RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR MARTHY ŁĄCKIEJ

ANNA ZDUNIK

1. Ogólne omówienie rozprawy

Rozprawa doktorska pani mgr Marthy Łąckiej jest spójnym zapisem szeregu wyników, z których większość jest już opublikowana badź jest dostępna w formie preprintów. Część wyników została otrzymana we współpracy z D. Kwietniakiem (promotorem omawianej pracy doktorskiej), P. Oprochą, M. Straszak. Część, (w tym nieopublikowane jeszcze wyniki rozdziału 4.2) pochodzi zaś z prac bez współautorów.

Głównym wątkiem rozprawy jest zbadanie i zastosowanie nowego rodzaju dynamicznie generowanej pseudometryki (Feldmana -Katoka), i określonej w języku tej pseudometryki zbieżności w przestrzeni miar niezmienniczych dla danego układu dynamicznego. To narzędzie (między innymi) posłużyło do uzyskania kilku istotnych rezultatów, które opisuję i komentuję poniżej.

2. Omówienie zawartości rozprawy. Uwagi.

2.1. **Rozdział 1.** Obszerny rozdział 1 jest poświęcony wprowadzeniu narzędzi o pojęć, które są używane w dalszej części pracy. Moją uwagę zwróciły tu m.in. ciekawe (i pochodzące z publikacji Autorki ze współautorami) pojęcie asymptotycznej pseudoorbity w średniej i asymptotycznego śledzenia w średniej.

Autorka wprowadza też w tym rozdziale m.in. pojęcie układu *luźno kroneckerowskiego* i przywołuje (mało znane) skuteczne kryterium sprawdzania tej własności, pochodzące od A. Katoka.

Uwagi do rozdziału 1. Tu drobna uwaga czytelnika: pojęć i oznaczeń jest bardzo dużo. W dalszej lekturze czytelnik, natrafając na oznaczenie - cofa się do pierwszego rozdziału i, po przejrzeniu kilkunastu stron- w końcu znajduje objaśnienie tego pojęcia. Łatwiej czytałoby się pracę, gdyby Autorka (nawet kosztem pewnego wydłużenia pierwszego rozdziału) nadała więcej etykiet (numerów) kolejnym pojęciom i definicjom, i potem się do tych etykiet odwoływała w tekście.

Definicja 1.6: nie wyjaśniono że chodzi o rzutowania na poszczególne współrzędne, czyli o miary brzegowe.

W definicji 1.7 zabrakło wyjaśnienia że $\overline{f}$ jest rzeczywiście metryką (a nie pseudometryką).

2.2. **Rozdział 2.**

Rozdział 2 rozprawy opiera się prawie w całości na publikacji Autorki wspólnej z D. Kwietniakiem i P.Oprochą (pozycja [45] w spisie literatury).

Wprowadza się pseudometrykę (pseudometrykę Besicovitcha) D_B na przestrzeni nieskończonych ciągów o elementach w X i równoważną jej, nieco inaczej zdefiniowaną pseudometrykę D'_B. Służą one do zdefiniowania naturalnej, i zależącej od dynamiki, pseudometryki (a właściwie- znowu dwóch pseudometryk) na X: aby zmierzyć (pseudo)odległość dwóch punktów, mierzymy (pseudo) odległość Besicovitcha ich orbit pod działaniem układu dynamicznego T.

Twierdzenie 2.6 w pracy, należące, jak pisze Autorka, do *folkloru*, pozwala sprowadzić wyznaczanie wartość pseudoodległości D_B między punktami x, x' na przestrzeni dynamicznej X do wyznaczania supremum wartości pseudometryki D_B w $\mathbb{R}^\infty$ na ciągach wartości *funkcji próbnych* f wzdłuż trajektorii odpowiednio x i x'. Klasa funkcji próbnych $\mathcal{F}$ spełnia naturalne warunki równociągłości i rozdzielania punktów przez funkcje postaci $f \circ T^j$, $f \in \mathcal{F}$.

