prof. dr hab. Oleksandr Gomilko
Wydział Matematyki
i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 13 marca 2013

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego dra Zenona Jabłońskiego

Na dorobek naukowy dra Zenona Jabłońskiego, w chwili obecnej, składa się 12 opublikowanych artykułów naukowych. Wszystkie prace zostały opublikowane w czasopismach matematycznych rangi międzynarodowej. Trzy z nich zostały opublikowane przed doktoratem lub wchodzą w jego skład.

W niniejszej recenzji skoncentruję się na ocenie dorobku naukowego uzyskanego przez Kandydata po doktoracie. Dorobek ten składa się z 4 prac tworzących rozprawę habilitacyjną oraz 5 prac poza rozprawą.

Ciągi dodatnio i ujemnie określone odgrywają bardzo ważną rolę w teorii operatorów na przestrzeniach Hilberta. Istnieją pewne klasy operatorów ograniczonych T na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, które mogą być scharakteryzowane poprzez zachowanie się ciągów liczbowych postaci $\{\|T^n f\|^2\}_{n\geqslant 0}$, $f \in \mathcal{H}$. Do tych klas można zaliczyć operatory subnormalne i całkowicie hiperekspansywne. Zauważmy, że ważną podklasą operatorów całkowicie hiperekspansywnych jest klasa 2-izometrii, to znaczy operatorów spełniających równość

$$\|T^2 f\|^2 - 2\|Tf\|^2 + \|f\|^2 = 0, \quad f \in \mathcal{H}.$$

W pracy [16] (numeracja prac jest zaczerpnięta z Autoreferatu) Kandydat bada przesunięcia ważone

$$T(f_0, f_1, f_2, \dots) = (0, T_0 f_0, T_1 f_1, \dots), \quad f = \oplus_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{D}(T)$$

na przestrzeni Hilberta $\ell^2(\mathcal{H})$. W omawianej pracy zostało wprowadzone pojęcie klasy $\ell^2_{IWP}(\mathcal{H})$ odwracalnych przesunięć ważonych, dla których produkty operatorów $T_n \cdots T_0$, $n \geqslant 0$, są operatorami dodatnimi na przestrzeni $\mathcal{H}$. Jednym z podstawowych rezultatów pracy jest charakteryzacja 2-izometrycznych odwracalnych przesunięć ważonych z dodatnimi produktami. Udowodniono, że jeśli $T_0 \geqslant I$ (warunek ten jest również koniecznym), to wówczas istnieje dokładnie jedna rodzina operatorów $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ taka, że ciąg $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem wag 2-izometrycznego operatora $T \in \ell^2_{IWP}(\mathcal{H})$. Ponadto, taka rodzina $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ składa się z przemiennych i dodatnich operatorów. Drugim istotnym wynikiem pracy [16] jest rozwiązanie problemu uzupełnień dla dwóch wag w klasie całkowicie hiperekspansywnych odwracalnych przesunięć ważonych z dodatnimi produktami. W rozdziale piątym pracy podano między innymi ciekawe przykłady 2-izometrycznych operatorowych przesunięć ważonych, które nie są unitarnie równoważne z sumą ortogonalną skalarnych przesunięć ważonych.

W pracy [18] koncepcja całkowitego k-wstecznego rozszerzenia dla operatorów subnormalnych została przeniesiona na klasę operatorów całkowicie hiperekspansywnych. Otrzymano stwierdzenie, które charakteryzuje całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenia całkowicie hiperekspansywnych skalarnych przesunięć ważonych w terminach miary borelowskiej stowarzyszonej z przesunięciem. Do charakteryzacji operatorów mających pełne hiperekspansywhe k-wsteczne rozszerzenie (Theorem 5.6) wykorzystano operatorową wersję representacji Levy-Chińczyna dla operatorów całkowicie hiperekspansywnych z pracy Kandydata [14]. Poza tym pokazano, że w klasie przesunięć skalarnych ważonych ich pełne całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenia charakteryzują się w prosty sposób.

Głównym wynikiem pracy [23] jest implementacja pewnych metod teorii grafów w teorii operatorów. Zrobiono to poprzez wprowadzenie nowej klasy operatorów - przesunięć ważonych na drzewach skierowanych.

