

AUTOREFERAT

1. IMIĘ I NAZWISKO

Tomasz Krawczyk

2. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

- Doktor nauk matematycznych, dyscyplina: informatyka, Uniwersytet Jagielloński, 2005
Tytuł rozprawy: *Algorytmiczne własności kodów kluczowych*
- Magister informatyki, Uniwersytet Jagielloński, 2000

3. DOTYCHCZASOWE ZATRUDNIENIE W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- od 2008: Uniwersytet Jagielloński, adiunkt
- 2005–2008: Uniwersytet Jagielloński, asystent

4. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (Dz. U. z 2016 R. POZ. 882 ZE ZM. W Dz. U. z 2016 R. POZ. 1311.)

(a) Tytuł osiągnięcia naukowego:

Algorytmy kolorowania i reprezentowania struktur kombinatorycznych

(b) Lista prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

- [A1] Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk, Edward Szczyпка,
First-Fit algorithm for the on-line chain partitioning problem,
SIAM Journal on Discrete Mathematics 23 (4), 1992–1999, 2010.
- [A2] Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk,
A subexponential upper bound for the on-line chain partitioning problem,
Combinatorica 35 (1), 1–38, 2015.
Wersja konferencyjna¹:
Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk,
The subexponential upper bound for on-line chain partitioning,
51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2010), 347–354, 2010.
- [A3] Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki,
First-Fit coloring of incomparability graphs,
SIAM Journal on Discrete Mathematics 27 (1), 126–140, 2013.
Wersja konferencyjna:
Bartłomiej Bosek, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki,
Forbidden structures for efficient First-Fit chain partitioning (extended abstract),
European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2011),
Electronic Notes in Discrete Mathematics 38, 173–179, 2011.
- [B1] Tomasz Krawczyk, Arkadiusz Pawlik, Bartosz Walczak,
Coloring triangle-free rectangle overlap graphs with $O(\log \log n)$ colors,
Discrete and Computational Geometry 53 (1), 199–220, 2015.

¹Odniesienia do konkretnych twierdzeń numerowane są według wersji opublikowanej w czasopiśmie.

Wersja konferencyjna:

Tomasz Krawczyk, Arkadiusz Pawlik, Bartosz Walczak,
Coloring triangle-free rectangular frame intersection graphs with $O(\log \log n)$ colors,
39th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2013), *Lecture Notes in Computer Science* 8165, 333–344, Springer, 2013.

- [B2] Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
On-line approach to off-line coloring problems on graphs with geometric representations,
Combinatorica, 37 (6), 1139–1179, 2017.

Wersja konferencyjna:

Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
Coloring relatives of interval overlap graphs via on-line games,
41st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2014),
Part I, *Lecture Notes in Computer Science* 8572, 738–750, Springer, 2014.

- [C1] Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
Extending partial representations of function graphs and permutation graphs,
20th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2012), *Lecture Notes in Computer Science* 7501, 671–682, Springer, 2012.

- [C2] Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
Extending partial representations of trapezoid graphs,
43rd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2017), *Lecture Notes in Computer Science* 10520, 358–371, Springer, 2017.

- (c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania:

4.1. **Wstęp.** Problemy kolorowania i reprezentowania grafów zajmują centralne miejsce w algorytmicznej teorii grafów. Wiele pracy badawczej włożono w poszukiwanie wydajnych algorytmów kolorowania różnych klas grafów oraz sposobów i możliwości ich reprezentacji. W niniejszym opracowaniu koncentrujemy się na dwóch strukturach będących bogatym źródłem klas grafów użytecznych w informatyce:

- zbiorach częściowo uporządkowanych,
- geometrycznych grafach przecięć, których wierzchołkami są obiekty geometryczne (takie jak przedziały na prostej, koła czy prostokąty na płaszczyźnie), zaś krawędziami pary przecinających się obiektów.

Struktury te znajdują praktyczne zastosowania w problemach alokacji zasobów, szeregowania zadań, sekwencjonowania DNA, etykietowania map czy projektowania układów scalonych, które często sprowadzają się do właściwego pokolorowania odpowiedniej klasy grafów przecięć czy porządków. Są one również źródłem wielu intrygujących i często bardzo trudnych problemów algorytmicznych i kombinatorycznych.

Ważną klasę algorytmów kolorowania, szczególnie w kontekście opisanych powyżej zastosowań, stanowią algorytmy on-line. Algorytmy takie otrzymują na wejściu strukturę stopniowo, obiekt po obiekcie, i kolorują każdy obiekt struktury natychmiast po jego zaprezentowaniu, przed ujawnieniem kolejnych fragmentów struktury. Algorytmy on-line są przedmiotem badań pięciu prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego: pierwsze trzy [A1, A2, A3] dotyczą algorytmów on-line pokrywającego zbiory częściowo uporządkowane łańcuchami a w kolejnych dwóch [B1, B2] algorytmy te są wykorzystane jako narzędzie do szacowania liczby chromatycznej i konstruowania algorytmów kolorowania pewnych geometrycznych klas grafów przecięć.

Problem pokrywania on-line zbiorów częściowo uporządkowanych łańcuchami, rozważany w pracach [A1, A2, A3], został omówiony w sekcji 4.3. Najważniejsze pytanie w tym obszarze, postawione między innymi przez Trottera w sekcji *Partially ordered sets* książki *Handbook of Combinatorics* (patrz sekcja 3 w rozdziale 8 książki [31]), dotyczy istnienia algorytmu on-line pokrywającego porządku wielomianową liczbą łańcuchów w zależności od szerokości wprowadzanych porządków. Mój wkład w tę tematykę obejmuje skonstruowanie dwóch algorytmów on-line pokrywających porządku podwykładniczą liczbą łańcuchów, które poprawiają najlepsze wcześniej znane ograniczenie wykładnicze Kiersteada [47]. Historycznie pierwszy z tych algorytmów został opracowany we współpracy z Boskiem [A2] a drugi we współpracy z Boskiem, Kiersteadem, Mateckim i Smithem [12] (praca aktualnie w recenzji). Skonstruowanie tych algorytmów było możliwe dzięki uzyskaniu twierdzeń opisujących efektywność algorytmu zachłannego (*first-fit*) pokrywającego porządku łańcuchami w różnych podklasach porządków – twierdzenia te są przedstawione w pracach [A1] (z Boskiem i Szczypką) oraz [A3] (z Boskiem i Mateckim).

Prace [B1] (z Pawlikiem i Walczakiem) oraz [B2] (z Walczakiem), omówione w sekcji 4.4, dotyczą zastosowania algorytmów on-line do problemu kolorowania grafów przecięć obiektów na płaszczyźnie. Związki pomiędzy tymi problemami zostały zauważone po raz pierwszy w pracy [D6] i doprowadziły do konstrukcji grafów przecięć obiektów na płaszczyźnie o ograniczonej liczbie klikowej i nieograniczonej liczbie chromatycznej, między innymi grafu przecięć n odcinków o liczbie klikowej 2 i liczbie chromatycznej rzędu $\Theta(\log \log n)$ [D5]. Z drugiej strony, najlepsze znane oszacowania górne liczby chromatycznej w klasie grafów przecięć obiektów spójnych płaszczyzny o liczbie klikowej ω są rzędu $O_\omega((\log n)^{\log \omega})$ [25]². Rodzi to naturalne pytanie: jakiego rzędu może być liczba chromatyczna w grafach przecięć obiektów płaszczyzny o ograniczonej liczbie klikowej? W pracach [B1, B2] formalizujemy „podejście on-line” do problemów kolorowania grafów oraz opracowujemy metodę, opartą na analizie konkurencyjności algorytmów on-line, która pozwala uzyskać asymptotycznie najlepsze ograniczenia na liczbę chromatyczną, rzędu $O_\omega((\log \log n)^c)$, gdzie c jest pewną stałą zależną od ω , w pewnych naturalnych klasach grafów przecięć n obiektów na płaszczyźnie o liczbie klikowej ω .

Problemy *rozpoznawania* klas grafów dotyczą sprawdzania, czy dany na wejściu graf ma reprezentację odpowiednią dla danej klasy grafów. Problemy te w znakomitej większości klas grafów doczekały się już rozwiązań: wielomianowych algorytmów lub dowodów trudności obliczeniowej. Stosunkowo niedawno Klavík, Kratochvíl i Vyskočil [66] zaproponowali naturalne uogólnienie problemów rozpoznawania geometrycznych klas grafów przecięć, w którym dany na wejściu graf podany jest wraz z reprezentacją niektórych jego wierzchołków, a zadaniem algorytmu jest sprawdzenie, czy tę *częściową reprezentację* można rozszerzyć do reprezentacji całego grafu. Pomimo że problemy rozszerzania częściowych reprezentacji badane są od zaledwie kilku lat, w wielu naturalnych klasach grafów przecięć są już rozwiązane. Mój wkład w tę tematykę, zawarty w pracach [C1] (z Klavíkiem, Kratochvílem i Walczakiem) oraz [C2] (z Walczakiem) i omówiony w sekcji 4.5, obejmuje skonstruowanie wielomianowych algorytmów dla następujących klas grafów:

- grafów permutacji, będących grafami przecięć funkcji liniowych określonych na przedziale $[0, 1]$,
- grafów funkcyjnych, będących grafami przecięć funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0, 1]$,
- grafów trapezowych, będących grafami przecięć trapezów rozpiętych między dwiema poziomymi liniami zawierającymi podstawy tych trapezów.

Obiekty definiujące powyższe klasy grafów przecięć można naturalnie uporządkować relacją częściowego porządku: „ X jest pod (na lewo od) Y ”. Klasy te są jednocześnie geometrycznymi grafami przecięć oraz grafami nieporównywalności względem tej relacji częściowego porządku.

4.2. Algorytmy kolorowania grafów. *Kolorowaniem* grafu G nazywamy przypisanie kolorów wierzchołkom G , tak aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią otrzymały różne kolory.

²Notacji $O_\omega, \Omega_\omega, o_\omega$ używamy dla oznaczenia asymptotyki ze względu na n przy ustalonej wartości ω .

Najmniejsza liczba kolorów niezbędna do pokolorowania grafu G nazywa się *liczbą chromatyczną* $\chi(G)$ grafu G . Liczba chromatyczna $\chi(G)$ grafu G jest co najmniej tak duża jak jego *liczba klikowa* $\omega(G)$, czyli liczność największej kliky w grafie G . Z drugiej strony, znanych jest wiele konstrukcji grafów o dowolnie dużej liczbie chromatycznej i liczbie klikowej 2 [81, 100], a najlepsza z tych konstrukcji osiąga liczbę chromatyczną rzędu $\Theta(\sqrt{n/\log n})$, gdzie n jest liczbą wierzchołków grafu [1, 61].