Łatwe w dowodzie ale ważne Twierdzenie 2.12 wyraża regularność przyporządkowania punktowi $x \in X$ zbiór $\hat{\omega}(x)$. Jest to zbiór punktów skupienia średnich delt Diraca wzdłuż trajektorii punkut x, a zatem - podzbiór zbioru miar niezmienniczych dla T, czyli zwarty podzbiór przestrzeni miar probabilistycznych na X. Słaba -* topologia w $\mathcal{M}(X)$ jest metryzowalna; można więc mówić o metryce Hausdorffa w przestrzeni jej zwartych podzbiorów.

Twierdzenie 2.12 orzeka że przyporządkowanie $x \mapsto \hat{\omega}(x)$ jest ciągłe, jeśli w X rozpatrujemy dynanicznie zdefiniowaną pseudometrykę Besicovitcha D_B, zaś w $\mathcal{M}(X)$- opisana powyżej metrykę Hausdorffa.

Krótki podrozdział 2.3 poświęcony jest wykazaniu że (dość oczekiwana) własność: *każda miara niezmiennicza ma punkt generyczny* - jest implikowana przez (dość naturalną, choć zawile się definiującą) *relatywną własność asymptotycznego śledzenia w średniej.* (Faktycznie, Twierdzenie 2.16 sformułowane w pracy mówi nieco więcej.)

Kolejny podrozdział 2.4 wskazuje, między innymi na dalsze możliwe zastosowania powyższego twierdzenia. Autorka bada związki między własnością *asymptotycznego śledzenia w średniej* i *słabej specyfikacji.* Dowodzi, że dla suriektywnego układu dynamicznego na zwartej przestrzeni metrycznej ze słabej specyfikacji wynika asymptotyczne śledzenie w średniej (Twierdzenie 2.23). W szczególności, wynika stąd, że relatywna własność słabej specyfikacji implikuje relatywną własność śledzenia w średniej, a więc - również tezę Twierdzenia 2.16.

Starannie zapisany dowód został zredagowany na potrzeby rozprawy; w publikacji Autorki ze współautorami [45] jest zamieszczony tylko szkic.

Podoba mi się starannie opisany i pomysłowy przykład 2.25, pokazujący że założenie własność relatywnego asymptotycznego śledzenia w średniej jest naprawdę słabsze od założenia własności asymptotycznego śledzenia w średniej.

Uwagi do rozdziału 2. Drobna uwaga: w kilku miejscach rozdziału Autorka powołuje się na Lemat 2.2, podczas gdy chodzi o Twierdzenie 2.2.

Na początku dowodu Twierdzenia 2.6 rodzinę rozdzielającą punkty postaci $f \circ T^j$, $f \in \mathcal{F}$ zastępuje się jej przeliczalną podrodziną, powołując się, bez wystarczającego wyjaśnienia, na zwartość przestrzeni.

Końcówka dowodu twierdzenia 2.6 (począwszy od akapitu: "Rozumowanie z dowodu lematu 2.2..."jest nieco zbyt skrótowa, i wymaga od czytelnika dopisania brakujących argumentów.

Przykład 2.10 odwołuje się bez podania odsyłaczy do niezdefiniowanych wcześniej i mało znanych pojęć górnej gęstości logarytmicznej, górnej gęstości Banacha i górnej gęstości Schnirelmanna.

Pytanie: czy Wniosku 2.13 nie da się wyprowadzić bezpośrednio z definicji pseudometryki D_B?

Dowód Twierdzenia 2.16 jest napisany w niewystarczająco szczegółowy sposób. Po pierwsze (drobiazg) referencja, oznaczona [?] to zapewne pozycja [71]? Poza tym, należało wyjaśnić jak z dowodu przedstawionego przez Sigmunda ma wynikać że znaleziona przez niego asymptotyczna pseudoorbita w średniej jest żądanej postaci, która pozwala ostatecznie (używając własności *relatywnego asymptotycznego śledzenia w średniej*) wywnioskować istnienie punktu generycznego.

