Streszczenie

Głównym celem rozprawy jest przedstawienie i rozwinięcie teorii pseudometryk dynamicznie generowanych: Besicovitcha oraz Feldmana-Katoka oraz zastosowanie ich do badania niehiperbolicznych miar ergodycznych rozmaitości gładkich.

Na początku omawiamy pseudometrykę Besicovitcha. Jest ona analogonem pseudometryki $\bar{d}$ zdefiniowanej na przestrzeni symbolicznej i mierzącej asymptotyczną gęstość zbioru, na którym różnią się dane ciągi. Uzyskane rezultaty wykorzystujemy do konstrukcji punktów generycznych: dowodzimy, że jeżeli układ dynamiczny spełnia relatywną własność asymptotycznego śledzenia w średniej, to każda miara niezmiennicza ma punkt generyczny.

Następnie opisujemy wprowadzoną przez nas pseudometrykę Feldmana-Katoka $\bar{F}_K$ i dowodzimy, że entropia wprowadzonych przez Gorodeckiego, Iljaszenkę, Klepcyna i Nalskiego miar królewskich wynosi zero oraz charakteryzujemy te miary z dokładnością do relacji równoważności Kakutaniego, dowodząc, że każda nieokresowa miara królewska jest miarą luźno Kroneckera. Rozwiązuje to problem otwarty postawiony przez J. Buzziego. Pokazujemy też, że jeśli ciąg quasiorbit generycznych $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dla miar ergodycznych zmierza do pewnej quasiorbity względem $\bar{F}_K$, to quasiorbita ta jest generyczna dla pewnej miary ergodycznej μ. W powyższej sytuacji mówimy, że *miary generowane przez* $\underline{x}_n$ *zmierzają do* μ *względem* $\bar{F}_K$ przy $n \to \infty$. Wykazujemy również, że funkcja entropii jest półciągła z dołu względem $\bar{F}_K$. Jeśli założymy dodatkowo, że jest ona górnie półciągła względem *słabej topologii (co ma miejsce np. w układach symbolicznych), to jest ona ciągła względem $\bar{F}_K$. Dowodzimy także, że ciąg Cauchy'ego względem $\bar{F}_K$ miar okresowych zmierza albo do miary okresowej albo do luźnej miary Kroneckera. Następnie skupiamy się na miarach królewskich. Własności tych miar (poza ergodycznością i istnieniem zerowego wykładnika Lapunowa) nie były dotychczas znane. Stosując wprowadzoną przez nas pseudometrykę Feldmana-Katoka wykazujemy, że wszystkie miary królewskie są luźnymi miarami Kroneckera (w szczególności mają zerową entropię).

Bonatti, Bochi i Díaz postawili hipotezę, że da każdej zwartej rozmaitości bez brzegu $\mathcal{M}$ o wymiarze co najmniej 3 istnieje taki zbiór otwarty $U \subset \mathrm{Diff}(\mathcal{M})$, że dla każdego $T \in U$ istnieje ergodyczna miara niehiperboliczna o pełnym nośniku i dodatniej entropii. Hipoteza ta została wykazana po raz pierwszy przez Bonattiego, Diaza i Kwietniaka w 2017 roku. W rozprawie podajemy jej alternatywny dowód.

Na koniec wykazujemy, że dla szerokiej klasy produktów skośnych shiftu Bernoulliego z okręgiem istnieje miara królewska izomorficzna z ergodycznym obrotem nieskończonej grupy topologicznej. W tym celu dowodzimy, że granica w sensie pseudometryki Besicovitcha ciągu miar okresowych ma proste dyskretne wymierne widmo oraz, że występującą w literaturze konstrukcję miar królewskich można zmodyfikować tak, aby otrzymać zbieżne w sensie pseudometryki Besicovitcha ciągi miar okresowych.

M. Łącka

Abstract

This thesis describes and develops the dynamically defined pseudometrics theory and apply it to the study of non-hyperbolic ergodic measures.

We use our results concerning the Besicovitch pseudometric to construct generic points of (not necessarily ergodic) measures that are invariant for the map which satisfies the relative asymptotic average shadowing property.

Furthermore, we define the Feldman-Katok pseudometric $\bar{F}_K$ and prove that the entropy of defined by Gorodetsky, Ilyashenko, Klepcyn and Nalsky roal measures equals zero. We characterise them up to the Kakutani equivalence relation and prove that every non-periodic royal measure is loosely Kronecker. This solves an open problem posed by J. Buzzy. We show that if the sequence of ergodic quasi-orbits $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tends to a quasi-orbit with respect to $\bar{F}_K$, then the limit quasi-orbit is ergodic as well. We prove lower-semicontinuity of the entropy function with respect to $\bar{F}_K$. We show that a non-atomic $\bar{F}_K$-limit of periodic measures is loosely Kronecker. We apply these results to royal measures. We show that all of them are loosely Kronecker (and hence have zero entropy).

Bonatti, Bochi and Díaz conjectured that for every smooth compact manifold $\mathcal{M}$ with dimension at least 3 there exists an open set $U \subset \mathrm{Diff}(\mathcal{M})$ such that for every $T \in U$ there is an ergodic non-hyperbolic measure with a positive entropy and a full support. The conjecture was proved by Bonatti, Diaz and Kwietniak in 2017. Here we give an another proof.

We also show that for a big class of skew products of a Bernoulli shift and a cycle there exists a royal measure that is isomorphic to an ergodic rotation on an infinite compact topological group. To do this we prove that a Besicovitch limit of periodic measures has a simple discrete rational spectrum and that the construction of royal measures can be modified so that the defining sequence of periodic measures was convergent with respect to the Besicovitch pseudometric.

M. Łącka