W klasie wszystkich grafów problemy dokładnego oraz przybliżonego obliczania liczby chromatycznej są obliczeniowo trudne: NP-trudne jest sprawdzenie, czy graf ma liczbę chromatyczną 3 [28], NP-trudne jest aproksymowanie liczby chromatycznej ze współczynnikiem konkurencyjności $n^{1-\epsilon}$, dla każdego ustalonego $\epsilon > 0$ [99]. Niemniej jednak w wielu klasach grafów, szczególnie tych istotnych dla zastosowań, problem kolorowania można zadowalająco rozwiązać: istnieją dobre oszacowania liczby chromatycznej oraz algorytmy wielomianowe, które oszacowania te osiągają. Tak jest na przykład w klasie grafów doskonałych: graf G jest *doskonały*, jeżeli $\chi(H) = \omega(H)$ dla każdego podgrafu indukowanego H w G (łącznie z G). W klasie grafów doskonałych, która zawiera w sobie klasę grafów nieporównywalności czy też klasę grafów przedziałowych, problem optymalnego kolorowania można rozwiązać w czasie wielomianowym [32].

Algorytm on-line A kolorowania grafu G koloruje wierzchołki grafu G w pewnym liniowym porządku v_1, \dots, v_n , wprowadzanym przez *adwersarza* i zwanym *porządkiem prezentacji G*, w taki sposób, że kolor przydzielony wierzchołkowi v_i zależy tylko i wyłącznie od podgrafu indukowanego przez wierzchołki v_1, \dots, v_i . Liczbę kolorów $val_A(G)$ wykorzystanych przez algorytm **A** na grafie G definiujemy jako maksimum z liczby kolorów, jaką wykorzystuje ten algorytm, wzięte po wszystkich porządkach prezentacji grafu G .³ Dodatkowo od algorytmów on-line wymaga się, by działały w czasie wielomianowym od rozmiaru wprowadzanego grafu.

Kiedy kolorowana jest klasa wszystkich grafów, za miarę jakości algorytmu on-line **A** przyjmuje się funkcję, nazywaną *konkurencyjnością* algorytmu **A**, zdefiniowaną dla wartości n jako maksimum po wszystkich n -wierzchołkowych grafach G z wartości $\frac{val_A(G)}{\chi(G)}$. Lovász, Saks i Trotter [76] wskazali algorytm on-line z podliniową funkcją konkurencyjności rzędu $O(n/\log^* n)$. Z drugiej strony, Halldórsson i Szegedy wykazali, że konkurencyjność każdego algorytmu on-line jest rzędu $\Omega(n/\log^2 n)$ [39].

Problemy kolorowania on-line różnych klas grafów rozważane były już w latach 70-tych ubiegłego stulecia. Gyárfás i Lehel [37] zaproponowali następujące pojęcia: algorytm on-line **A** kolorowania grafów z klasy \mathcal{G} jest *efektywny* w \mathcal{G} jeżeli istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, zwana *efektywnością* algorytmu **A**, taka że $val_A(G) \leq f(\omega(G))$ dla każdego grafu $G \in \mathcal{G}$. Bean [7] oraz niezależnie Gyárfás i Lehel [36] wykazali, że w klasie lasów nie istnieje efektywny algorytm on-line, dlatego też algorytm taki nie istnieje we wszystkich klasach grafów zawierających lasy (np. w klasie grafów doskonałych). W takich klasach grafów szacuje się wydajność algorytmów on-line względem liczby wierzchołków prezentowanego grafu. W klasie lasów istnieje algorytm on-line (first-fit) wykorzystujący $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ kolorów i algorytm ten jest możliwie najlepszy [7, 36]. W klasie grafów doskonałych o liczbie klikowej ω znany jest algorytm on-line wykorzystujący $n^{\omega(1)}$ kolorów [51]. Gyárfás i Lehel [37] skonstruowali efektywny algorytm on-line w klasie grafów nie zawierających ścieżki P_5 ⁴ jako podgrafu indukowanego oraz wykazali, że algorytm taki nie istnieje w klasie grafów nie zawierających ścieżki P_6 . Najogólniejszy wynik opisujący szeroką klasę grafów kolorowalnych efektywnymi algorytmami on-line został udowodniony przez Kiersteada, Penrice'a i Trottera [53]. Wykazali oni, że dla każdego drzewa T o promieniu 2 istnieje efektywny algorytm on-line w klasie grafów nie zawierających T jako poddrzewa indukowanego. Wspomniany

³Powyższa definicja obejmuje deterministyczne algorytmy on-line – tylko takie algorytmy są przedmiotem rozważań w niniejszym opracowaniu.

⁴ P_5 to ścieżka prosta określona na 5 wierzchołkach.

wcześniej wynik Gyárfása i Lehela [37] pokazuje, że wyniku tego nie można rozszerzyć na drzewa o promieniu 3.

Najprostszym algorytmem on-line kolorującym grafy jest algorytm *first-fit*. Algorytm ten utożsamia kolory z liczbami naturalnymi i przypisuje każdemu prezentowanemu wierzchołkowi grafu najmniejszy możliwy kolor. W kontekście dalszych rozważań warto wspomnieć twierdzenie, udowodnione niezależnie przez Hajnalą oraz przez Rödlą (patrz [52]), które zapewnia, że dla każdego $r, d, k \in \mathbb{N}$ algorytm first-fit jest efektywny w klasie grafów nie zawierających w sposób indukowany klikli dwudzielnej $K_{k,k}$ oraz drzewa T_d^r , gdzie T_d^r jest drzewem o promieniu r , w którym wszystkie wierzchołki różne od liści mają stopień d .

4.3. Algorytmy on-line kolorowania porządków. Zbiorem częściowo uporządkowanym (w skrócie *porządkiem*) nazywamy parę $P = (V, \leq)$ składającą się ze zbioru V oraz zwrotnej, przechodniej i antysymetrycznej relacji binarnej \leq na V . Łańcuchem (antyłańcuchem) P jest zbiór elementów parami porównywalnych (nieporównywalnych) w P . Szerokością (wysokością) P jest rozmiar maksymalnego antyłańcucha (łańcucha) w P . Graf łączący każde dwa porównywalne elementy P jest *grafem porównywalności* P a graf łączący każde dwa nieporównywalne elementy P jest *grafem nieporównywalności* P . Twierdzenie Dilwortha zapewnia, że każdy porządek można podzielić na w łańcuchów, gdzie w jest szerokością porządku. Powszechnie znane jest również twierdzenie dualne do twierdzenia Dilwortha, które mówi, że każdy porządek wysokości h można podzielić na h antyłańcuchów. Twierdzenia te oznaczają, że grafy nieporównywalności oraz grafy porównywalności są grafami doskonałymi.

Klasa grafów porównywalności zawiera w sobie wszystkie lasy, w klasie tej nie istnieje więc efektywny algorytm on-line. Inaczej jest z grafami nieporównywalności. Z twierdzenia Gallaiego [27] charakteryzującego minimalne grafy zabronione w klasie grafów nieporównywalności wynika, że grafy te nie zawierają drzewa T_3^2 . Tym samym istnienie efektywnego algorytmu on-line w tej klasie grafów zapewnia wspomniane już wcześniej twierdzenie Kiersteada, Penrice’a i Trottera [53]. Dodajmy jednak, że efektywność tego algorytmu jest bardzo słaba i w pracy [53] nie jest w ogóle szacowana.

Problem pokrywania on-line porządku łańcuchami (antyłańcuchami) są szczególnymi wersjami problemu kolorowania grafów nieporównywalności (porównywalności, odpowiednio), w których algorytm otrzymuje na wejściu porządek, koloruje zaś graf nieporównywalności (porównywalności) tego porządku. Informacja o częściowym porządku jest kluczowa i poprawia możliwości algorytmów on-line działających w zbiorach częściowo uporządkowanych. Istotnie, podczas gdy w klasie grafów porównywalności nie istnieje algorytm kompetytywny, Schmerl podał algorytm on-line dzielący porządki wysokości h na $\binom{h+1}{2}$ antyłańcuchów (patrz [47]). Co więcej, algorytm Schmerla jest możliwie najlepszy: Szemerédi wskazał strategię adwersarza, która zmusza każdy algorytm on-line do użycia $\binom{h+1}{2}$ antyłańcuchów w klasie porządków wysokości h (patrz [48]). Podobnie jest w problemie pokrywania on-line porządku łańcuchami – najlepsze znane algorytmy, które będziemy za chwilę omawiać, są istotnie lepsze od wspomnianego już algorytmu on-line kolorującego grafy nieporównywalności.

Problem pokrywania on-line porządków łańcuchami został sformułowany przez Schmerla (patrz [47]) w latach 1970-tych. Definiując ten problem, Schmerl zapytał⁵, czy w klasie porządków szerokości w istnieje algorytm on-line, który używa skończonej liczby łańcuchów. Problem pokrywania on-line porządku łańcuchami równoważnie możemy przedstawić jako *problem kolorowania on-line porządku*, w którym algorytm przypisuje różne kolory nieporównywalnym elementom wprowadzanego porządku. Oznaczmy przez $val(w)$ minimalną liczbę kolorów, jaką

⁵Pytanie to zostało postawione dużo wcześniej niż powstał dowód Kiersteada, Penrice’a i Trottera zapewniający, że istnieje algorytm efektywny w klasie grafów nieporównywalności.

wykorzystuje algorytm on-line kolorujący porządki szerokości w . Pytanie Schmerla jest wtedy równoważne pytaniu, czy wartość $val(w)$ jest skończona.

Jak dotychczas, dokładna wartość $val(w)$ znana jest tylko dla $w \leq 2$. Oczywiście $val(1) = 1$. Kierstead [47] udowodnił, że $5 \leq val(2) \leq 6$. Felsner [23] wskazał algorytm on-line używający 5 kolorów na porządkach szerokości 2, wykazując tym samym, że $val(2) = 5$. Kierstead [47] wykazał, że $val(3) \geq 9$ a Bosek [11] udowodnił $val(3) \leq 16$.

Jako pierwszy na pytanie Schmerla w sposób twierdzący odpowiedział Kierstead [47], który podał algorytm on-line kolorujący porządki szerokości w wykładniczą liczbą kolorów. Wykazał on, że $val(w) \leq (5^w - 1)/4$ [47]. Równolegle starano się również znaleźć jak najlepsze ograniczenia dolne na $val(w)$. Kierstead wykazał $val(w) \geq 4w - 3$ dla $w \geq 2$ [47], Szemerédi udowodnił $val(w) \geq \binom{w+1}{2}$ (dowód opublikowany jest w [48], można go również znaleźć w pracy przeglądowej [D1]). Ograniczenie podane przez Szemerédiego zostało poprawione w pracy [D1] do $val(w) \geq (2 - o(1))\binom{w+1}{2}$ i jak dotychczas jest to najlepsze ograniczenie dolne na $val(w)$. Kierstead [47] oraz Trotter, w książce *Handbook of Combinatorics* w sekcji *Partially Ordered Sets* poświęconej zbiorom częściowo uporządkowanym, zadają pytanie, które jak dotychczas ciągle pozostaje otwarte: czy $val(w)$ jest ograniczone od góry wielomianem zależnym od w ?