Nie do końca rozumiem Wniosek 2.24. Jak mi się wydaje, Autorka ma na myśli następujący ciąg rozumowań: z relatywnej własności specyfikacji wynika relatywna własność śledzenia w średniej. Patrzymy następnie na twierdzenie 2.16, a raczej na jego dowód, który rozpoczyna się odwołaniem do pracy Sigmunda. Jesli V jest takie jak w twierdzeniu to istnieje asymptotyczna pseudoorbita w średniej, dla której $\hat{\omega}(\underline{z})) = V$. A stąd, i z własności asymptotycznego śledzenia w średniej- istnieje również punkt x taki że $\hat{\omega}(x) = \hat{\omega}(\underline{z})$.

Jak ma wyglądać to rozumowanie gdy zaczynamy od asymptotycznej pseudoorbity $\underline{z}$?

2.3. **Rozdział 3.**

Rozdział 3. pracy poświęcony jest zbadaniu własności dynamicznie generowanej pseudometryki Feldmana- Katoka. Autorka przedstawia kolejne kroki, budowanej wielostopniowo definicji i wyjaśnia związek tej metryki z wcześniej wprowadzoną metryką $\overline{f}$ w przypadku gdy $X = \mathcal{A}^\infty$, gdzie $\mathcal{A}$ jest skończonym alfabetem.

Wreszcie- w Lemacie 3.15 sprawdza, że $\overline{F}_K$ jest rzeczywiście pseudometryką.

Nietrudne w dowodzie Twierdzenie 3.19 pokazuje zależność między pseudometryką F_K i wcześniej zdefiniowanymi pseudometrykami Besicovitcha D_B i D'_B, co pozwala wyciągnąć wniosek że ze zbieżności względem D_B wynika zbieżność względem F_K.

Wniosek 3.24 razem z Wnioskiem 3.26 prowadzą łatwo do ważnej obserwacji: dla każdej asymptotycznej pseudoorbity w średniej $\underline{x}$ zbiór $\hat{\omega}(\underline{x})$ składa się z miar niezmienniczych.

W tym rozdziale Autorka wprowadza definicję nowego rodzaju zbieżności na przestrzeni $\mathcal{M}_T(X)$, która jest narzędziem dla kolejnych wyników. Definicja (Def. 3.29) używa pseudometryki Feldmana- Katoka. Zbieżność jest zadana przez podanie (dość zawiłego) warunku na zbieżność ciągu, wyrażonego w języku ciągu generycznych quasiorbit dla badanego ciągu miar i quasiorbity generycznej dla miary granicznej.

Interesujące Twierdzenie 3.31 wyraża własność *zupełności* (a raczej: własności analogicznej do zupełności) pseudometryki $\overline{F}_K$ obciętej do przestrzeni quasiorbit.

Z tym twierdzeniem wiąże się ciekawe pytanie sformułowane przez Autorkę jako komentarz: czy pseudometryka $\overline{F}_K$ na X (czyli: w przestrzeni orbit, a nie quasiorbit) jest zupełna?

W tym miejscu znów własność asymptotycznego śledzenia w średniej jest odpowiednia dla stwierdzenia, właściwie wprost z definicji, że dla układów z tą własnością metryka $\overline{F}_K$ jest zupełna na X.

Twierdzenie 3.36 mówi o związku nowej topologii ze słabą –* topologią. Wynika z niego m.in. że ze zbieżności ciągu miar względem $\overline{F}_K$ wynika słaba -* zbieżność.

Główny wynik tej części pracy to (naturalne w sformułowaniu, ale niełatwe w dowodzie) twierdzenie 3.43 mówiące że granica ciągu miar ergodycznych zbieżnego według pseudometryki $\overline{F}_K$ jest ergodyczna. Dla zbadania ergodyczności Autorka wykorzystuje wersję klasycznego twierdzenia Oxtoby'ego, które wyznacza warunki konieczne i wystarczające na ergodyczność miary dla którego dana trajektoria jest generyczna. Warunek jest wyrażony w języku tej trajektorii. Autorzy rozszerzają to kryterium na przypadek quasitrajektorii.

