Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: j.grytczuk@mini.pw.edu.pl

Warszawa, 1 września 2018

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego Tomasza Krawczyka

Na rozprawę habilitacyjną (tzw. *osiągnięcie*) dr. Tomasza Krawczyka, zatytułowaną *Algorytmy kolorowania i reprezentowania struktur kombinatorycznych*, składa się siedem prac, które autor podzielił na trzy tematyczne grupy. W pierwszej grupie znajdują się trzy prace dotyczące problemu podziału (kolorowania) zbioru częściowo uporządkowanego (w skrócie *porządku*) na łańcuchy. Klasyczne twierdzenie Dilwortha z roku 1950 orzeka, że każdy skończony porządek szerokości w można podzielić na w łańcuchów. Naturalne próby rozszerzenia tego wyniku na przypadek nieskończony doprowadziły do kwestii algorytmicznych związanych z efektywnością rozwiązania w przypadku skończonym. Niech $f(w)$ oznacza najmniejszą liczbę łańcuchów jaką utworzy algorytm *on-line* dokonujący podziału dowolnego porządku o szerokości w na bieżąco, kiedy porządek ten jest prezentowany punkt po punkcie. W odpowiedzi na pytanie Schmerla, Kierstead udowodnił w roku 1981, że $f(w) \leqslant (5^w - 1)/4$. Zauważmy, iż nie jest oczywiste a priori, że $f(w)$ jest skończone dla każdego w. Od tamtego czasu rezultat ten pozostawał niepobitym rekordem, pomimo usilnych prób podejmowanych przez wielu wybitnych kombinatoryków, aż do roku 2010 kiedy to Tomasz Krawczyk i Bartłomiej Bosek udowodnili, że $f(w) \leqslant w^{13 \log w}$, przełamując barierę wykładniczą. Jest to wynik spektakularny nie tylko ze względów historycznych, ale także pod względem prawdziwej finezji dowodowej, zarówno kombinatorycznej jak i algorytmicznej. Kluczowy pomysł polega na redukcji zagadnienia poprzez wprowadzenie pomocniczych struktur (tzw. porządków *regularnych*), oraz wykazanie, że $f(w) \leqslant w f_r(w)$, gdzie $f_r(w)$ jest zawężeniem funkcji f do porządków regularnych. Praca z tym rezultatem (w autoreferacie [A2]) była prezentowana na prestiżowej konferencji informatycznej FOCS 2010, a drukiem ukazała się w równie prestiżowym czasopiśmie *Combinatorica* w 2015.

Pozostałe dwie prace tej części rozprawy ([A1] i [A3]) dotyczą efektywności algorytmu zachłannego (*first-fit*) w odniesieniu do problemu podziału porządku na łańcuchy. W pierwszej z nich dowiedziono, że algorytm ten używa nie więcej niż $3kw^2$ łańcuchów dla tzw. porządków $(k+k)$-wolnych (czyli niezawierających porządku składającego się z dwóch niezależnych łańcuchów długości k jako podporządku indukowanego). Idee z tej pracy przyczyniły się znacząco do późniejszego sukcesu w oszacowaniu funkcji $f(w)$. W pracy [A3] wynik ten został uogólniony na dowolny zabroniony porządek szerokości 2, aczkolwiek wynikające z dowodu ograniczenie na liczbę łańcuchów nie jest już wielomianowe. Jest on jednak optymalny w tym sensie, że znane są przykłady porządków szerokości 3, dla których teza twierdzenia nie zachodzi. Dowody obu tych twierdzeń są ciekawe, podobnie jak w przypadku pracy [A2] polegają na pomysłowych redukcjach do porządków szczególnego typu. Wartość naukową obu prac oceniam wysoko. Ukazały się one w bardzo dobrym czasopiśmie *SIAM Journal of Discrete Mathematics*.