Mój wkład w wyżej opisany problem polega na skonstruowaniu dwóch algorytmów on-line, które używają podwykładniczej liczby kolorów. Historycznie pierwszy taki algorytm został opracowany we wspólnej z Boskiem pracy [A2].

Twierdzenie 1 ([A2]). $val(w) \leq w^{13 \log w}$.

We wspólnej z Boskiem, Kiersteadem, Mateckim i Smithem pracy [12] (aktualnie w recenzji) wskazujemy inny algorytm podwykładniczy, częściowo opierający się na wynikach pracy [A2] oraz pracy Kiersteada i Smitha [56]. Jest on łatwiejszy do sformułowania, prostszy w analizie i daje nieznacznie lepsze ograniczenie.

Twierdzenie 2 (twierdzenie 3 z [12]). $val(w) \leq w^{6,5 \log w + 7}$.

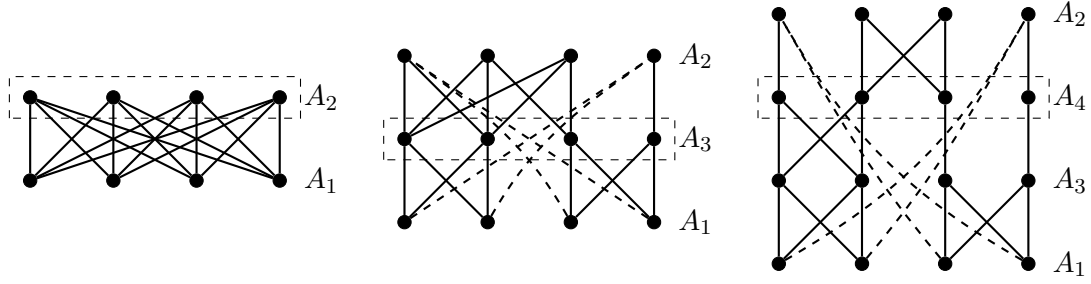
Pokrótkę opiszę sposób działania algorytmów, o których mowa w twierdzeniach 1 i 2. W pracy [A2] problem kolorowania porządków on-line został sprowadzony do równoważnego problemu kolorowania on-line tzw. porządków regularnych. W problemie tym na prezentowany w rundach porządek szerokości w nakłada się dodatkowe ograniczenia:

- W k -tej rundzie adversarz wprowadza antyłańcuch A_k szerokości w rozłączny z antyłańcuchami A_1, \dots, A_{k-1} wprowadzonymi w poprzednich rundach. Dodatkowo, wprowadzone w dwóch pierwszych rundach antyłańcuchy A_1, A_2 tworzą pełny porządek dwudzielny $(A_1, A_2, <)$.
- Po ukończeniu k -tej rundy gry wprowadzone antyłańcuchy dzielą wierzchołki porządku na poziomy, przy czym wierzchołki poziomu pierwszego to elementy minimalne porządku, wierzchołki poziomu i -tego to elementy minimalne porządku powstałego przez usunięcie wierzchołków z poziomów $1, \dots, i-1$, dla $i = 2, \dots, k$. Dodatkowo, A_1 oraz A_2 stanowią odpowiednio pierwszy oraz k -ty poziom tego podziału oraz każde dwa sąsiednie poziomy A_i i A_j indukują porządek dwudzielny, w którym każda porównywalność $x < y$ jest rozszerzalna do zbioru porównywalności stanowiącego skojarzenie pełne pomiędzy elementami A_i a elementami A_j .

Porządek wprowadzany zgodnie z tymi regułami nazywamy *porządkiem regularnym*. Możliwy scenariusz prezentacji porządku regularnego szerokości 4 przedstawiony jest na rysunku 1.

Niech $rval(w)$ będzie minimalną liczbą kolorów, które musi użyć algorytm on-line kolorujący porządki regularne szerokości w . Oczywiście jest, że $rval(w) \leq val(w)$. W pracy [A2] dowodzimy, że wartość $val(w)$ można również ograniczyć od góry względem $rval(w)$.

Twierdzenie 3 (lemat 3.1 z [A2]). $val(w) \leq w \cdot rval(w)$.



RYSUNEK 1. Antyłańcuchy A_2, A_3, A_4 prezentowane w 2, 3, 4 rundzie wprowadzania porządku regularnego szerokości 4.

Oba podwykładnicze algorytmy wykorzystują redukcję z twierdzenia 3 i różnią się tylko sposobem kolorowania porządków regularnych.

W zaprojektowaniu efektywnych algorytmów kolorujących porządki regularne kluczowe okazały się twierdzenia dotyczące efektywności algorytmu zachłannego first-fit. W klasie wszystkich porządków first-fit nie jest efektywny: Kierstead [48] wskazał strategię adversarza zmuszającą ten algorytm do użycia dowolnie wielu kolorów już na porządkach szerokości 2. Niemniej jednak już od lat 1980-tych wiadomo było, że algorytm first-fit działa wydajnie w pewnych podklasach porządków, w szczególności w ważnej klasie porządków przedziałowych. Porządek P jest *porządkiem przedziałowym* jeżeli każdy element $x \in P$ jest reprezentowany przez przedział domknięty $\mu(x)$ prostej rzeczywistej tak, że $x < y$ w porządku P wtedy i tylko wtedy, gdy przedział $\mu(x)$ jest całkowicie na lewo od przedziału $\mu(y)$. Ograniczenie górne na liczbę kolorów wykorzystywanych przez algorytm first-fit na porządkach przedziałowych szerokości w było wielokrotnie poprawiane i wynosiło kolejno: $O(w \log w)$ (Woodall, patrz [36]), $40w$ (Kierstead [49]), $26w$ (Kierstead i Qin [54]), $10w$ (Pemmaraju i Raman [85]). Narayanaswamy i Babu [82] oraz niezależnie Brightwell, Kierstead i Trotter zauważyli, że analizę działania algorytmu first-fit zaproponowaną przez Pemmaraju i Ramana można poprawić, co prowadzi do aktualnie najlepszego ograniczenia górnego $8w$. Z drugiej strony, Chrobak i Ślusarek [13] wskazali dla każdego $w \geq 1$ porządek przedziałowy szerokości w , na którym first-fit używa co najmniej $4,4w - c$ kolorów, gdzie c jest pewną stałą niezależną od w . Kierstead, Smith i Trotter [57] skonstruowali rodzinę porządków przedziałowych, na której first-fit używa co najmniej $(5 - \epsilon)w$ kolorów, przy czym $\epsilon \rightarrow 0$ przy $w \rightarrow \infty$.

Porządek P jest Q -wolny jeżeli P nie zawiera porządku Q jako podporządku indukowanego. Niech $(\underline{k} + \underline{k})$ będzie porządkiem składającym się z dwóch wzajemnie nieporównywalnych łańcuchów rozmiaru k . Fishburn [21] wykazał, że porządki przedziałowe odpowiadają klasie porządków $(\underline{2} + \underline{2})$ -wolnych. Porządki $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolne rozszerzają więc klasę porządków przedziałowych. Próba skonstruowania lepszego niż wykładniczy algorytmu kolorowania porządków skierowała naszą uwagę w stronę poszukiwań wielomianowych algorytmów on-line kolorowania porządków $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnych. Ponieważ grafy nieporównywalności $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnych porządków nie zawierają klików dwudzielnej $K_{k,k}$ oraz drzewa T_3^2 jako podgrafów indukowanych, z twierdzenia Hajnala-Röidla wynika, że w klasie tych porządków algorytm first-fit jest efektywny. Wynikające z tego twierdzenia ograniczenie na funkcję efektywności nie jest jednak wielomianowe w zależności od w i k . Naturalne jest więc pytanie, czy w tej klasie porządków first-fit używa wielomianowej od k i w liczby kolorów. We wspólnej z Boskiem i Szczypką pracy [A1] wykazaliśmy, że tak rzeczywiście jest.

Twierdzenie 4 (twierdzenie 1 z [A1]). *Algorytm first-fit używa co najwyżej $O(kw^2)$ kolorów w klasie $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnych porządków szerokości w .*

Ograniczenie z twierdzenia 4 było dwukrotnie poprawiane. Joret i Milans [45] wykazali, że w klasie $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnych porządków szerokości w first-fit używa $O(k^2w)$ kolorów. Dujmović,

Joret i Wood [17] wykazali zaś, że w klasie tej first-fit używa $O(kw)$ kolorów oraz udowodnili, że ograniczenie to jest asymptotycznie najlepsze.

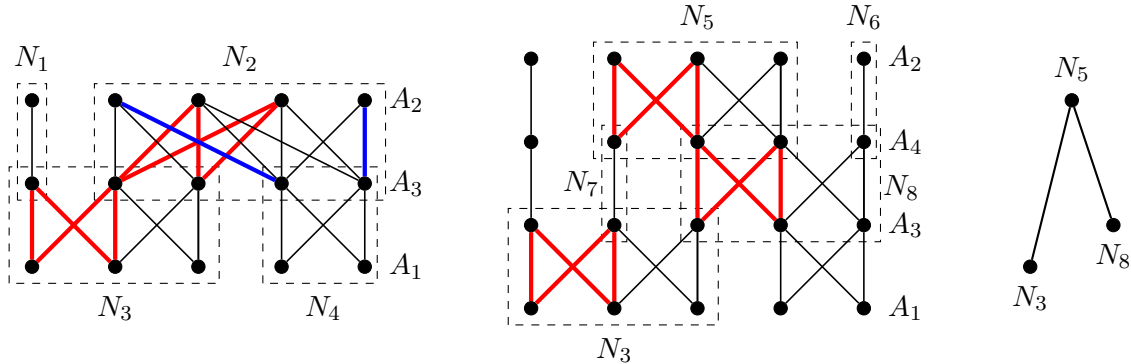
Dowód twierdzenia 4 opiera się na lemacie, który zapewnia, że każdy $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolny porządek $P = (V, \leq)$ szerokości w można podzielić na w rozłącznych zbiorów $V_1 \cup \dots \cup V_w$, tak że każdy element ze zbioru V_i jest nieporównywalny z co najwyżej $4kw - 1$ elementami ze zbioru $V_i \cup \dots \cup V_w$ ⁶ (lemat 3 z [A1]). Mając ten podział, łatwo można już udowodnić twierdzenie 4: wystarczy zauważyć, że algorytm first-fit wierzchołkom w zbiorach V_1, V_2, \dots, V_w przydziela kolory nie większe od, odpowiednio, $4kw, 8kw, \dots, 4kw^2$. Udowodnienie lematu o podziale było możliwe dzięki dostrzeżeniu pewnych własności, które przenoszą się z porządków $(\underline{2} + \underline{2})$ -wolnych na porządki $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolne. Porządki $(\underline{2} + \underline{2})$ -wolne, jako porządki przedziałowe, mają reprezentację w postaci przedziałów. Podział V_1, \dots, V_w porządku przedziałowego o szerokości w , o którym mówi lemat, można skonstruować w oparciu o relację zawierania przedziałów: do zbioru V_1 należą wszystkie przedziały, które są minimalne względem relacji zawierania, a do zbioru V_i wszystkie przedziały, które są minimalne względem tej relacji w zbiorze $V \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{i-1})$ dla $i \in \{2, \dots, w\}$. Łatwo sprawdzić, że podział ten spełnia tezę lematu: każdy przedział, jeżeli nie liczymy przedziałów w nim zawartych, przecina się z co najwyżej $2w - 2$ innymi przedziałami. Porządki $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolne nie mają reprezentacji geometrycznej, niemniej jednak w klasie tej istnieje relacja o własnościach podobnych do relacji zawierania w zbiorze przedziałów. Relację tę można zdefiniować następująco. Niech C_1, \dots, C_w będzie pokryciem łańcuchowym $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnego porządku szerokości w oraz niech $x \in C_i$. Zbiór elementów z łańcucha C_j , które są nieporównywalne z elementem x , tworzy spójny wycinek tego łańcucha – wszystkie elementy tego wycinka, z wykluczeniem co najwyżej $2k$ elementów znajdujących się na każdym jego końcu, „zawierają się” w x . W pracy [A1] relacja „zawierania” nie jest zdefiniowana wprost – przyjęte definicje są bardziej techniczne, pozwalają jednak łatwiej zdefiniować podział V_1, \dots, V_w oraz udowodnić, że spełnia on żądane własności.