W tym twierdzeniu (w sformułowaniu) jest pewne zamieszanie, bo założenie spełniania warunku Cauch'ego przez ciąg miar względem $\overline{F}_K$ nie ma sensu (ma za to sens założenie mówiące że odpowiedni ciąg quasiorbit spełnia warunek Cauchy'ego, i o to zapewne chodziło Autorce).

W subtelnym dowodzie twierdzenia o ergodyczności miary granicznej podobał mi się zwłaszcza Lemat 3.42.

Najważniejszy zapewne wynik tego rozdziału to Twierdzenie 3.44. Teza jest bardzo ogólna: gdy ciąg miar zbiega w sensie $\underline{F}_K$ do miary granicznej, entropia zachowuje się w sposób dolnie półciągły. To ważne ogólne twierdzenie jest uzupełnione dobrym komentarzem o tym kiedy mamy górną połciągłość i prostym przykładem pokazującym że w ogólnym przypadku - nie ma ciągłości.

Dowód opiera się na naturalnie skonstruowanym, ale niełatwym Lemacie 3.45. Mając rozbicie borelowskie zastępujemy je bliskim rozbiciem na zbiory zwarte dobrze aproksymujące z dolu elementy pokrycia i *resztę*. Używając kodowania przy pomocy tego rozbicia, otrzymujemy miary μ'_n i μ' na przestrzeni nieskończonych ciągów o skończonym alfabecie. Tutaj jednak mamy już (twierdzenie 1.10 ze wstępnego rozdziału) jednostajnie ciągłą zależność entropii od metryki względem metryki $\overline{f}$.

Cały zapis dowodu Twierdzenia 3.44 i głównego lematu 3.45 bardzo mi się podobał.

Twierdzenie 3.48 (nie publikowane dotąd) formułuje odpowiedź na naturalne pytanie: jak wygląda nośnik miary która jest granicą ciągu miar skupionych na punktach okresowych, spełniającego warunek Cauchy'ego w sensie $\overline{F}_K$. Jak można się spodziewać, przy nałożeniu odpowiednich warunków rachunkowych, nośnikiem miary granicznej jest Lim top suppμ_n.

Kolejny ważny rezultat tego rozdziału to Twierdzenie 3.51, zawierający dowód następującego twierdzenia: granica miar okresowych w sensie topologii $\overline{F}_K$ jest luźno kroneckerowska.

Podoba mi się Lemat 3.53, który zwraca uwagę na subtelność definicji metryki $\overline{f}$ na miarach niezmienniczych na przestrzeni symbolicznej (wyrażającej się przez pseudometryki metryki $\overline{f}_n, \overline{f}, \hat{f}$ w przestrzeni symbolicznej). Lemat ten rozumiem jako dopełnienie Lematu 1.8 sformułowanego we Wstępie pracy.

Dowód luźnej kroneckerowskości opiera się na zastosowaniu, oprócz powyższego lematu, i wcześniejszego Lematu 3.45, kryterium Katoka oraz ciekawego (i nieoczywistego) lematu pochodzącego z pracy Ornsteina, Rudolpha i Weissa (Lemat 1.8 we wstępie pracy), który wskazuje że dla szacowania z góry odległości $\overline{f}$ między miarami wystarczy znaleźć dwa punkty generyczne dla tych miar, i oszacować z góry odległość $\overline{f}$ między nimi.

Ostatni podrozdział rozdziału 3 odpowiada na otwarte pytanie dotyczące entropii miar *królewskich*, skonstruowanych i używanych w pracach Gorodeckiego

Iljaszenki, Klepcyna, Nalskiego w pracach [32] i [40]. Ta konstrukcja doprowadziła ich do zbudowania ergodycznych miar niehiperbolicznych dla otwartego podzbioru dyfeomorfizmów torusa. Pytanie o entropię tak skonstruowanych miar jest więc bardzo naturalne.

