki nt. zagadnienia sterowania (1) - (3) (w większości opublikowane w pracy Marciniak i Palmowskiego (2016,[28])) są przedstawione w rozdziale 2 rozprawy, udowodnione w rozdziale 3. Najważniejsze wyniki, podane w podrozdziale 2.4, to twierdzenie 2.4.1 (tzw. twierdzenie weryfikacyjne) oraz 4 twierdzenia i lemat dotyczące optymalnej strategii barierowej.
W twierdzeniu weryfikacyjnym podane są warunki dostateczne optymalności strategii dopuszczalnej – wystarczy aby funkcja zysku była absolutnie ciągła, zmajoryzowana afinicznie i spełniała równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (HJB). Autorka przeprowadza dowód tego twierdzenia wraz wynikami pomocniczymi bardzo dokładnie (na 14 stronach) w rozdziale 3. Zaczyna od wprowadzenia dwu ważnych funkcji pomocniczych – funkcji kary Gerbera i Shiu oraz funkcji W_q o roli podobnej jaką odgrywa funkcja skali w problemie dywidendy z nadwyżką w postaci procesu Levy'ego (związanej z momentami pierwszego przekroczenia przez proces rezerw dwóch progów: 0 i $a > 0$). W lemacie 2.3.5 znajduje równania różniczkowo - całkowe, które spełniają te funkcje. Z kolei pozwalają one otrzymać podstawowe własności funkcji wartości oraz uzyskać związane z nią nadmartyngały, odpowiednio, w lematach 3.2.1, 3.2.3 -3.2.5. Właściwy dowód twierdzenia weryfikacyjnego przeprowadzony jest w podrozdziale 3.2.1. W głównym twierdzeniu 3.2.9 Autorka rozprawy pokazuje, że funkcja wartości jest najmniejszą funkcją z klasy sterowanych super - rozwiązań równania HJB. Z kolei w samym dowodzie tw. 2.4.1 pokazuje, że funkcja spełniająca jego założenia (w szczególności równanie HJB) należy do klasy powyższych super rozwiązań. Dowody powyższe są żmudne, wymagały dobrej znajomości teorii martyngałów i procesów Markowa. Niektóre są analogiczne do dowodów wyników uzyskanych dla problemu dywidendy z procesem nadwyżki w postaci procesu Levy'ego. Na przykład dowód

twierdzenia 3.2.9 podobny jest do dowodu lematu 4.8 w pracy [10] (o czym Autorka rozprawy wspomina).
W twierdzeniu 2.4.2 podana jest postać funkcji zysku (2) dla strategii barierowej wyrażona przez wspomniane funkcje pomocnicze. W dowodzie wykorzystuje się definicje procesu nadwyżki i dywidendy barierowej oraz własności tych funkcji uzyskane w lemacie 2.3.5.
W lemacie 2.4.3 Autorka rozprawy znajduje postać optymalnej strategii barierowej w klasie strategii barierowych. Określona ona jest przez wprowadzone funkcje pomocnicze. Z kolei w twierdzeniu 2.4.4 uzyskuje warunek konieczny i dostateczny na to aby optymalna strategia barierowa z lematu 2.4.3 była strategią optymalną w klasie wszystkich strategii dopuszczalnych. Z kolei twierdzenia 2.4.5 i 2.4.6 podają warunki dostateczne optymalności strategii barierowej, znacznie łatwiejsze do sprawdzenia niż te podane w twierdzeniu 2.4.4. W tw. 2.4.5 jest to monotoniczność funkcji związanej z funkcjami pomocniczymi, a w twierdzeniu 2.4.6 wystarczy jedynie wypukłość gęstości rozkładu strat indywidualnych w procesie ryzyka, wklęsłość funkcji składki p oraz określone afiniczne ograniczenie funkcji kary.
W podrozdziale 2.5 znajdują się dwa przykłady problemów dywidendy. Dla funkcji składki liniowej lub określonej funkcji wymiernej oraz wysokości strat indywidualnych mających rozkłady wykładnicze wyznaczono numerycznie optymalne strategie barierowe.
Podrozdział 2.6 poświęcony jest zmodyfikowanemu sterowanemu procesowi rezerw z dokapitalizowaniem zapobiegającym ruinie. Autorka modyfikuje równanie (1) dodając po prawej stronie proces dokapitalizowania sprowadzający stan procesu do zera w momencie ruiny. W twierdzeniu 2.6.4 podaje wyniki dotyczące strategii barierowej, w szczególności postać zmodyfikowanej funkcji zysku równej oczekiwanej skumulowanej zdyskontowanej dywidendzie pomniejszonej o wysokość zdyskontowanego dokapitalizowania. Szkic dowodu, odwołujący się do dowodu postaci funkcji zysku strategii barierowej bez dokapitalizowania w 3.2.2, znajduje się w 3.2.5.