Udowodnienie twierdzenia 4 dało impuls do prac mających na celu znalezienie lepszego niż wykładniczy algorytmu on-line kolorowania porządków, których zwieńczeniem był podwykładniczy algorytm z pracy [A2]. Kluczowym pojęciem tego algorytmu jest pojęcie *węzła*. Spójrzmy na porządek dwudzielny $(A_i, A_j, <)$ indukowany przez każde dwa sąsiednie poziomy A_i i A_j porządku regularnego jak na graf dwudzielny, którego krawędziami są wszystkie porównywalności między A_i a A_j – węzłami między poziomami A_i oraz A_j są wszystkie składowe spójne grafu $(A_i, A_j, <)$ (patrz rysunek 2). Antyłańcuch A_k wstawiany między sąsiadujące ze sobą antyłańcuchy A_i oraz A_j generuje nowe węzły w grafach dwudzielnych $(A_i, A_k, <)$ oraz $(A_k, A_j, <)$. Wszystkie węzły pojawiające się podczas wprowadzania antyłańcuchów do porządku regularnego, uporządkowane relacją postaci „węzeł $(X, Y, <)$ powstaje z podziału węzła $(Z, T, <)$ ”, tworzą strukturę drzewiastą, której korzeniem jest węzeł $(A_1, A_2, <)$ (patrz rysunek 2). Algorytm z pracy [A2] koloruje krawędzie wszystkich węzłów drzewa w sposób on-line, tak że końce wszystkich krawędzi pokolorowanych tym samym kolorem stanowią łańcuch w porządku regularnym. Każdy nowo wprowadzony element porządku regularnego otrzymuje wówczas kolor dowolnej incydentnej z nim krawędzi; sposób kolorowania krawędzi węzłów zapewnia, że kolorowanie takie jest poprawne. Kluczową rolę w kolorowaniu krawędzi wszystkich węzłów odgrywa kolorowanie tak zwanych *węzłów istotnych*. Każdy taki węzeł zawiera *krzyż*, czyli wierzchołki $\{x_1, x_2\} \subset X$ i $\{y_1, y_2\} \subset Y$, takie że $\{x_1, x_2\} < \{y_1, y_2\}$ oraz takie że graf $(X \setminus \{x_1, x_2\}, Y \setminus \{y_1, y_2\}, <)$ ma skojarzenie pełne (patrz węzeł N_2 na rysunku 2). Algorytm rozdziela węzły istotne ze względu na ich własności kombinatoryczne, tak zwaną *charakterystykę* (kombinatoryczną), na wielomianową liczbę zbiorów, tak że w obrębie jednego takiego zbioru znajdują się wszystkie węzły istotne o tej samej charakterystyce. W szczególności, definicja węzłów istotnych zapewnia, że każde dwa

⁶Lemat 3 w [A1] pokazuje faktycznie nieco silniejsze ograniczenie niż $4kw - 1$.

węzły istotne o tej samej charakterystyce nie mogą być w relacji przodek-potomek w drzewie wszystkich węzłów. Na każdym zbiorze węzłów istotnych o tej samej charakterystyce możemy wprowadzić relację częściowego porządku, w której węzeł $(X, Y, <)$ jest pod węzłem $(Z, T, <)$, jeżeli pewien górny element krzyża węzła $(X, Y, <)$ jest pod pewnym dolnym elementem krzyża węzła $(Z, T, <)$. Każdy taki częściowy porządek ma szerokość co najwyżej $w/2$ (lemat 5.9 z [A2]) i może być dzielony na łańcuchy (kolorowany) w sposób on-line za pomocą rekurencyjnego wywołania algorytmu (patrz porządek na węzłach N_3, N_5, N_8 przedstawiony na rysunku 2). Niech \mathcal{L} będzie jednym z łańcuchów w podziale generowanym przez algorytm rekurencyjny. Wszystkie krawędzie węzłów z łańcucha \mathcal{L} możemy uporządkować relacją częściowego porządku: krawędź $(a < b)$ jest pod krawędzią $(c < d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \leq c$ w prezentowanym porządku regularnym. Krawędzie z węzłów łańcucha \mathcal{L} tworzą porządek o szerokości co najwyżej w^3 (lemat 5.8 z [A2]), który jest porządkiem $(2w - 1 + 2w - 1)$ -wolnym (lemat 5.10 z [A2]). Na mocy twierdzenia 4, ten porządek na krawędziach węzłów łańcucha \mathcal{L} możemy pokolorować on-line wielomianową liczbą kolorów, używając algorytmu first-fit. Przedstawione powyżej idee pozwalają kolorować krawędzie wszystkich węzłów istotnych w drzewie wszystkich węzłów. Kolorowanie węzłów istotnych jest następnie rozszerzane na pozostałe węzły drzewa: między innymi, kolorami krawędzi węzła istotnego N kolorowane są wszystkie węzły M , które nie są istotne i dla których N jest pierwszym węzłem istotnym na ścieżce od M do korzenia $(A_1, A_2, <)$ w drzewie wszystkich węzłów. Rozszerzanie kolorowania węzła N na wszystkie takie węzły jest dość skomplikowane i jest opisane szczegółowo w sekcji 6 pracy [A2].

Powyższe idee pozwalają skonstruować algorytm on-line **A** kolorowania porządków tak, aby liczba kolorów $val_{\mathbf{A}}(w)$, jaką wykorzystuje on na porządkach szerokości w , była ograniczona od góry przez $w^{13} \cdot val_{\mathbf{A}}(\frac{w}{2})$. Ostatecznie, $val_{\mathbf{A}}(w) \leq w^{13 \log w}$, co dowodzi twierdzenia 1.



RYSUNEK 2. Wprowadzenie antyłańcuchów A_3 i A_4 do porządku regularnego szerokości 5. W drzewie wszystkich węzłów: węzły N_1, N_2, N_3, N_4 są dziećmi (powstają z podziału) węzła $(A_1, A_2, <)$, węzły N_5, N_6, N_7, N_8 są dziećmi (powstają z podziału) węzła N_2 . Węzeł N_2 jest węzłem istotnym: krawędzie krzyża węzła N_2 są oznaczone na czerwono, dopasowanie pełne w grafie dwudzielnym powstałym z N_2 przez usunięcie wierzchołków z krzyża N_2 jest oznaczone kolorem niebieskim. Węzły N_3, N_5, N_8 są istotne i mają tę samą charakterystykę kombinatoryczną – relacja częściowego porządku indukowanego przez krzyże węzłów N_3, N_5, N_8 jest przedstawiona na rysunku po prawej. Węzły N_5 oraz N_8 są dodawane do tego porządku w momencie prezentacji antyłańcucha A_4 , a więc w momencie pojawienia się węzłów N_5 oraz N_8 w drzewie wszystkich węzłów.

Wspomniana już wcześniej praca [12] zawiera pełny opis drugiego podwykładniczego algorytmu on-line kolorowania porządków, który mocno korzysta ze spostrzeżeń z pracy [A2] oraz z pracy Kiersteda i Smitha [56]. Algorytm z tej pracy koloruje porządki regularne algorytmem first-fit. Okazuje się, że w klasie porządków regularnych algorytm first-fit działa bardzo wydajnie

i wykorzystuje podwykładniczą liczbę kolorów. Dowód tego twierdzenia składa się z dwóch części, których omówienie poprzedzimy krótką definicją. *Drabiną wysokości k* nazywamy porządek składający się z dwóch rozłącznych łańcuchów $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ oraz $y_1 < y_1 < \dots < y_k$ rozmiaru k , oraz porównywalności $x_i < y_j$ dla $1 \leq i \leq j \leq k$. W pierwszej części dowodu wykazujemy, że wysokość każdej drabiny zawartej w porządku regularnym szerokości w jest ograniczona przez $2w^2$ (lemat 6 z [12]). Fakt ten został wspomniany w [A2], zaś jego pełny dowód można znaleźć w [12]. Druga część dowodu pochodzi z pracy Kiersteada i Smitha [56], którzy wykazali, że w klasie porządków szerokości w nie zawierających drabiny wysokości k algorytm first-fit używa co najwyżej $w^{O(\log w + \log k)}$ kolorów. Połączenie obu tych rezultatów prowadzi do wniosku, że algorytm first-fit na porządkach regularnych szerokości w używa co najwyżej $w^{O(\log w)}$ kolorów. Szacując precyzyjnie stałe ukryte w notacjach asymptotycznych, dowodzimy, że algorytm on-line kolorowania porządków, który redukuje problem do kolorowania porządków regularnych, a następnie koloruje te porządki algorytmem first-fit, używa co najwyżej $w^{6,5 \log w + 7}$ kolorów. W pracy [12] podajemy również dwa powody, które uniemożliwiają poprawienie analizy działania tego algorytmu: (1) konstruujemy porządki szerokości w nie zawierające drabiny wysokości k , na których algorytm first-fit używa $w^{\Omega(\log k)}$ kolorów (lemat 17 z [12]), oraz (2) wykazujemy, że istnieją porządki regularne szerokości w , które zawierają drabinę wysokości $\Omega(w^2)$ (lemat 16 z [12]).