Wysoko oceniam zatem uzyskany w tym podrozdziale rezultat. Przedstawiony dowód pokazuje też użyteczność wprowadzonej i badanej w pracy topologii w przestrzeni miar niezmienniczych zadanej przez pseudometrykę $\overline{F}_K$. Każdą miarę królewską można, jak wykazano w pracy przedstawić jak $\overline{F}_K$ – granicę ciągu miar okresowych. Stąd , i z poprzednich wyników płyną od razu dwa wnioski: ergodyczność miary królewskiej oraz własność *luźnej kroneckerowskości*, a stąd- w szczególności - zerowa entropia każdej takiej miary.

Uwagi do rozdziału 3.

str. 35, tekst po definicji 3.4 powinien , jak sądzę, pojawić się poźniej, to znaczy po wprowadzeniu pseudometryki $\overline{F}_K$ Feldmana- Katoka na X^∞.

Definicję 3.22 (quasiorbita) można było dodatkowo umieścić w pierwszym, wstępnym rozdziale. Oszczędziłoby to czytelnikowi poszukiwań tej definicji, gdy tekst odwołuje się do niej na kolejnych stronach.

Wniosek 3.24. Zgaduję że D_P to metryka Prochorowa?

Uwaga 3.25 to raczej (proste) stwierdzenie, wymagające (prostego) uzasadnienia? Podobnie- Uwaga 3.33.

str 43, l 12. Tu powinien być raczej odsyłacz do Twierdzenia 3.36 (a nie 3.32).

Wniosek 3.37 nie jest klarownie sformułowany. Należałoby napisać że ciąg tych punktów generycznych jest związany z ciągiem miar μ^n niezmienniczych. Ich słaba granica jest też niezmiennicza- i stąd teza. Z tego Wniosku (lub z Lematu 3.35) wynika też, że pojęcie zbieżności miar względem pseudometryki $\overline{F}_K$ jest dobrze zdefiniowane, to znaczy że granica jest wyznaczona jednoznacznie.

Tej uwagi brakuje przy definicji 3.29– czytelnik zastanawia się czy wskazanie quasiorbity $\underline{z}$ wyznacza jednoznacznie miarę graniczną, to znaczy- czy jeśli $\underline{z}, \underline{w}$ są dwiema quasigenerycznymi orbitami dla dwóch miar μ i ν, i $\overline{F}_K(\underline{z}, \underline{w}) = 0$ to $\mu = \nu$.

Dowód lematu 3.45 . Zbiory Q_J nie są zdefiniowane. Zapewne powinno być $\mathcal{R}_j$?

W dowodzie Twierdzenia 3.48 panuje drobne (naprawialne) zamieszanie. Po pierwsze, napis *Niech* $x'_n = T^j(x_{k_n})$ jest bardzo mylący, bo sugeruje że właśnie definiujemy punkt x'_n, podczas gdy chodzi po prostu o to że x'_n jest w orbicie punktu okresowego x_{k_n}, więc *istnieje takie j że....*

Po drugie, w warunku sformułowanym w założeniu twierdzenia, warto by napisać że *dla każdego n* żądane infimum jest dodatnie (warto by też zwrócić uwagę, że nie oczekujemy jednostajnego oddzielenia tego infimum od zera ze względu na n.

Ponadto, formuła w l-6, strona 51 jest niepoprawna, bo x_m i x_n należą do dwóch różnych orbit okresowych. Powinno być zapewne $T^j(x'_n) = (x'_n)$ (bądź $T^{\pi(j)}x'_n = x'_n$?

W przykładzie 3.49: zapewne $b = 1/2^n$?

Ze względu na wagę Lematu 1.8 w dowodzie Twierdzenia 3.51- wskazane byłoby lepsze uzasadnienie tego lematu we wstępie pracy (np. przywołanie Prop 2.6 i Prop. 2.7 z pracy [54]).