Rozdział 4 poświęcony jest problemowi optymalnej dywidendy w modelu dualnym do ubezpieczeniowego. Autorka rozprawy zmienia sterowany proces nadwyżki (1) w taki sposób, że przed złożonym procesem Poissona w (1) występuje znak „+" a przed całką znak „- ". Oznacza to, że firma ponosi wydatki w sposób ciągły z upływem czasu , natomiast zysk otrzymuje w momentach skoków procesu Poissona i jego skumulowana wysokość jest złożonym procesem Poissona. Funkcją zysku jest wartość oczekiwana skumulowanej zdyskontowanej dywidendy (wzór (2), w którym $w(\cdot) = 0$). Główne wyniki dla modelu dualnego, sformułowane w podrozdziale 4.2 i dowiedzione w 4.5, zostały opublikowane w pracy Marciniak i Palmowskiego (2017,[29]). Są to twierdzenie 4.2.1 (twierdzenie weryfikacyjne), oraz twierdzenia 4.2.2 – 4.2.4 formułujące różne założenia o funkcji kosztu p oraz oczekiwanym jednostkowym zysku $E(C_1)$, zapewniające istnienie (twierdzenie 4.2.3) oraz optymalność odpowiedniej strategii barierowej w klasie strategii dopuszczalnych (twierdzenia 4.2.4, 4.2.2). Z kolei w twierdzeniu 4.2.5 Autorka podaje założenia, przy których optymalna wcześniej, z twierdzenia 4.2.4, strategia barierowa nie jest optymalna. W dowodach istotną rolę odgrywa dowiedziony najpierw lemat 4.1.1 podający równanie, które spełnia funkcja zysku dla procesu nadwyżki z dywidendą barierową, określone przez pełny generator procesu nadwyżki z zerowym procesem dywidend.
W podrozdziale 4.4 wyznaczone są numerycznie optymalne strategie barierowe w przypadku zysków o rozkładach wykładniczych i gamma oraz kilku przykładów funkcji kosztów.

Rozdział 5 stanowi dodatek zawierający fragmenty teorii prawdopodobieństwa, procesów Markowa, martyngałów, i twierdzenie 5.3.8 (wniosek ze wzoru Ito dla procesu rezerw w modelu dualnym) wykorzystywane w rozprawie.

Uwagi krytyczne, wątpliwości.

Na tak obszerną pracę, napisaną w dość skondensowanej formie, jest stosunkowo niedużo usterek redakcyjnych, rachunkowych, czy też nieścisłości w przeprowadzanych dowodach. Poniżej wymienione są niektóre z nich:

1. W rozdziale 3 (str. 24) w dowodzie lematu 2.3.5 rozkład warunkowy wysokości szkody, która spowodowała ruinę jest nieprawidłowo zapisany. Podana funkcja we wzorze poprzedzającym (3.2) nie jest dystrybuantą.
2. Str. 24, linia 13: powinno wystąpić $\theta_\tau \eta$.
3. Str. 26,: w ostatniej równości powinno być r_t^x
4. Str. 27: w nierówności poprzedzającej (3.13) pomylono argumenty funkcji W_q. Powinien być iloraz $W_q(y)/W_q(x)$.
5. Str. 29: we wzorze (3.20) po prawej stronie równości powinna być suma (a nie różnica) dwu składników, ponadto pod całką argumentem funkcji w jest $-z$ a nie $x-z$.
6. Str. 29 (ostatnia linia): podając określenie rodziny zmiennych losowych filtrującej w górę pomylono zwroty nierówności.
7. Niekonsekwentne używanie symbolu warunkowej wartości oczekiwanej względem σ – ciał, np. na str. 30 we wzorze (3.22) oraz podczas dowodu lematu 3.2.3.
8. Str. 31, dowód lematu 3.2.4, krok1 (Step 1): po wzorze określającym moment ruiny $T_{0,x}^L$, należało napisać, że następna równość ma miejsce P_x – p.n. („P_x – a.s.), a nie „P – a.s.
9. Str. 32, linia 6: należy powołać się na wzór (3.29) a nie (3.34).
10. Str. 35: na końcu dowodu Lematu 3.2.5 w wierszach pomiędzy wzorami (3.43) (3.45) w kilku miejscach brakuje falek nad oznaczeniami strategii L^1, L^2, L^3.
11. Str. 36: idea dowodu twierdzenia 3.2.9 jest zaczerpnięta z dowodu lematu 4.8 w pracy [10], a nie z lematu 5.5 pracy [10].
12. Str. 42: dowód twierdzenia 2.4.6 przeprowadzono przy silniejszych założeniach w stosunku do tych przyjętych w sformułowaniu twierdzenia (nie założono istnienia pochodnych drugiego rzędu funkcji gęstości strat i funkcji składki).
13. Str. 45 i następne: w rozdziale 4 w wielu miejscach brak jest falek w oznaczeniach funkcji zysku, funkcji intensywności kosztów i samych procesów związanych z modelem dualnym. Np. w ostatnim zdaniu str. 45 zamiast „.. premium function v_L...” powinno wystąpić „... profit function $\widetilde{v_L}$ ...”.
14. Str. 53: po lewej stronie równości (4.17) i (4.18) brakuje symbolu pochodnej. W zdaniu poprzedzającym (4.18) powinna być prawostronna ciągłość (pochodna), a nie lewostronna ciągłość (pochodna).
15. Str. 53 i 54: stosując twierdzenie 5.3.8 należy uwzględnić poprawną jego formę.
16. Str. 57: w dowodzie twierdzenia 4.2.5 (nie lematu 4.2.5 jak napisano) brakuje dokładniejszego wyjaśnienia dlaczego moment wyjścia z ograniczonego przedziału J jest całkowalną zmienną losową.
17. Str. 63: po (5.1) powinno wystąpić nie „contradiction”, ale „contraction”, w definicji 5.2.6 w przedostatniej linii usterka: „... process A...”

18. Str. 66: usterki redakcyjne (i rachunkowe) w sformułowaniu twierdzenia 5.3.8 (i dowodzie). Na przykład w (5.4) powinna być " $\leq$ " a nie " $=$ ", funkcja wykładnicza powinna być pod całką a nie przed całką.

Podsumowanie i konkluzja

Rozprawa zawiera wiele nowych i ciekawych wyników, w większości już opublikowanych w czasopismach o zasięgu międzynarodowym. Nowy jest już sam model procesu rezerw, w którym proces skumulowanej dywidendy stanowi sterowanie. Problematyka pracy wpisuje się w nurt aktualnych badań w zakresie poszukiwania modeli i rozwiązań zadania optymalnej dywidendy wypłacanej obligatoriuszom. Rozprawa jest bardzo obszerna. Stąd też nie udało się uniknąć usterek natury technicznej, czy też rachunkowej, zbyt skondensowanej czasami formy dowodów, ale w większości przeprowadzonych bardzo starannie i zwięźle. Autorka wykazała bardzo dobrą znajomość rozległej literatury przedmiotu rozprawy, podstaw teorii procesów Markowa i martyngałów. Rozwiązała problem mogący mieć zastosowanie w praktyce ubezpieczeniowej.

Po zapoznaniu się z rozprawą doktorską Pani mgr Ewy Marciniak stwierdzam, że spełnia ona wszystkie wymagania stawiane przez ustawę rozprawom doktorskim. Wnoszę zatem o dopuszczenie Pani mgr Ewy Marciniak do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Elżbieta Ferenstein

Elżbieta Ferenstein