Prof. dr hab. inż. Tomasz Downarowicz
Wydział Matematyki
Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Wrocław/Galowice, 14 lipca 2018

R E C E N Z J A

rozprawy doktorskiej mgr **Marthy Łąckiej (Ubik)**
zatytułowanej
Zastosowanie pseudometryk dynamicznie generowanych oraz królewskie miary niehiperboliczne
napisanej pod opieką
dr. hab. Dominika Kwietniaka

Rozprawa bazuje w zasadzie na dwóch pracach opublikowanych (pozycje [43] i [45] w bibliografii rozprawy) oraz wynikach niepublikowanych (rozdział 4). Prace [43] i [45] są wspólne z promotorem (jedna z nich również z P. Oprochą). W rozprawie wspomina się też wyniki z jednej pracy samodzielnej i jednej pracy z równorzędną współautorką. Autorka deklaruje równomierny udział we wszystkich cytowanych pracach współautorskich. Co prawda nie załączono adekwatnych oświadczeń współautorów, ale mimo to wkład autorki w zaprezentowany dorobek można uznać za istotny i wystarczający.

Rozprawa dotyczy kilku powiązanych ze sobą tematów. Wątkiem, który spaja wszystkie te tematy jest zastosowanie dwóch pseudometryk: Bezikiowicza i Feldmana–Katoka. Pseudometryki te w zasadzie odnoszą się do orbit w ustalonym układzie dynamicznym, ale można je również zdefiniować dla pseudoorbit (de facto między dowolnymi ciągami punktów z przestrzeni fazowej), jak również dla miar niezmienniczych (pierwsza z nich staje się metryką, druga tylko zadaje zbieżność, w obu przypadkach zbieżność ta jest silniejsza od $*$-słabej zbieżności miar). W części pracy ważną rolę odgrywają pojęcia specyfikacji i śledzenia pseudoorbit (w kilku wersjach), pojęcie miar luźno kroneckerowskich, i miary królewskie. Definicje wszystkich tych pojęć są przytoczone i krótko omówione w pierwszym rozdziale pracy, dodatkowe informacje znajdują się na początku każdego z dalszych rozdziałów. W ostatnim rozdziale pojawiają się pojęcia z dynamiki gładkiej (dyfeomorfizmów na rozmaitościach), takie jak wykładniki Lapunowa, czy miary (nie)hiperboliczne, jednak to, co autorka w tym rozdziale wnosi nowego, nie wymaga manipulowania tymi pojęciami (w tych kwestiach wystarczają odwołania do faktów z istniejącej literatury).

Omówię teraz po krótce główne wyniki rozprawy. W rozdziale 2 najważniejsze wydaje się być wykazanie (przy pomocy pseudometryki Bezikowicza), że jeśli układ ma relatywną (tzn. względem pewnego faktora okresowego) własność asymptotycznego śledzenia w średniej, to każdy niepusty zwarty i spójny zbiór miar niezmienniczych pokrywa się ze zbiorem miar quasi-generowanych przez jakąś orbitę. W szczególności każda miara niezmiennicza ma punkt generyczny. Jednak wynik ten w dużej mierze zawdzięczamy Sigmundowi (lata 70-te), który wykazał istnienie asymptotycznej pseudoorbity w średniej, która quasi-generuje zadany zbiór miar. W rozprawie wykorzystano własność śledzenia w średniej do zastąpienia powyższej pseudoorbity orbitą. Tak więc krok dzielący omawiany rezultat od wyniku Sigmunda jest stosunkowo niewielki. W rozprawie nie widać na przykład, w jaki sposób ingeruje spójność modelowanego zbioru miar – aby się tego dowiedzieć, należałoby przeczytać cytowaną pracę Sigmunda. Jednak znaczenie omawianego rezultatu z doktoratu zostaje wzmocnione kolejnym twierdzeniem zawartym w rozprawie (niezależnym od zastosowań pseudometryki Bezikowicza) mówiącym, że słaba własność specyfikacji implikuje własność asymptotycznego śledzenia w średniej. Zatem układy ze słabą własnością specyfikacji spełniają tezę poprzedniego twierdzenia (i np. każda miara niezmiennicza ma punkt generyczny), a to jest już wynik zauważalny. Nie został on w tej ogólności odkryty ani przez Sigmunda, ani przez Dateyamę, mimo że napisali oni po kilka prac na temat punktów generycznych w układach ze specyfikacją.