2.4. **Rozdział 4.**

Ponieważ wszystkie miary królewskie mają zerową entropię, naturalne jest pytanie o istnienie niehiperbolicznych miar niezmienniczych dla dyfeomorfizmów, o dodatniej entropii. Naturalne jest też pytanie o nośnik tych miar. Odpowiedź na to pytanie została częściowo udzielona w najnowszych pracach ([8] i [9] w bibliografii). Wyniki rozdziału 4 rozprawy znakomicie wpisują się w ten cykl rezultatów. Można z nich między innymi wywnioskować że niehiperboliczne miary skonstruowane w pracy [8], o których wiadomo że mają pełny nośnik, mają też dodatnią entropię.

Głównym wynikiem podrozdziału 4.1 (otrzymanym we współpracy z promotorem) jest ładne i ogólne - w szczególności nie zakładające ergodyczności Twierdzenie 4.11, które wyraża ciągłość entropii miary względem odległości $\overline{f}$ (na punktach generycznych względem badanych miar).

W dowodzie tego faktu pojawiła się, w nadesłanej mi wersji pracy, usterka.

Usterka ta jest naprawialna, w narzucający się, naturalny sposób, choć dowód traci nieco na prostocie. Przekonałam się że Autorka ma świadomość wspomnianej niedokładności, i wie dokładnie jak ją naprawić.

Wyjaśnię poniżej na czym to niedopatrzenie polegało. W pracy używa się znanego wzoru Abramowa na entropię dla przekształcenia pierwszego powrotu. Wzór Abramowa można próbować napisać już *na poziomie rozbić*, to znaczymając rozbicie zbioru A (do którego powrót rozpatrujemy), dokładamy jako ostatni element rozbicia uzupełnenie $X \setminus A$ i otrzymujemy rozbicie X. Możemy więc porównywać entropię T_A na rozbiciu zbioru A i entropię T na tym uzupełnionym rozbiciu i oczekiwać spełnienia formuły Abramowa, tj. uzasadniać że ta druga entropia jest równa pierwsze, pomnożonej przez miarę A. Tak jest, ale przy pewnym założeniu o rozbiciu $\mathcal{P}$, ktore to założenie w dowodzie formuły uzyskuje się rozdrabniając wyjściowe pokrycie. Ponadto, formalnie- dowód wymaga odwracalności przekształcenia (to jednak nie stanowi problemu; można układ symboliczny rozszerzyć do dwustronnego przesunięcia).

Dowód ciągłości entropii jest niełatwy i pomysłowy, i opiera się na nieoczywistej konstrukcji dodatkowej przestrzeni symbolicznej (a właściwie- produktu takich przestrzeni), i na wykorzystaniu konstrukcji zawieszenia nad funkcją określoną na tej przestrzeni. Konstrukcja ta ma opisywać obserwację trajektorii dwóch punktów (ciągów w przestrzeni symbolicznej), które są generyczne dla dwóch porównywanych miar, i bliskie w $\overline{f}$ metryce, co oznacza że są długie, jednakowo wyglądające (pod) sekwencje w tych ciągach. Funkcja ta- tak rozumiem konstrukcję- ma mierzyć jak długie są odstępy między tymi jednakowymi sekwencjami.

Na tej przestrzeni rozpatruje się miarę niezmienniczą -dowolną miarę otrzymaną jako punkt skupienia średnich delt wzdłuż trajektorii punktu (pary punktów) oznaczanego $(\hat{x}, \hat{x}')$, a następnie zawieszenie układu z tą miarą, wyznaczone przez wprowadzoną funkcję.

Niedokładność w dowodzie polegała na tym, że wzór Abramowa był stosowany do rozbicia, ktore nie musi spełniać dodatkowego warunku wynikającego z dowodu twierdzenia Abramowa. Dowód, jak wspomniałam, można poprawić, modyfikując to rozbicie (rozdrabniając), i pracując z tym rozdrobnionym rozbiciem. Otrzymałam od Autorki wystarczające i szczegółowe wyjaśnienie dotyczące tej modyfikacji.