Druga część rozprawy składa się z dwóch prac [B1] i [B2] traktujących o kolorowaniu grafów reprezentowanych geometrycznie jako grafy przecięć rozmaitych figur na płaszczyźnie (odcinków, prostokątów, kół, etc.). Ogólny problem polega na rozpoznaniu czy dana klasa takich grafów jest χ-*ograniczona*, co oznacza, że liczba chromatyczna jest ograniczona w tej klasie od góry przez pewną funkcję liczby klikowej. Na przykład, grafy przedziałowe (czyli grafy przecięć odcinków na prostej) mają tę własność, podobnie jak wiele ich uogólnień na przypadek dwuwymiarowy (grafy przecięć prostokątów, kół, translacji ustalonego wielokąta, etc.). Do niedawna nie było jednak wiadomo jak rzecz się ma w przypadku nieco mniej regularnych struktur jak choćby grafów przecięć odcinków na płaszczyźnie. Otwarte było nawet najprostsze z możliwych pytań (zadane przez Erdősa) czy liczba chromatyczna takich grafów bez trójkąta jest skończona. W przełomowej pracy [D5] dowiedziono, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna podając odpowiednią konstrukcję, przypominającą nieco konstrukcję Mycielskiego grafów bez trójkąta o dowolnie dużej liczbie chromatycznej.

Główna idea polega na wykorzystaniu odpowiedniej struktury danych (tzw. *grafu rozgrywki*), pojawiającej się w naturalny sposób przy analizie algorytmów on-line kolorowania grafów czy porządków. To podejście okazało się niezwykle uniwersalne, okazuje się bowiem, że dla wielu problemów kolorowania on-line grafy rozgrywek są tożsame z grafami przecięć odpowiednich figur. Na przykład, grafy rozgrywek dla kolorowania on-line grafów przedziałowych pokrywają się z grafami przecięć prostokątów. Rozwijając tę metodę Tomasz Krawczyk (ze współautorami) uzyskał szereg imponujących, ogólnych wyników. Na przykład w pracy [D6] uogólniono rezultat dla odcinków na figury będące dowolnie przeskalowaną (w pionie lub w poziomie) kopią ustalonego zbioru zwartego i łukowo spójnego, za wyjątkiem prostokąta równoległego do osi. Wykazano ponadto, że dla każdego z takich kształtów istnieje n-wierzchołkowy graf przecięć o liczbie chromatycznej rzędu $\log\log n$. W pracy [B1] udowodniono, że oszacowanie to jest w ogólności asymptotycznie optymalne. Pokazano mianowicie, że liczba chromatyczna grafów przecięć tzw. *ramek* (czyli brzegów prostokątów równoległych do osi) bez trójkąta, jest rzędu $O(\log\log n)$, gdzie n jest liczbą wierzchołków grafu. Tę klasę możemy uzyskać równoważnie z grafów przecięć prostokątów przez usunięcie krawędzi między prostokątami zawierającymi się (są to tzw. *grafy nachodzeń*). Dowód tego twierdzenia rozwija metodę on-line wykorzystując dodatkowo specjalne dekompozycje grafów przecięć na grafy rozgrywek, oraz związane z nimi drzewowe struktur danych. Praca [B1] ukazała się w prestiżowym czasopiśmie *Discrete and Computational Geometry*.

Praca [B2] rozwija idee z [B1] jeszcze dalej nadając metodzie on-line szersze, formalne ramy. Dzięki temu udaje się autorom uzyskać szereg głębokich rezultatów dla rozmaitych klas grafów przecięć. W dowodach autorzy, Tomasz Krawczyk i Bartosz Walczak, umiejętnie wykorzystują również istniejące rezultaty dotyczące algorytmów on-line dla porządków. Dla przykładu, dowodzą oni ograniczenia górnego na liczbę chromatyczną pewnej podklasy grafów przecięć tzw. *włókien* (są to wykresy nieujemnych funkcji ciągłych na odcinku domkniętym o wartości zero na końcach). Ograniczenie to pokrywa się, ze znanym wynikiem Felsnera w problemie pokrycia łańcuchowego porządków, przy dodatkowej restrykcji dotyczącej prezentacji porządku w sposób narastający (przychodzący element musi być zawsze maksymalny w istniejącym fragmencie porządku). I nie jest to przypadek, albowiem, jak dowodzą autorzy, grafy rozgrywek w problemie Felsnera pokrywają się z interesującymi ich grafami przecięć włókien. Udowodnienie tej tożsamości klas nie jest oczywiście łatwe, wymaga niewątpliwie głębokiego rozeznania oraz wyśmienitej intuicji. Podobne rezultaty otrzymują autorzy dla grafów nachodzeń prostokątów oraz podrzew w drzewach. Mają one charakter ogólny, dotyczą bowiem grafów o dowolnej liczbie klikowej.