Algorytm first-fit jest również przedmiotem badawczym ostatniej pracy [A3] (wspólnej z Boskiem i Mateckim) poświęconej problemowi kolorowania on-line porządków. W pracy [45] Joret i Milans zadali pytanie, dla jakich porządków Q istnieje funkcja $f_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o tej własności, że w klasie porządków Q -wolnych szerokości w algorytm first-fit używa co najwyżej $f_Q(w)$ kolorów. Przykład Kiersteada zmuszający algorytm first-fit do użycia dowolnie wielu kolorów na porządkach szerokości 2 pokazuje, że f_Q nie istnieje dla porządków Q o szerokość większej bądź równej 3. Omawiane wcześniej wyniki dowodzą, że f_Q istnieje jeżeli Q jest porządkiem $(\underline{k} + \underline{k})$ (i jest wtedy funkcją liniową) lub drabiną wysokości k (i jest wtedy rzędu $w^{O_k(\log w)}$). Główny wynik pracy [A3] orzeka, że funkcja f_Q istnieje dla dowolnego porządku Q szerokości 2.

Twierdzenie 5 (twierdzenie 1 z [A3]). *Dla każdego porządku Q o szerokości 2 istnieje funkcja $f_Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gdzie $f_Q(w)$ jest ograniczeniem górnym na liczbę kolorów wykorzystywaną przez algorytm first-fit kolorujący porządki Q -wolne o szerokości w .*

Ograniczenia na funkcje f_Q , wynikające z dowodu powyższego twierdzenia, nie są wielomianowe. Twierdzenie to jest więc mało praktyczne z punktu widzenia konstrukcji wielomianowego algorytmu on-line kolorowania porządków. Niemniej jednak twierdzenie to zapewnia, że first-fit jest wydajny w szerokiej klasie porządków, a uzyskanie wielomianowych ograniczeń na funkcję efektywności w jak najszerszej rodzinie tych klas mogłoby prowadzić do dalszych postępów w pracach nad problemem ogólnym.

Dowód twierdzenia 5 składa się z dwóch części. W pierwszej z nich definiujemy porządki szerokości 2, zwane (k, l) -drabinami. Porządek H jest (k, l) -drabiną, jeżeli określony jest na zbiorze $X_1 \cup \dots \cup X_k$, zbiór $X_i \cup X_{i+1}$ indukuje w H drabinę o wysokości l dla $i \in \{1, \dots, k-1\}$ oraz zachodzi $X_1 < X_3 < \dots < X_o$ i $X_2 < X_4 < \dots < X_e$, gdzie e oraz o są największymi liczbami, odpowiednio parzystą i nieparzystą, mniejszymi od k . Następnie wykazujemy, że każdy porządek Q o szerokości 2 jest podporządkiem indukowanym w (k, l) -drabinie dla odpowiednio dużych wartości k oraz l (lemat 4 w [A3]). W drugiej części dowodu dowodzimy, że istnieje funkcja $g : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ o tej własności, że jeżeli algorytm first-fit wykorzystuje co najmniej $g(w, k, l)$ kolorów na porządku P , to P zawiera (k, l) -drabinę lub antyłańcuch szerokości w (lemat 6 w [A3]). Na mocy poprzedniej uwagi dowodzi to już twierdzenia 5. Algorytm first-fit ma tę użyteczną właściwość, która pozwala szacować liczbę kolorów, jaką wykorzystuje on na porządku P , w sposób statyczny. *Ścianą rozmiaru k* w porządku P nazywamy pokrycie

łańcuchowe C_1, \dots, C_k tego porządku o tej własności, że każdy element z C_i jest nieporównywalny z pewnym elementem z łańcucha C_j , dla każdych $1 \leq j < i \leq k$. Prawdziwe jest następujące, bardzo proste spostrzeżenie: first-fit używa na porządku P co najmniej k kolorów wtedy i tylko wtedy, gdy w porządku P istnieje ściana rozmiaru co najmniej k . Ostatecznie wykazujemy, że dla każdych $w, k, l \in \mathbb{N}$ istnieje wartość $g(w, k, l)$ o tej własności, że każda ściana o rozmiarze $g(w, k, l)$ zawiera antyłańcuch szerokości w lub (k, l) -drabinę. Dowód powyższego faktu opiera się na sformułowaniu i udowodnieniu mocniejszego założenia indukcyjnego (dość technicznego), które opisuje precyzyjnie „lokalizację” (k, l) -drabiny w dostatecznie dużej ścianie w porządku o ograniczonej szerokości.

4.4. Kolorowanie geometrycznych klas grafów przecięć. Jednym z najczęściej rozważanych i najlepiej zbadanych modeli reprezentacji grafu jest model przecięć. *Modelem przecięć* lub *reprezentacją* grafu G w rodzinie obiektów geometrycznych \mathcal{R} nazywamy odwzorowanie $\phi: V(G) \rightarrow \mathcal{R}$ przypisujące wierzchołkom grafu G obiekty rodziny \mathcal{R} w taki sposób, że $uv \in E(G) \iff \phi(u) \cap \phi(v) \neq \emptyset$ dla dowolnych wierzchołków u i v grafu G . Grafy, które mają reprezentację w \mathcal{R} , nazywamy *grafami przecięć* obiektów rodziny \mathcal{R} .

W ostatnim czasie nastąpił wyraźny postęp w problemie kolorowania grafów przecięć obiektów (zwartych i łukowo spójnych podzbiorów) płaszczyzny, a jedną z jego przyczyn było odkrycie związków, jakie zachodzą między tym problemem a problemami kolorowania grafów on-line. Związki te, po raz pierwszy opisane w pracy [D6], umożliwiły skonstruowanie pierwszych grafów przecięć obiektów na płaszczyźnie o ograniczonej liczbie klikowej i nieograniczonej liczbie chromatycznej. W pracach [B1, B2] formalizujemy „podejście on-line” do problemów kolorowania grafów oraz pokazujemy jego zastosowanie do uzyskania najlepszych asymptotycznie oszacowań na liczbę chromatyczną w różnych naturalnie zdefiniowanych geometrycznych grafach przecięć obiektów płaszczyzny.

Niech \mathcal{F} będzie rodziną obiektów płaszczyzny \mathbb{R}^2 (lub prostej rzeczywistej \mathbb{R}). Dwa obiekty z \mathcal{F} *nachodzą się*, jeżeli mają niepuste przecięcie i żaden nie zawiera się w drugim. Rodzina \mathcal{F} jest *czysta*, jeżeli nie istnieją w niej dwa nachodzące się obiekty, które zawierają w swoim przecięciu inny obiekt tej rodziny. Na rodzinie \mathcal{F} obiektów płaszczyzny \mathbb{R}^2 (lub prostej rzeczywistej \mathbb{R}), poza grafem przecięć, zdefiniować możemy również *graf nachodzeń* rodziny \mathcal{F} , który łączy krawędziami każde dwa nachodzące się obiekty z \mathcal{F} .

Jedynymi zbiorami zwartymi i łukowo spójnymi w \mathbb{R} są przedziały. Grafy przecięć przedziałów, czyli grafy przedziałowe, są doskonałe. Pojęcie doskonałości uogólnia się następująco: rodzina grafów \mathcal{G} jest χ -ograniczona, jeżeli istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, taka że $\chi(G) \leq f(\omega(G))$ dla każdego grafu $G \in \mathcal{G}$ [35]. Grafy nachodzeń przedziałów, równoważnie definiowane jako grafy przecięć cięciw okręgu, nie są już doskonałe, są jednak χ -ograniczone. Gyárfás [34] wykazał, że grafy nachodzeń przedziałów spełniają $\chi = O(\omega^2 4^\omega)$. Kostochka i Kratochvíl [69] wykazali, że grafy te spełniają $\chi = O(2^\omega)$. Z drugiej strony Kostochka [67] skonstruował grafy nachodzeń przedziałów o liczbie klikowej ω i liczbie chromatycznej $\Theta(\omega \log \omega)$.

Badania nad kolorowaniami grafów przecięć obiektów na płaszczyźnie zapoczątkowali Asplund i Grünbaum [4]. Wykazali oni, że grafy przecięć prostokątów o bokach równoległych do osi mają liczbę chromatyczną rzędu $O(\omega^2)$. Z drugiej strony, Kostochka twierdzi⁷ (patrz [68]), że istnieją grafy przecięć prostokątów o liczbie klikowej ω i liczbie chromatycznej 3ω . Malesińska, Piskorz i Weißenfels [77] pokazali, że grafy przecięć kół spełniają $\chi \leq 6\omega - 6$, Peeters [84] zaś wykazał, że grafy przecięć kół jednostkowych spełniają $\chi \leq 3\omega - 2$. Dość ogólne twierdzenie, udowodnione przez Kima, Kostochkę i Nakprasita [62], opisuje szeroką rodzinę χ -ograniczonych klas grafów przecięć obiektów na płaszczyźnie. Twierdzenie to orzeka, że dla każdego zwartego i wypukłego zbioru X w \mathbb{R}^2 , graf przecięć obiektów, z których każdy jest otrzymany przez przesunięcie

⁷Według mojej najlepszej wiedzy, konstrukcja Kostochki nie jest nigdzie opublikowana.

zbioru X , spełnia $\chi \leq 3\omega - 2$, zaś graf przecięć obiektów, z których każdy jest jednokładną (jednostajnie przeskalowaną i przesuniętą) kopią X , spełnia $\chi \leq 6\omega - 6$.

Pytania o χ -ograniczoność klas grafów przecięć obiektów na płaszczyźnie pojawiały się już w latach 1970-tych. Erdős zadał pytanie, czy klasa grafów przecięć odcinków jest χ -ograniczona (patrz problem 1.9 z [35]). Podobne pytanie zadali Kratochvíl i Nešetřil w odniesieniu do grafów przecięć krzywych ciągłych (patrz [70]). Częściowo na pytanie Erdősa odpowiedział Suk [93], który wykazał, że klasa grafów przecięć odcinków jednostkowej długości jest χ -ograniczona. W 2012 roku wykazaliśmy, że powyższe klasy grafów nie są χ -ograniczone, co wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6 (twierdzenie 1 w [D6]). *Dla każdego łukowo spójnego i zwartego zbioru X w \mathbb{R}^2 , który nie jest prostokątem o bokach wyrównanych do osi, istnieje graf przecięć n obiektów, z których każdy otrzymany jest ze zbioru X poprzez niezależne skalowanie w pionie i w poziomie oraz przesunięcie, który ma liczbę klikową 2 i liczbę chromatyczną $\Theta(\log \log n)$.*

Znane są następujące szacowania górne liczby chromatycznej grafów przecięć odcinków oraz grafów przecięć krzywych ciągłych o ograniczonej liczbie klikowej. Suk [93] wykazał, że grafy przecięć odcinków spełniają $\chi = O_\omega(\log n)$. Fox i Pach [25] udowodnili, że grafy przecięć krzywych ciągłych spełniają $\chi = (\log n)^{O(\log \omega)}$. Z drugiej strony, ograniczenia dolne z twierdzenia 6 pokazują, że w klasach tych istnieją grafy o liczbie chromatycznej rzędu „tylko” $\Theta(\log \log n)$. Naturalne jest więc pytanie o rząd wielkości, jaką może osiągać liczba chromatyczna w n wierzchołkowym grafie przecięć obiektów na płaszczyźnie o ograniczonej liczbie klikowej. W pracach [B1, B2], stosując podejście on-line, uzyskaliśmy asymptotycznie najlepsze ograniczenia rzędu $\chi = O_\omega((\log \log n)^c)$, gdzie c jest pewną stałą zależną od ω , w szczególnych klasach grafów będących uogólnieniami grafów nachodzeń przedziałów.