Znacznie ciekawsze wydają się zastosowania (słabszej od pseudometryki Bezikowicza) pseudometryki Feldmana–Katoka, które wypełniają najobszerniejszy rozdział 3 rozprawy. Mamy tu do czynienia zarówno ze zbieżnością orbit (lub pseudoorbit) jak i z odpowiednio indukowaną zbieżnością miar niezmienniczych (co do której nie wiadomo, czy odpowiada ona jakiejś pseudometryce). Z ciekawych faktów wykazano między innymi zupełność zbioru quasi-orbit oraz (odpowiednio rozumianą) zupełność zbioru miar niezmienniczych, i – co ciekawsze – domkniętość zbioru miar ergodycznych. Nie znalazłem informacji o jednoznaczności granicy ciągu miar, ale ta wydaje się być na tyle oczywista, że przemilczenie to można uznać za wybaczalne.

Kolejny wynik mówi o dolnej półciągłości entropii względem zbieżności Feldmana-Katoka miar ergodycznych. W układach symbolicznych, wobec górnej półciągłości entropii względem słabszej zbieżności *-słabej, dostajemy ciągłość. Nie znalazłem komentarza na temat konieczności założenia ergodyczności.

Następny, godny odnotowania wynik dotyczy miar (układów miarowych) luźno kroneckerowskich. Miary te zostały wprowadzone przez M. Ratner i badane m. in. przez A. Katoka. Są to miary równoważne w sensie Kakutaniego z miarami ergodycznymi o widmie dyskretnym (czyli w pewnym sensie leżą po przeciwnym biegunie względem miar luźno Bernoullowskich). Rezultat, o którym chcę teraz wspomnieć, mówi, że każda granica miar okresowych, o ile sama nie jest okresowa, jest miarą luźno kroneckerowską. Ten bardzo interesujący wynik aż się prosi o komentarz na temat implikacji odwrotnej. Szkoda, że takiego komentarza brak w rozprawie. Brak też komentarza na temat tego, czy miara luźno kroneckerowska może mieć widmo inne niż dyskretne (należy się domyślać, że tak, inaczej klasa ta trywializowałaby się). Co prawda równoważność Kakutaniego jest daleka od izomorfizmu (czy choćby słabszego izomorfizmu spektralnego), jednak można pomyśleć, że dla układów z widmem dyskretnym jest inaczej (wiemy na przykład, że izomorfizm spektralny z układem o widmie dyskretnym już implikuje izomorfizm). Warto byłoby wspomnieć coś na ten temat choćby we wstępie.

Kolejny temat to tzw. miary królewskie. Miary te zostały wprowadzone przez Gorodeckiego i Iljaszenkę w kontekście dyfeomorfizmów na rozmaitościach i zostały wykorzystane do wykazania istnienia miar niehiperbolicznych dla otwartego zbioru dyfeomorfizmów trójwymiarowego torusa (Klepcyn i Nalski, 2007). Jednak w rozprawie definicja została rozszerzona na układy na dowolnych przestrzeniach zwartych. Są to granice względem zbieżności $*$-słabej ciągów miar okresowych spełniających dodatkowe założenia o aproksymacji wzajemnej. Pytanie o entropię miar królewskich pozostawało otwarte od czasu ich wprowadzenia. Dzięki wynikom z omawianego rozdziału dowiadujemy się, że miary królewskie są granicami miar okresowych względem zbieżności Feldmana-Katoka, a zatem są one luźno kroneckerowskie, w szczególności są ergodyczne i mają entropię zerową. Opisano również nośnik takiej miary jako granicę (w metryce Hausdorffa) nośników powyższych miar okresowych.