Oprócz tego praca [B2] wprowadza, chyba po raz pierwszy, pewne ciekawe uogólnienie tradycyjnego kolorowania grafów. Mianowicie, przy ustalonej liczbie k, szukamy kolorowania wierzchołków grafu, w którym żadna klasa koloru nie zawiera kliki na k wierzchołkach. Dla $k = 2$ warunek ten pokrywa się ze zwykłym warunkiem poprawności kolorowania. Motywacją badania tego typu kolorowania i związanej z nim liczby chromatycznej jest związek ze znaną hipotezą o gęstości grafów *quasi-planarnych* (są to grafy posiadające reprezentację na płaszczyźnie, w której liczba wzajemnie krzyżujących się krawędzi jest ograniczona). Okazuje się, że do udowodnienia tej hipotezy wystarczyłoby pokazać, że takie grafy mają "beztrójkątowe" kolorowanie przy użyciu skończonej liczby kolorów, zależącej jedynie od stopnia owej quasi-planarności. W pracy [B2] autorzy dowiedli tego dla grafów nachodzeń prostokątów, przy czym liczba kolorów zależy jedynie od liczby klikowej grafu. Ta pod wieloma względami imponująca praca ukazała się również w czasopiśmie *Combinatorica*.

Trzecia część rozprawy (prace [C1] i [C2]) dotyczy problemu rozszerzenia częściowej reprezentacji grafów przecięć. Zagadnienie polega na sprawdzeniu czy mając daną częściową reprezentację grafu przecięć (czyli reprezentację jego podgrafu indukowanego) możemy rozszerzyć ją do reprezentacji całego grafu. Jest to naturalne uogólnienie problemu rozpoznawania czy dany graf w ogóle należy do danej klasy grafów przecięć. W pracy [C1] dowiedziono, że problem rozszerzenia dla grafów *funkcyjnych* jest wielomianowy (są to grafy przecięć wykresów funkcji ciągłych na przedziale domkniętym o wartościach w $\mathbb{R}$). Klasa grafów funkcyjnych pokrywa się z klasą grafów nieporównywalności porządków, wynik ten uogólnia więc znane twierdzenia o wielomianowej rozpoznawalności grafów związanych z porządkami. Dowód polega na redukcji problemu do rozszerzania przechodniego częściowych orientacji grafu oraz umiejętnego zastosowania modularnych dekompozycji grafów. Jeżeli "częściowość" reprezentacji rozciągniemy również na reprezentujące funkcje, to wtedy problem rozszerzenia jest już NP-zupełny. Ponadto, w pracy [C1] znajduje się jeszcze dokładniejsze oszacowania złożoności tego problemu dla grafów *permutacji*, które stanowią ważną podklasę grafów funkcyjnych. W pracy [C2] autorzy stosują metodę modularnej dekompozycji do konstrukcji wielomianowego algorytmu w problemie rozszerzenia reprezentacji grafów *trapezowych*. Obie prace tej części rozprawy były prezentowane na bardzo dobrych konferencjach informatycznych (ESA 2012 i WG 2017) i zostały opublikowane w sprawozdaniach z tych konferencji, w serii *Lecture Notes in Computer Science*.

W pozostałym dorobku naukowym Tomasza Krawczyka znajduje się 10 prac o zróżnicowanej tematyce i wysokim poziomie naukowym, w większości porównywalnym z pracami wyróżnionymi w osiągnięciu. Ukazały się one w bardzo dobrych czasopismach naukowych (*Journal of Combinatorial Theory Ser. B, Discrete and Computational Geometry, Algorithmica, Order, Discrete Mathematics, Theoretical Computer Science*). Omówię te dokonania w skrócie, uwzględniając podział tematyczny z autoreferatu.