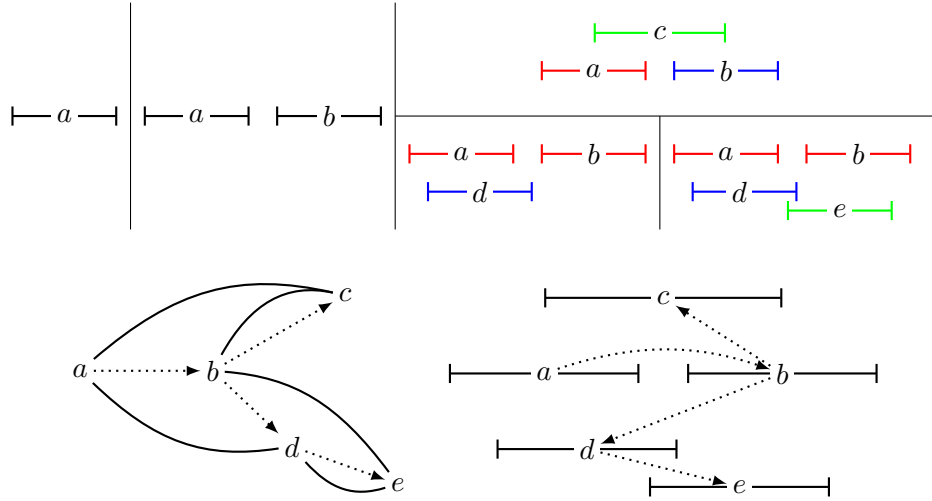
Klasy grafów przedziałowych oraz grafów nachodzeń przedziałów uogólniają się w dwóch kierunkach, które prowadzą do następujących klas grafów:

- *grafów cięciwowych*, będących grafami przecięć poddrzew pewnego drzewa,
- *grafów nachodzeń poddrzew*, będących grafami nachodzeń poddrzew pewnego drzewa,
- *grafów przecięć prostokątów*, będących grafami przecięć prostokątów w \mathbb{R}^2 o bokach wyrównanych do osi układu współrzędnych,
- *grafów nachodzeń prostokątów*, będących grafami nachodzeń prostokątów w \mathbb{R}^2 o bokach wyrównanych do osi układu współrzędnych.

Ramką nazywamy brzeg prostokąta o bokach wyrównanych do osi układów współrzędnych. Zauważmy, że graf nachodzeń rodziny prostokątów jest grafem przecięć ramek pochodzących od tej rodziny prostokątów. Podobnie, grafy nachodzeń poddrzew są grafami przecięć pewnych krzywych ciągłych na płaszczyźnie: krzywe te możemy otrzymać otaczając każde poddrzewo odpowiednio dobraną krzywą ciągłą, tak by krzywe dwóch drzew przecinały się tylko wtedy, gdy odpowiadające im drzewa się nachodzą.

Aby zilustrować podejście on-line do problemów kolorowania geometrycznych klas grafów przecięć rozważmy dwa problemy kolorowania on-line:

- (1) *Problem kolorowania przedziałów* [58]. W problemie tym adversarz wprowadza przedziały domknięte \mathbb{R} , których graf przecięć ma liczbę klikową ograniczoną przez ω , a algorytm on-line koloruje graf przecięć wprowadzanych przedziałów. Kierstead i Trotter [58] wskazali algorytm on-line, który wykorzystuje co najwyżej $3\omega - 2$ kolorów, oraz strategię adversarza zmuszającą każdy algorytm on-line do użycia co najmniej $3\omega - 2$ kolorów. Strategia adversarza wymuszająca 3 kolory w problemie kolorowania przedziałów, których graf przecięć ma liczbę klikową 2, jest przedstawiona na rysunku 3.
- (2) *Problem kolorowania narastających przedziałów* [D6]. W problemie tym adversarz wprowadza czystą rodzinę przedziałów zgodnie z porządkiem ich lewych końców (w chwili prezentacji lewy



RYSUNEK 3. Strategia adwersarza wymuszająca użycie 3 kolorów w problemie kolorowania przedziałów, których graf przecięć ma liczbę klikową 2. W pierwszych dwóch rundach adwersarz wprowadza dwa rozłączne przedziały a oraz b . Jeżeli a i b są kolorowane różnymi kolorami, adwersarz wymusza trzeci kolor, wprowadzając przedział c . Jeżeli a i b otrzymują ten sam kolor, adwersarz wymusza trzeci kolor, wprowadzając przedziały d i e . Na dole po prawej: graf rozgrywki dla opisanej powyżej strategii adwersarza; na dole po lewej: krawędzie w grafie rozgrywki.

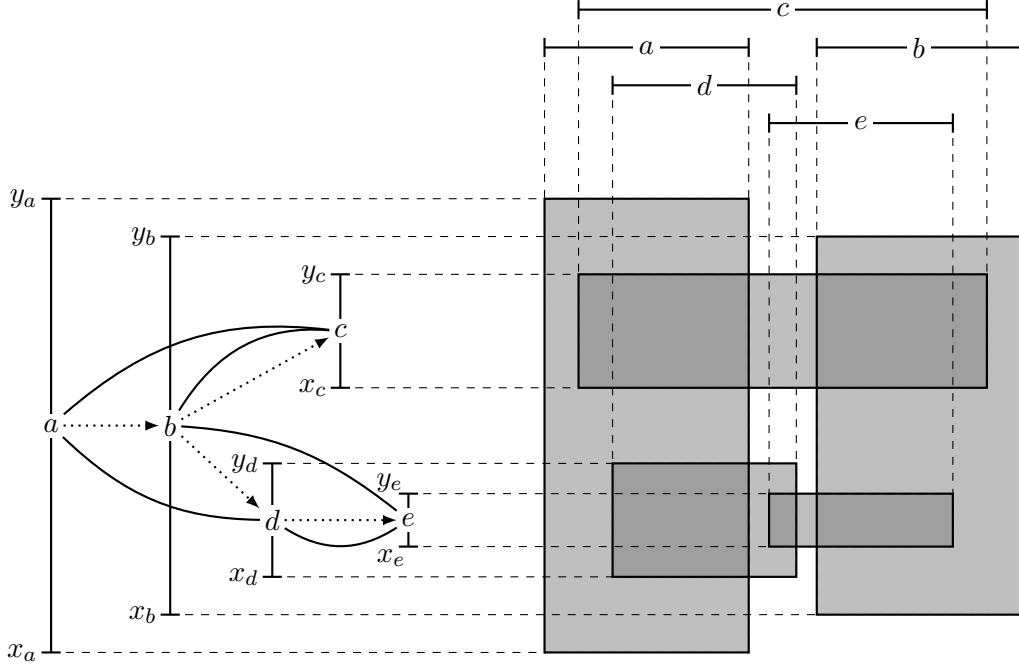
koniec prezentowanego przedziału jest większy od lewych końców przedziałów wprowadzonych we wcześniejszych rundach), których graf nachodzeń ma liczbę klikową ograniczoną przez ω , a algorytm on-line koloruje graf nachodzeń prezentowanych przedziałów. Optymalne strategie algorytmu i adwersarza w tym problemie zostaną omówione wraz z konsekwencjami, jakie wnoszą one do problemu kolorowania grafów przecięć.

Podejście on-line do problemów kolorowania grafów przecięć opiera się na następującej obserwacji: każda deterministyczna i skończona⁸ strategia adwersarza w problemie \mathbb{P} może być „zakodowana” w tak zwanym *grafie rozgrywki* problemu \mathbb{P} . Graf ten określony jest na drzewie ukorzenionym, w którym każda ścieżka od korzenia do liścia odpowiada jednemu scenariuszowi wprowadzania wierzchołków (przedziałów) w strategii adwersarza, zaś każde rozgałęzienie drzewa odpowiada rozgałęzieniu w tej strategii. Graf rozgrywki kodujący tę strategię łączy krawędziami każde dwa wierzchołki leżące na jednej ścieżce od korzenia do liścia (a więc wprowadzane w jednym scenariuszu prezentacji), które reguły problemu \mathbb{P} nakazują pokolorować różnymi kolorami. Graf rozgrywki strategii adwersarza wymuszającej 3 kolory w problemie kolorowania przedziałów, których graf przecięć ma liczbę klikową 2, jest przedstawiony na rysunku 3. Grafy rozgrywek problemu \mathbb{P} mają następujące, dość łatwe do udowodnienia własności:

- (1) Jeżeli w problemie \mathbb{P} kolorowane są grafy o liczbie klikowej ograniczonej przez ω , grafy rozgrywek problemu \mathbb{P} mają liczbę klikową ograniczoną przez ω (oczywiste).
- (2) Jeżeli w problemie \mathbb{P} istnieje deterministyczna i skończona strategia adwersarza zmuszająca algorytm on-line do użycia c kolorów, graf rozgrywki tej strategii ma liczbę chromatyczną co najmniej c (lemat 2.2 z [B2]).
- (3) Jeżeli dla problemu \mathbb{P} istnieje (deterministyczny) algorytm on-line wykorzystujący c kolorów, grafy rozgrywek tego problemu mają liczbę chromatyczną co najwyżej c (lemat 2.1 z [B2]).

Okazuje się, i to właściwie stanowi o sile podejścia on-line, że grafy rozgrywek pewnych szczególnych problemów kolorowania on-line mają różne reprezentacje geometryczne. Dla przykładu,

⁸Zawierająca skończenie wiele możliwych scenariuszy prezentacji, z których wszystkie są skończone.