Wreszcie dochodzimy do rozdziału 4. Poświęcony jest on konstrukcji otwartego zbioru dyfeomorfizmów rozmaitości wymiaru co najmniej 3 (jednak nie każdej, rozmaitość występuje pod kwantyfikatorem szczególnym), z których każdy posiada miarę niehiperboliczną o dodatniej entropii i pełnym nośniku. Jest to rozwiązanie problemu postawionego przez Bochiego, Bonattiego i Díaza (rok 2016). Autorzy ci potrafili skonstruować miary niehiperboliczne o dodatniej entropii, ale bez kontroli nośników, lub miary o pełnym nośniku, ale bez kontroli entropii. Co prawda problem ten został pozytywnie rozstrzygnięty rok później przez Bonattiego, Díaza i Kwietniaka, jednak nieco innymi metodami. W rozprawie, stosując (w nieco ukryty sposób) zbieżność Feldmana–Katoka wykazano wręcz, że miary o pełnym nośniku uzyskane przez Bochiego, Bonattiego i Díaza mają dodatnią entropię. W tym celu dowodzi się twierdzenia o ciągłości entropii względem pseudometryki Feldmana–Katoka w pełnym układzie symbolicznym. Twierdzenie to różni się od podobnego twierdzenia z rozdziału 3 brakiem założenia o ergodyczności. Wydaje się zatem, że w rozdziale 3 założenie o ergodyczności, przynajmniej w przypadku układów symbolicznych, można opuścić. Nieco dziwi brak komentarza w tej sprawie. Rozdział kończy dosyć skomplikowany argument wykazujący, że niehiperboliczne miary z pracy Bochiego, Bonattiego i Díaza są granicami w sensie Feldmana–Katoka pewnych miar o entropii oddzielonej od zera. Wobec ciągłości entropii, daje to dodatnią entropię granicznych miar niehiperbolicznych.

Moja ocena merytorycznej zawartości rozprawy jest bardzo pozytywna. Rozwiązano kilka problemów otwartych (bądź przedstawiono niezależne rozwiązania problemów do niedawna otwartych) stawianych przez innych autorów będących autorytetami w dziedzinie układów dynamicznych. Autorka wykazała się kreatywnością i dobrym opanowaniem warsztatu matematycznego, posiada szeroką wiedzę na temat różnych pojęć i własności będących przedmiotem zainteresowania wielu współczesnych badaczy. Potrafi wiązać metody pochodzące z różnych poddziedzin teorii układów dynamicznych (i nie tylko) wprowadzać nowe użyteczne pojęcia i wypracowywać własne techniki dowodzenia. Lektura rozprawy szczególnie dobrze uzmysławia przydatność i dobre własności, być może nieco niedocenianej, pseudometryki Feldmana–Katoka. Wkład rozprawy do stanu zbadania pewnych aspektów układów dynamicznych uważam za wystarczająco bogaty na miarę doktoratu.

Strona merytoryczna pracy nie jest jednak wolna od pewnych niedociągnięć. Nie rzutują one na wartość przedstawionego dorobku, ale być może niektóre aspekty można było opracować nieco lepiej. Pewne rozumowania i rachunki wydają się przesadnie techniczne. Są przy tym nieprzyjemnie „suche", tzn. pozbawione szkicu idei, co powoduje, że czyta się je od linijki do linijki, a dopiero pod koniec czytelnik dowiaduje się, do czego służą poszczególne wyliczenia. Wtedy często okazuje się, że idea nie jest aż tak zawiła i odnosi się wrażenie, że dane rozumowanie można próbować uprościć. W innych przypadkach z kolei brakuje komentarzy dotyczących nasuwających się natychmiast pytań (o istotność założeń, o odwrócenie implikacji, itp.). Poniżej przytaczam konkretne uwagi powyższych dwóch rodzajów oraz pewne uwagi dotyczące strony redakcyjnej, jakie nasunęły mi się podczas lektury rozprawy (niektóre z nich już zasygnalizowałem, niemniej jednak teraz je powtórzę). Uwagi te uzupełniam o nasuwające się pytania.