Niech $\mathcal{G} = (V, E)$ będzie grafem skierowanym, tzn. V jest zbiorem wszystkich wierzchołków $\mathcal{G}$ oraz E oznacza zbiór wszystkich krawędzi $\mathcal{G}$. Graf skierowany $\mathcal{G}$ jest drzewem skierowanym, jeśli $\mathcal{G}$ jest spójny, nie ma pętli oraz każdy wierzchołek $v \in V^0 := V \setminus \mathrm{Root}(\mathcal{G})$ ma rodzica $\mathrm{par}(v)$.

Niech $\ell^2(V)$ będzie przestrzenią Hilberta wszystkich funkcji zespolonych sumowalnych z kwadratem na V (ze standardowym iloczynem skalarnym). Niech $\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^0}$, $\lambda_v \in \mathbb{C}$, wówczas operator S_λ na przestrzeni $\ell^2(V)$ definiuje się wzorem

$$\mathcal{D}(S_\lambda) = \{f \in \ell^2(V) : \ \Lambda_{\mathcal{G}} f \in \ell^2(V)\},$$

$$S_\lambda f = \Lambda_{\mathcal{G}} f, \quad f \in \mathcal{D}(S_\lambda),$$

gdzie odwzorowanie $\Lambda_{\mathcal{G}}$ jest zadane na funkcjach $f : V \to \mathbb{C}$ wzorem

$$(\Lambda_{\mathcal{G}} f)(v) = \lambda_v f(\mathrm{par}(v)), \quad v \in V^0, \quad (\Lambda_{\mathcal{G}} f)(v) = 0, \quad v = \mathrm{root}.$$

Tak zdefiniowany operator S_λ nazywa się przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathcal{G}$ z wagami $\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^0}$. W [23] pokazano, że z punktu widzenia teorii przestrzeni Hilberta, badanie przesunięć ważonych na drzewach skierowanych można sprowadzić do przypadku przesunięć ważonych z wagami nieujemnymi: przesunięcie S_λ jest unitarnie równoważne przesunięciu ważonemu $S_{|\lambda|}$ z wagami $|\lambda| = \{|\lambda_v|\}_{v\in V^0}$. Opisano postać rozkładu polarnego przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym.

W rozdziale 4 pracy [23] podane warunki charakteryzujące dla inkluzji $\mathcal{D}(S_\lambda) \subset \mathcal{D}(S_\lambda^*)$ oraz $\mathcal{D}(S_\lambda^*) \subset \mathcal{D}(S_\lambda)$ (Theorems 4.1.1 i 4.2.2). Następujący rezultat (Theorem 5.1.2 oraz Remark 5.1.5) charakteryzuje hiponormalne przesunięcia ważone na bezlistnych drzewach skierowanych: gęsto określony operator przesunięcia S_λ z niezerowymi wagami jest hiponormalnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{v \in \mathrm{Chi}(u)} \frac{|\lambda_v|^2}{\|S_\lambda e_v\|^2} \leqslant 1, \quad u \in V,$$

gdzie $e_v \in \ell^2(V)$ oznacza funkcję charakterystyczną jednoelementowego zbioru $\{v\}$. Bardziej subtelny problem charakteryzacji ko-hiponormalności przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym rozwiązano w Theorem 5.2.2. Podano również charakteryzację subnormalności przesunięcia w terminach ciągów momentów Stieltjesa (Theorem 6.1.3).