RYSunEK 4. Graf rozgrywki dla strategii adwersarza z rysunku 3 jako graf przecięć prostokątów w \mathbb{R}^2 .

grafy rozgrywek problemu kolorowania przedziałów mają reprezentację w postaci grafów przecięć prostokątów [B2], zaś grafy rozgrywek problemu kolorowania narastających przedziałów mają reprezentację w postaci grafu nachodzeń prostokątów [D6]. Istotnie, aby otrzymać te reprezentacje, każdy przedział u grafu rozgrywek przekształcamy w prostokąt $u \times [x_u, y_u]$, przy czym przedziały $[x_u, y_u]$ dobieramy tak, by żadne dwa się nie nachodziły oraz by spełniały warunek $x_u < x_v < y_v < y_u$, jeśli tylko przedział u znajduje się na ścieżce od korzenia do v w drzewie grafu rozgrywek (patrz rysunek 4).

„Zakodowana” w grafie rozgrywki strategia adwersarza (Kierstead i Trotter [58]) zmuszająca algorytm on-line do użycia $3\omega - 2$ kolorów w grze na przedziałach, których graf przecięć ma liczbę klikową ω , prowadzi do grafu rozgrywek o liczbie chromatycznej $3\omega - 2$ i liczbie klikowej ω . Prowadzi to do następującego wniosku:

Twierdzenie 7. [B2] *Istnieją grafy przecięć prostokątów o liczbie klikowej ω i liczbie chromatycznej $3\omega - 2$.*

W pracy [D6] podano strategię adwersarza wymuszającą użycie k kolorów w problemie kolorowania narastających przedziałów, których graf przecięć ma liczbę klikową 2. Graf rozgrywki kodujący tę strategię ma $2^{2^{O(k)}}$ wierzchołków. Na mocy wcześniejszych uwag, istnieją grafy nachodzeń n prostokątów o liczbie klikowej 2 i liczbie chromatycznej rzędu $\Theta(\log \log n)$. Okazuje się, że grafy te mają różne reprezentacje geometryczne, między innymi wszystkie te, o których mówi twierdzenie 6.

W pracach [B1, B2] wykorzystaliśmy podejście on-line do uzyskania ograniczeń na liczbę chromatyczną w klasach grafów nachodzeń prostokątów i grafów nachodzeń poddrzew.

Twierdzenie 8 (twierdzenie 1.3 z [B2]).

- (1) *Każdy graf nachodzeń prostokątów spełnia $\chi = O_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$.*
- (2) *Każdy graf nachodzeń czystej rodziny prostokątów spełnia $\chi = O_\omega(\log \log n)$.*

Aby udowodnić twierdzenie 8, najpierw wskazujemy algorytm on-line, który w k -rundowej grze na narastających czystych przedziałach używa $O_\omega(\log k)$ kolorów. Algorytm dla $\omega = 2$ pochodzi

z pracy [B1], jego rozszerzenie na dowolne ω pochodzi z pracy [B2] (lemat 7.3). Algorytm ten oraz użycie tzw. dekompozycji *heavy-light* drzewa, autorstwa Sleatora i Tarjana [91], pozwala nam udowodnić, że grafy rozgrywki problemu kolorowania narastających czystych przedziałów mają liczbę chromatyczną rzędu $O_\omega(\log \log n)$. W pracy [B1] (lemat 2.1) wykazujemy, że każdą czystą rodzinę prostokątów, której graf nachodzeń ma liczbę klikową ograniczoną przez ω , da się podzielić na $O_\omega(1)$ rodzin, których grafy nachodzeń (a dokładnie ich spójne składowe) są grafami rozgrywki problemu kolorowania narastających czystych przedziałów. W taki sposób dowodzimy punkt (2) twierdzenia 8. Dowód punktu (1) wykorzystuje punkt (2), niemniej jednak sprowadzenie ogólnego problemu kolorowania grafów nachodzeń przedziałów do grafów nachodzeń czystych rodzin prostokątów wymaga użycia dodatkowej techniki, która opiera się na tzw. *rozszerzonym algorytmie przeszukiwania wszerz* (sekcja 5 w [B2]). Zauważmy, że ograniczenie z punktu (2) jest asymptotycznie najlepsze (patrz twierdzenie 6). Nie wiemy, czy ograniczenie z punktu (1) jest asymptotycznie najlepsze – jest to spowodowane tym, że w problemie kolorowania narastających przedziałów nie znamy optymalnych strategii dla algorytmu on-line i adversarza, jeżeli nie założymy, że prezentowane przedziały tworzą czystą rodzinę przedziałów.

Włóknem przedziałowym nazywamy funkcję ciągłą o wartościach nieujemnych określoną na przedziale domkniętym w \mathbb{R} i osiągającą wartość 0 na końcach tego przedziału. Rodzinę włókien przedziałowych nazywamy *wolną od nachodzeń* jeżeli dla każdych dwóch włókien z tej rodziny przedziały, na których włókna te są określone, nie nachodzą się.

Twierdzenie 9 (twierdzenie 1.1 z [B2]).

- (1) *Każdy graf przecięć włókien przedziałowych spełnia ograniczenie $\chi = O(2^{\omega(\frac{\omega+1}{2}})$.*
- (2) *Każdy graf przecięć włókien przedziałowych wolnych od nachodzeń spełnia ograniczenie $\chi \leq \binom{\omega+1}{2}$.*
- (3) *Istnieją grafy przecięć włókien przedziałowych wolnych od nachodzeń, dla których $\chi = \binom{\omega+1}{2}$.*

W pracy [23] Felsner wprowadził wariant problemu kolorowania on-line porządków, w którym od adversarza wymaga się, by każdy element w chwili wprowadzania był maksymalny. O porządkach podawanych w ten sposób mówimy, że są podawane w sposób *narastający*. Felsner podał algorytm on-line dla powyższego problemu wykorzystujący $\binom{\omega+1}{2}$ kolorów, gdzie ω jest szerokością wprowadzanego porządku, oraz wykazał, że nie istnieje algorytm lepszy. Punkty (2) oraz (3) powyższego twierdzenia wynikają z następującej zależności (lemat 4.2 z [B2]): klasa grafów przecięć włókien przedziałowych wolnych od nachodzeń równa się klasie grafów rozgrywek dla problemu kolorowania porządków podawanych w sposób narastający. Punkt (1) wynika z punktu (2) oraz z wyniku Kostochki i Kratochvíla [69] mówiącego, że grafy nachodzeń przedziałów spełniają $\chi \leq O(2^\omega)$.

Ostatni wynik tej sekcji dotyczy grafów nachodzeń poddrzew.

Twierdzenie 10 (twierdzenie 1.2 z [B2]).

- (1) *Każdy graf nachodzeń poddrzew spełnia ograniczenie $\chi = O_\omega((\log \log n)^{\binom{\omega}{2}})$.*
- (2) *Każdy graf nachodzeń czystej rodziny poddrzew spełnia ograniczenie $\chi = O_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$.*
- (3) *Istnieją grafy nachodzeń czystej rodziny poddrzew, dla których $\chi = \Theta_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$.*

Niech \mathcal{F} będzie rodziną poddrzew pewnego ukorzonego drzewa T . Enright i Stewart [19] zauważyły, że graf nachodzeń tych poddrzew z \mathcal{F} , które mają niepuste przecięcie z pewną ustaloną ścieżką od korzenia do liścia w T , jest grafem przecięć odpowiednio zdefiniowanych włókien przedziałowych. Spostrzeżenie to pozwala zdefiniować szczególnego rodzaju problem kolorowania on-line grafu przecięć włókien przedziałowych, o którym dowodzi się, że klasa grafów rozgrywek tego problemu równa się klasie grafów nachodzeń czystej rodziny poddrzew (lemat 6.3 z [B2]). Punkty (2) oraz (3) otrzymujemy dzięki znalezieniu optymalnych strategii algorytmu

i adversarza w tej szczególnej grze. Punkt (1) otrzymujemy z (2) oraz z redukcji problemu ogólnego kolorowania grafów nachodzeń poddrzew do czystych grafów nachodzeń poddrzew.

Ograniczenie z twierdzenia 10 (3) jest najlepszym znanym obecnie ograniczeniem dolnym na liczbę chromatyczną w klasie grafów przecięć krzywych na płaszczyźnie.

Warto dodać, że ograniczenia górne z twierdzeń 8 i 10 są osiągalne przez wielomianowe algorytmy kolorowania przy założeniu, że kolorowane klasy grafów mają ograniczoną liczbę klikową oraz znana jest ich reprezentacja.

4.5. Reprezentowanie geometrycznych grafów przecięć i częściowych porządków.

Centralnym problemem badawczym dotyczącym reprezentowania grafów są problemy *rozpoznawania*, które polegają na testowaniu, czy dany na wejściu graf ma reprezentację właściwą dla danej klasy grafów. Problemy tego typu rozważane były już w latach 70-tych i dla wielu klas grafów doczekały się zadowalających rozwiązań w postaci wielomianowych algorytmów rozpoznawania lub dowodów ich trudności obliczeniowej. Zazwyczaj algorytmy wielomianowe rozpoznawania konstruują też właściwe dla danej klasy reprezentacje. Liniowy algorytm rozpoznawania znany jest dla grafów przedziałowych [10], dla grafów równoprzedziałowych⁹ [16] oraz grafów cięciwowych [87]. Algorytm o złożoności $O(n^2)$ znany jest dla klasy grafów przecięć cięciw okręgu [92]. Z drugiej strony, problemy rozpoznawania grafów przecięć dwuwymiarowych obiektów płaszczyzny są zazwyczaj trudne: problem ten jest NP-zupełny dla grafów przecięć prostokątów [72] i grafów przecięć krzywych ciągłych [71, 88] oraz jest $\exists\mathbb{R}$ -zupełny dla grafów przecięć dysków o tym samym promieniu [46] i dla grafów przecięć odcinków na płaszczyźnie [73], gdzie $\exists\mathbb{R}$ jest klasą problemów wielomianowo redukowalnych do egzystencjalnej teorii liczb rzeczywistych¹⁰ ($\text{NP} \subseteq \exists\mathbb{R} \subseteq \text{PSPACE}$).