- Rozdział 1. Miary luźno kroneckerowskie są wprowadzone we wstępie przy pomocy równoważności Kakutaniego. W rozdziale 1.16, pomimo że jest on zatytułowany „Równoważność Kakutaniego" podana jest zupełnie inna definicja (oraz kryterium Katoka), nieużywające tej równoważności. Brak jest informacji o równoważności tych definicji z oryginalną. Co więcej, w rozdziale tym nie ma żadnych innych odnośników do równoważności Kakutaniego, tak więc tytuł rozdziału wydaje się mało adekwatny. Ponadto (o czym już pisałem) brak jest komentarza, czy miary luźno kroneckerowskie mogą mieć widmo inne niż dyskretne. Pominięto milczeniem naturalne pytanie, czy każda miara luźno kroneckerowska jest granicą w sensie Feldmana–Katoka miar okresowych.

- Rozdział 2.2. Nie jest dla mnie jasne, czy bijekcja w definicji kontrolowanej odległości ma być rosnąca. W przykładzie 2.10 punkt (c) jest błędny. Duża górna gęstość Banacha nie gwarantuje kontrolowanej odległości. Dolna – tak.

- Rozdział 2.3. Czy znane są przykłady orbit, dla których zbiór quasi-generowanych miar niezmienniczych nie jest spójny? Jeśli nie, to może twierdzenie 2.16 jest (w odpowiednich układach) *charakteryzacją* zbiorów $\hat{\omega}(x)$?

- Rozdział 3.1. Definicja 3.11 powinna poprzedzać zdanie, które następuje po definicji 3.4 i uwagę 3.5.

- Rozdział 3.3. Zbieżność Feldmana–Katoka miar definiuje się przy pomocy quasi-orbit. Jest to dziwny dysonans, gdyż do tej pory w rozprawie mowa była o asymptotycznych pseudoorbitach w średniej. Mówi się co prawda, że każda quasi-orbita jest asymptotyczną pseudoorbitą w średniej, ale nie jest jasne dlaczego do definiowania zbieżności Feldmana–Katoka trzeba używać tych specjalnych pseudoorbit. Zwłaszcza, że sprawę załatwiłaby (na moje wyczucie prawdziwa) obserwacja, że każda asymptotyczna pseudoorbita w średniej jest w sensie Bezikowicza (a więc i Feldmana–Katoka) równoważna pewnej quasi-orbicie. Można by wtedy obyć się bez odwołania do quasi-orbit. Po definicji 3.29 powinno pojawić się zdanie o tym, że zbieżność Feldmana–Katoka miar implikuje zbieżność $*$-słabą, a to z kolei implikuje jednoznaczność granicy.