Ostatni podrozdział pracy jest poświęcony konstrukcji żądanej miary niehiperbolicznej- z dodatnią entropią i pełnym nośnikiem. Kluczowy jest tu techniczny, i pomysłowo przeprowadzony Lemat 4.16. Podoba mi się przeprowadzona explicite konstrukcja szukanych generycznych , i odpowiednio bliskich w quasimetryce $\overline{f}$ słów.

Drugim kluczowym punktem dowodu jest twierdzenie 4.17, które pozwala szacować z dołu entropię otrzymanej miary na przestrzeni dynamicznej. Dowód wykorzystuje w istotny sposób udowodnioną wcześniej ciągłość entropii jako funkcji miary, względem rozpatrywanej topologii.

Uwagi do Rozdziału 4.

Szkoda że nie zdefiniowano zerowymiarowego układu dynamicznego (wystarczyłaby referencja).

Dowód Lematu 4.9 str 62 l -8. Powinno być dla $t \leq m$, nie dla $t \in \mathbb{N}$.

W dowodzie Twierdzenia 4.11 punkt $\hat{x}'_n$ powinien, jak sądzę, mieć postać:

$$\hat{x}'_n = x'_{i'_n} x'_{i'_n+1} \dots x_{i'_{n+1}-1}$$

Pierwsze zdanie dowodu Twierdzenia 4.17. Mowa tu o orbicie x, podczas gdy w sformułowaniu twierdzenia jest mowa o ciągach x_n. Zapewne powinno tu być domknięcie sumy trajektorii x_n?

str 71 l 1 Powinno być $\mathfrak{p}(w^{(n)})$.
str. 71 l.5 Nierówność $h(\tilde{\omega}) \geq h(\tilde{\nu})/M_1$ wymagałaby uzasadnienia.

3. Ocena wyników rozprawy i podsumowanie

Przedstawioną mi do oceny rozprawę oceniam zdecydowanie pozytywnie.

Autorka przedstawiła szereg rezultatów, z których część była uzyskana ze współpracownikami. Niektóre wyniki zostały już opublikowane (pozycje [44,45,49] w bibliografii). Część jest obecna w preprintach, a wyniki ostatniego, czwartego rozdziału będą zapewne spisane w najbliższym czasie. Wszystkie wyniki rozprawy zasługują na publikację.

Wyniki dotyczą aktualnej tematyki, uprawianej intensywnie w ostatnich latach. Dotyczy to zarówno tematyki związanej z rozdziałem 4 (tu warto wspomnieć niedawne prace [7–12]) jak i tematyki związanej z dynamiką topologiczną, której poświęcone są rozdziały 2 i 3. Ciekawe wydaje mi się wprowadzenie i zbadanie dynamicznie zdefiniowanej zbieżności w przestrzeni miar niezmienniczych, i jej zastosowania do dowodów wyników zawartych w rozprawie.

Praca ma pewne usterki redakcyjne (zauważone -opisałam w uwagach do poszczególnych rozdziałów). Jedyna poważniejsza usterka dotyczy opisanego przeoczenia w rozdziale 4, które jednak jest usuwalne kosztem dość naturalnej modyfikacji dowodu. W ogóle- cały rozdział 4 robi wrażenie spisywanego w pewnym pośpiechu. Na pewno przyda mu się dodatkowe uporządkowanie, i na pewno to uporządkowanie nastąpi przy zapisywaniu tej części pracy do publikacji.

Te krytyczne uwagi nie zmniejszają mojej zdecydowanie pozytywnej oceny. Praca zawiera ciekawe i odważne pomysły oraz niełatwe konstrukcje, które prowadzą do ważnych i aktualnych wyników.

Z pewnością praca spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę więc o dopuszczenie Doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Wnoszę też o wyróżnienie rozprawy.

Anna Zdunik, Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa

Anna Zdunik