Klasyczne przesunięcia ważone są budowane na bardzo specjalnych drzewach skierowanych, które są scharakteryzowane własnością, że każdy wierzchołek posiada dokładnie jedno dziecko. W rozdziale 6 pracy [23] rozważano nieco bardziej skomplikowane drzewa skierowane, mianowicie takie, że każdy wierzchołek poza jednym ma dokładnie jedno dziecko, ten wyjatkowy wierzchołek jest wierzchołkiem rozgałęziającym. Dla danych $\eta, \kappa \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, $\eta \geqslant 2$, zdefiniowano drzewo skierowane $\mathcal{T}_{\eta,\kappa} = (V_{\eta,\kappa}, E_{\eta,\kappa})$ wzorami

$$V_{\eta,\kappa} = \{-k : k \in J_\kappa\} \cup \{0\} \cup \{(i,j) : i \in J_\eta,\ j \in \mathbb{N}\},$$

$$E_{\eta,\kappa} = E_\kappa \cup \{(0,(i,1)) : i \in J_\eta\} \cup \{(i,j),(i,j+1)) : i \in J_\eta,\ j \in \mathbb{N}\},$$

$$E_\kappa = \{(-k, -k+1) : k \in J_\kappa\},$$

gdzie $J_i = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant i\}$ dla $i \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Podano metodę konstruowania wszystkich ograniczonych subnormalnych przesunięć ważonych na drzewie skierowanym $\mathcal{T}_{\eta,\kappa}$ z niezerowymi wagami. Powiązano także subnormalność przesunięć ważonych na $\mathcal{T}_{\eta,\kappa}$ z jednostronnymi przesunięciami ważonymi, które posiadają subnormalne $(\kappa+1)$-wsteczne rozszerzenia.

W pracy [23] scharakteryzowano również drzewa skierowane dopuszczające przesunięcia ważone z zadanymi własnościami (gęsty obraz, hiponormalność, subnormalność, normalność).

Z znanego twierdzenia Lamberta wynika, że operator ograniczony S jest subnormalny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{S^n f\}_{n \geqslant 0}$ jest ciągiem Stieltjesa dla każdego $f \in \mathcal{H}$. Okazuje się jednak, że nieograniczone operatory S, które generują ciągi momentów Stieltjesa na $\mathcal{D}^\infty(S)$ już nie muszą być subnormalne. Praca [24] podaje przykład operatora domkniętego paranormalnego S, który nie jest hiponormalny (więc również nie jest subnormalny), a jednocześnie generuje ciągi Stieltjesa oraz ma własność, że $\mathcal{D}^\infty(S)$ jest rdzeniem dla potęg

S^n, $n \in \mathbb{N}$. Ten operator S zrealizowano jako przesunięcie ważone S_λ na drzewie skierowanym $\mathcal{T}_{\infty,\kappa}$ i jego konstrukcja opiera się na subtelnych własnościach niezdeterminowanych ciągów momentów Stieltjesa. Pokazano, że taki operator S może być również zrealizowany jako operator kompozycji na pewnej σ-skończonej przestrzeni L^2.

Prace Kandydata [17, 19, 20, 21], które nie znalazły się w rozprawie, dotyczą wielowymiarowego operatorowego problemu momentów. Praca [22] jest poświęcona badaniu operatorów hiperekspansywnych, w szczególności, problemu uzupełnień dla całkowicie hiperekspansywnych przesunięć ważonych.

W mojej opinii rezultaty przedstawione w autoreferacie ukazują Kandydata jako badacza o szerokich zainteresowaniach matematycznych oraz potrafiącego używać różnorodnych metod i narzędzi. Dr Zenon Jabłoński porusza się swobodnie po wielu działach matematyki i potrafi umiejętnie łączyć i stosować różne metody badań.

W ogólnym podsumowaniu należy pokreślić wysoki poziom merytoryczny i oryginalność badań Kandydata. Kluczowe prace opublikowane są w wysokiej klasy czasopismach, takich jak: *Mem. Amer. Math. Soc.*, *J. Functional Analysis*, *J. London Math. Soc.*, *Studia Mathematica*, *Proceedings of the American Mathematical Society*. Wyniki w nich zawarte referowane były na specjalistycznych międzynarodowych konferencjach naukowych. Dokonania Kandydata są szeroko znane społeczności matematycznej zajmującej się problemami teorii operatorów na przestrzeni Hilberta.

Podsumowując uważam, że rozprawa habilitacyjna dra Zenona Jabłońskiego stanowi znaczny wkład w rozwój teorii operatorów, a cały dorobek naukowy Kandydata jest znaczny i uzasadnia nadanie mu stopnia naukowego doktora habilitowanego.

Oleksandr Gomilko