- Rozdział 3.4. Definicja 3.38 jest formalnie rzecz biorąc zbędnym powtórzeniem definicji 3.29.
- Rozdział 3.5 nasuwa następujące naturalne pytanie: czy rozkład ergodyczny (jako miara na zbiorze miar niezmienniczych) zachowuje się w sposób ciągły względem zbieżności Feldmana–Katoka. Na moje wyczucie powinno tak być, a zbieżność miar ergodycznych do miary ergodycznej byłaby tego przypadkiem szczególnym.
- Rozdział 3.6. Czy w twierdzeniu 3.44 założenie ergodyczności jest naprawdę konieczne? Twierdzenie 4.11 sugeruje (a może nawet implikuje), że – przynajmniej w przypadku symbolicznym – nie jest.
- Powtórka uwagi o tytule rozdziału. Rozdział 3.8 jest moim zdaniem zatytułowany myląco. Nie ma w nim słowa o równoważności Kakutaniego. Nawet jej zastosowanie do definiowania miar luźno kroneckerowskich zostało wyeliminowane poprzez stosowanie kryterium Katoka.
- Rozdział 4.1. Lemat 4.6 jest dobrze znany, dowód można śmiało pominąć. Lemat 4.8 jest niemal trywialny. Natomiast twierdzenie 4.10 w zacytowanej postaci jest fałszywe. Wystarczy w pełnym układzie symbolicznym nad $\{0, 1\}$ za A wziąć cylinder zera. Prawdziwa natomiast jest nierówność „$\leqslant$" i oszacowanie z prawej strony przez $h(T_A, \mu_A, \mathcal{P})$ plus czynnik który zmierza do zera wraz z miarą dopełnienia A (i to wystarczy w dowodzie twierdzenia 4.11). Mam ogólne wrażenie, że cały dowód twierdzenia 4.11 można istotnie uprościć (z niemal 8 stron do około 1, maksymalnie 2). Szczegółowe sugestie przekażę bezpośrednio autorce.
- Rozdział 4.2. Mam również sugestie co do możliwości znacznego skrócenia dowodu Lematu 4.16, choć idea pozostawałaby ta sama. W twierdzeniu 4.17 ciąg (k_n) jest całkowicie zbędny (można w jego miejsce przyjąć ciąg zer). Ponadto w późniejszym zastosowaniu ciąg (x_n) jest stały, a ciąg słów $(\underline{s}_n)$ jest ciągiem prefiksów jednego słowa nieskończonego. Myślę, że te drobne uogólnienia w lemacie, które nie są później stosowane, nie są aż tak wartościowe, aby dla nich dodatkowo komplikować i tak już zawiłe rozumowanie.

Oprócz wzmiankowanych powyżej drobnych niedoskonałości natury merytorycznej (i częściowo redakcyjnej) w pracy występuje spora liczba literówek.

Część z nich tkwi w tekście i te nie utrudniają zbytnio czytania, jednak kilka kryje się we wzorach i te powodują, że czasem treść matematyczna staje się wręcz niezrozumiała. Przyznam się, że w trakcie lektury kilkakrotnie musiałem kontaktować się z autorką, aby upewniła mnie, czy dobrze odgaduję, co i jak należy poprawić. W recenzji pominę listę literówek, przekażę je bezpośrednio autorce. Mam nadzieję, że przyczyni się to do poprawy jakości przygotowywanych przez nią w przyszłości publikacji.

Jak już wspomniałem, powyższe uchybienia nie rzutują na zawartość merytoryczną całej pracy. Są one, w mojej opinii, całkowicie dopuszczalne na etapie pisania rozprawy doktorskiej i jestem przekonany, że autorka będzie nadal doskonalić swój warsztat i umiejętności redakcyjne.

Wspomnę jeszcze, że Martha Łącka (Ubik) ma na swoim koncie 5 publikacji, a dwa dalsze preprinty oczekują na recenzje. Czyli, jak łatwo wywnioskować, oprócz wyników prezentowanych w rozprawie posiada ona również dorobek nieobjęty doktoratem. Ponadto jest współautorką 5 artykułów o charakterze przeglądowym lub popularno-naukowym. Jako studentka była laureatką Diamentowego Grantu, a jako doktorantka – grantu Preludium. Brała udział w licznych konferencjach, w tym międzynarodowych, na których niejednokrotnie prezentowała swoje wyniki. Tak więc jej aktywność naukowa jest bardziej niż zadawalająca. W środowisku badaczy układów dynamicznych jest osobą znaną.

Podsumowując, uważam, że przedstawiona praca spełnia wymogi ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim, a jej autorka reprezentuje poziom naukowy całkowicie uzasadniający uznanie jej za dobrą kandydatkę na doktora nauk matematycznych. W związku z tym deklaruję, iż popieram spodziewany wniosek o dopuszczenie Marthy Łąckiej (Ubik) do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

T. Downarowicz

Tomasz Downarowicz