Tak więc cztery pierwsze prace ([D1-4]) dotyczą porządków. Jedna z nich to praca przeglądowa o problemie podziału porządku na łańcuchy, trzy pozostałe dotyczą pojęcia *wymiaru* porządku w wersji on-line. Z dotychczasowych badań wiadomo, że wymiar on-line jest nieograniczony już na porządkach wymiaru 2. Z drugiej strony zwykły wymiar nie przekracza szerokości porządku. Naturalnym zadaniem jest więc ograniczanie wymiaru on-line przez funkcję szerokości porządku. Wyniki omawianych prac znajdują takie ograniczenia dla rozmaitych klas porządków, czasami przy dodatkowych obostrzeniach na prezentację porządku.

Prace [D5-6] dotyczą kolorowania grafów reprezentowanych geometrycznie i są ściśle powiązane z pracami [B1-2]. Na szczególne docenienie zasługuje praca [D5] zawierająca rozwiązanie problemu Erdősa o liczbie chromatycznej grafów przecięć odcinków na płaszczyźnie. Zastosowana tam po raz pierwszy metoda on-line przyniosła wiele dalszych, głębokich rezultatów i z pewnością nie została całkowicie wyeksploatowana.

Praca [D7] jest z kolei połączona tematycznie z pracami [C1-2] z tezy habilitacyjnej. Traktuje o problemie rozszerzenia grafów planarnych w tzw. *modelu widoczności*. Główne twierdzenie orzeka, że problem ten jest NP-zupełny.

Praca [D8] dotyczy *rozgrywanego* kolorowania grafów. W modelu tym, inaczej niż w tematyce on-line, struktura jest dana z góry, natomiast gracze kolorują ją dążąc do przeciwnych celów: jeden chce użyć jak najmniej kolorów, drugi zaś jak najwięcej. Problem ten pojawił się w związku z próbami znalezienia nowego dowodu słynnego twierdzenia o czterech barwach. Autorzy pracy [D8] zajmują się wariantem asymetrycznym tej gry, w którym gracze mają zróżnicowaną liczbę ruchów. Otrzymane ograniczenia na rozgrywaną liczbę chromatyczną grafów nieporównywalności porządków zależą jedynie od liczby klikowej oraz stosunku parametrów ruchowych graczy.

Ostatnie dwie prace wymienione w autoreferacie Tomasza Krawczyka, [D9-10], dotyczą nieco innej tematyki tzw. *kodów kluczowych* i z związanych z nimi *retraktów*. Są to chronologicznie pierwsze jego prace badawcze związane z zarzuconą później tematyką pracy doktorskiej, mieszczącą się w dziedzinie *kombinatoryki na słowach*. Główny wynik pracy [D9] podaje warunek konieczny i dostateczny na to, aby *semiretrakt* (czyli przekrój dowolnej rodziny retraktów) miał ograniczony wymiar (rozumiany jako minimalna liczba retraktów w takim przekroju). Z kolei w pracy [D10] podano wielomianowy algorytm znajdujący reprezentację semiretraktu w postaci przekroju rodziny retraktów na tym samym zbiorze kluczy.

Przechodząc do konkluzji, uważam, że zarówno rozprawa habilitacyjna jak i pozostały dorobek naukowy Tomasza Krawczyka zasługują na najwyższe uznanie. Jego wyniki bez wątpienia stanowią ważny wkład w rozwój zarówno matematyki dyskretnej jak i informatyki teoretycznej. Na uznanie zasługuje również rozległa i owocna współpraca naukowa Tomasza Krawczyka, zarówno krajowa jak i zagraniczna. Wśród jego licznych współautorów znajdziemy wiele młodych osób z kraju i zagranicy, ale także wybitne sławy światowego formatu, jak Tom Trotter, Hal Kierstead, Stefan Felsner, czy Jan Kratochvil. Umiejętność pracy zespołowej uważam za cenną zaletę habilitanta dobrze wróżącą jego przyszłej opiece nad doktorantami. Popieram zatem wniosek o nadanie dr. Tomaszowi Krawczykowi stopnia doktora habilitowanego oraz wnioskuję o wyróżnienie jego rozprawy.

Jarosław Grytczuk