Wiele klas grafów nieporównywalności (oraz klas porządków) można reprezentować w rodzinach obiektów *rozpiętych* między dwiema liniami równoległymi (poziomymi lub pionowymi) L_1 oraz L_2 , to jest, obiektów zawartych między L_1 oraz L_2 oraz mających z tymi liniami niepuste przecięcie. Każdą rodzinę \mathcal{R} takich obiektów możemy uporządkować geometryczną relacją $<$, w której $X < Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y są rozłączne oraz X leży poniżej (na lewo od) Y . *Modelem* lub *reprezentacją* porządku $P = (V, \leq)$ w rodzinie \mathcal{R} nazywamy odwzorowanie $\phi: V \rightarrow \mathcal{R}$ przypisujące elementom porządku P obiekty \mathcal{R} w taki sposób, że $u < v \iff \phi(u) < \phi(v)$ dla dowolnych elementów u i v porządku P . Zauważmy, że jeżeli $\phi: V \rightarrow \mathcal{R}$ jest modelem porządku w rodzinie \mathcal{R} , to ϕ jest zarazem modelem przecięć grafu nieporównywalności porządku P . Różne klasy obiektów geometrycznych rozpiętych między L_1 i L_2 pozwalają reprezentować i definiować różne klasy porządków. Dla przykładu:

- funkcje ciągłe określone na przedziale $[0, 1]$ reprezentują całą klasę porządków (patrz [75, 30]),
- funkcje liniowe określone na przedziale $[0, 1]$ reprezentują klasę porządków będących przecięciami dwóch porządków liniowych, które zwane są *porządkami 2-wymiarowymi* (patrz [18]),
- trapezy o podstawach zawartych w L_1 i L_2 reprezentują porządki będące przecięciami dwóch porządków przedziałowych, które zwane są *porządkami trapezowymi* (patrz [24]),
- równoległoboki o podstawach zawartych w L_1 oraz L_2 reprezentują klasę *porządków o ograniczonej tolerancji*, stanowiącą pewne uogólnienie klasy porządków przedziałowych (patrz [23]).

Grafy nieporównywalności dla wyżej zdefiniowanych porządków (będące jednocześnie grafami przecięć obiektów, które je definiują) nazywane są kolejno *grafami funkcyjnymi*, *grafami permutacji*, *grafami trapezowymi*, oraz *grafami o ograniczonej tolerancji*. Golumbic, Rotem i Urrutia [30] oraz niezależnie Lovász [75] wykazali, że klasa grafów funkcyjnych równa się klasie grafów nieporównywalności. Golumbic wykazał, że grafy porównywalności możemy rozpoznawać w czasie

⁹Graf równoprzedziałowy to graf przecięć przedziałów \mathbb{R} jednostkowej długości.

¹⁰To jest, do problemu spełnialności formuł postaci $\exists x_1 \dots \exists x_n F(x_1, \dots, x_n)$, gdzie $F(x_1, \dots, x_n)$ jest bezkwantyfikatorową formułą, której atomami są nierówności wielomianów nad zmiennymi rzeczywistymi x_1, \dots, x_n .

$O(n^3)$ [29]. Grafy permutacji i porządki o wymiarze 2 możemy rozpoznawać w czasie liniowym [79] a grafy i porządki trapezowe w czasie $O(n^2)$ [78]. Z drugiej strony, rozpoznawanie grafów i porządków o ograniczonej tolerancji jest problemem NP-zupełnym [41, 80].

4.5.1. *Rozszerzanie częściowych reprezentacji grafów.* Stosunkowo niedawno Klavík, Kratochvíl i Vyskočil [66] zaproponowali następujące bardzo naturalne uogólnienie problemów rozpoznawania geometrycznych klas grafów przecięć. *Częściową reprezentacją* grafu $G = (V, E)$ w rodzinie obiektów \mathcal{R} nazywamy odwzorowanie $\xi: R \rightarrow \mathcal{R}$, takie że $R \subseteq V$ oraz $\xi(u) \cap \xi(v) \iff uv \in E$ dla dowolnych $u, v \in R$. Innymi słowy, częściowa reprezentacja grafu G jest to reprezentacja podgrafu grafu G indukowanego na pewnym zbiorze wierzchołków R .

Problem: Rozszerzanie częściowych reprezentacji grafów przecięć obiektów rodziny \mathcal{R}

Wejście: Graf G i jego częściowa reprezentacja $\xi: R \rightarrow \mathcal{R}$

Pytanie: Czy G ma reprezentację ϕ w rodzinie \mathcal{R} , taką że $\phi|_R = \xi$?

Problemy rozszerzania częściowych reprezentacji są przynajmniej tak trudne jak problemy rozpoznawania (są równoważne, gdy częściowa reprezentacja jest pusta). Dobrym przykładem tego, kiedy problem ten jest istotnie trudniejszy, jest problem rozszerzania częściowych reprezentacji grafów planarnych. Każdy graf planarny można w czasie liniowym narysować na płaszczyźnie, reprezentując krawędzie odcinkami prostymi. Jednak testowanie, czy taką częściową reprezentację można rozszerzyć do reprezentacji całego grafu planarnego, jest już problemem NP-trudnym [83]. Inaczej jest w przypadku, gdy krawędzie grafu planarnego reprezentowane są jako dowolne krzywe ciągłe – wówczas problem rozszerzania ma rozwiązanie liniowe [3].

Mimo że problemy rozszerzania częściowych reprezentacji grafów przecięć badane są od zaledwie kilku lat, w wielu naturalnych klasach grafów przecięć są już rozwiązane. Dla grafów przedziałowych znane są dwa algorytmy o liniowym czasie działania [8, 65]. Dla grafów przecięć przedziałów jednostkowej długości znany jest algorytm kwadratowy [63]. Klasa tych grafów jest równa klasie grafów przecięć przedziałów, z których żaden nie zawiera się w drugim – w tej ostatniej problem rozszerzania ma algorytm liniowy [63]. Problem rozszerzania częściowych reprezentacji grafów częściowych można zdefiniować na wiele sposobów, z których zdecydowana większość jest NP-trudna [64]. Problem rozszerzania częściowych reprezentacji ma algorytm wielomianowy dla grafów przecięć cięciw okręgu [14].

Mój wkład w badania nad algorytmami rozszerzania częściowych reprezentacji, zawarty w pracach [C1] oraz [C2], obejmuje klasy grafów przecięć definiowanych na obiektach rozpiętych między liniami równoległymi L_1 i L_2 , które można uporządkować geometryczną relacją $<$. We wspólniej z Klavíkiem, Kratochvílem i Walczakiem pracy [C1] udowodniliśmy następujące twierdzenia:

Twierdzenie 11 (propozycja 2 w [C1]). *Problem rozszerzania częściowych reprezentacji grafów permutacji można rozwiązać w czasie $O(n^3)$.*

Twierdzenie 12 (twierdzenie 1 z [C1]). *Problem rozszerzania częściowych reprezentacji grafów funkcyjnych można rozwiązać w czasie wielomianowym.*

Dodatkowo, w pracy [C1] rozważaliśmy wariant problemu rozszerzania częściowych reprezentacji grafów funkcyjnych, w których częściową reprezentację stanowią funkcje częściowe określone na pewnym przedziale domkniętym zawartym w $[0, 1]$. Celem algorytmu jest znalezienie reprezentacji grafu, która rozszerza zadane funkcje częściowe do funkcji ciągłych określonych na całym przedziale $[0, 1]$. Okazuje się, że tak zdefiniowany problem nie ma wielomianowego rozwiązania, o ile $P \neq NP$.

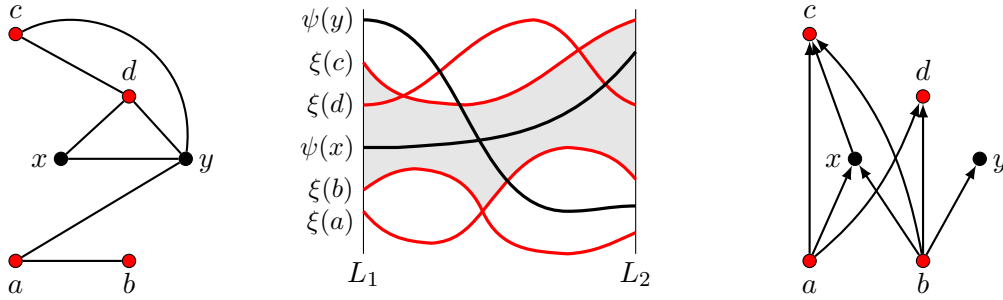
Twierdzenie 13 (twierdzenie 2 z [C1]). *Problem rozszerzania funkcji częściowych do reprezentacji grafu funkcyjnego jest NP-zupełny.*

We wspólnej z Walczakiem pracy [C2] zaproponowaliśmy wielomianowy algorytm dla problemu rozszerzania częściowych reprezentacji grafów trapezowych.

Twierdzenie 14 ([C2]). *Problem rozszerzania częściowych reprezentacji grafów trapezowych można rozwiązać w czasie $O(n^5)$.*

Dowód twierdzenia 11 jest stosunkowo prosty. Dushnik i Miller [18] wykazali, że graf G jest grafem permutacji wtedy i tylko wtedy, gdy G oraz dopełnienie \overline{G} grafu G są grafami porównywalności. Golumbic [29] podał dość prosty algorytm sprawdzający w czasie $O(n^3)$, czy graf G jest grafem porównywalności, sprowadzając ten problem do testowania, czy krawędzie grafu G można przechodnio zorientować. Algorytm z twierdzenia 11 opiera się na wzajemnej odpowiedniości pomiędzy modelami grafu permutacji G oraz parami składającymi się z przechodniej orientacji G i przechodniej orientacji \overline{G} , która wynika z dowodu przytoczonej charakteryzacji grafów permutacji [18]. Problem rozszerzania częściowej reprezentacji grafu permutacji G sprowadza się wówczas do sprawdzenia, czy częściowe orientacje grafu G oraz grafu \overline{G} indukowane przez częściową reprezentację są rozszerzalne do przechodnich orientacji całych grafów. Zadanie to można wykonać, adaptując wspomniany już algorytm Golumbica.

Niech \mathcal{F} będzie rodziną funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0, 1]$. Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem funkcyjnym oraz $\xi : R \rightarrow \mathcal{F}$ jest częściową reprezentacją grafu G . Każdy model ψ grafu G rozszerzający częściową reprezentację ξ ustala przechodnią orientację $(V, <)$ krawędzi dopełnienia \overline{G} grafu G : $u < v \iff \psi(u) < \psi(v)$ dla każdej krawędzi uv w \overline{G} (patrz rysunek 5).



RYСУNEK 5. Graf G (po lewej) oraz częściowa reprezentacja $\xi : \{a, b, c, d\} \rightarrow \mathcal{F}$ grafu G (oznaczona kolorem czerwonym, pośrodku). Rozszerzenie częściowej reprezentacji ξ do modelu ψ całego grafu G (na rysunku pośrodku) ustala przechodnią orientację grafu \overline{G} (na rysunku po prawej). Szarym tłem na środkowym rysunku oznaczony jest region elementu x dla porządku $(V, <)$ z rysunku po prawej.

Aby udowodnić twierdzenie 12, w pierwszej kolejności rozwiązujemy „porządkową” wersję problemu rozszerzania: dla ustalonej przechodniej orientacji $(V, <)$ grafu \overline{G} pytamy, czy istnieje model ψ porządku¹¹ $(V, <)$ rozszerzający częściową reprezentację ξ . Warunkiem koniecznym na istnienie takiego modelu jest *zgodność* porządku $(V, <)$ z częściową reprezentacją ξ , wyrażona warunkiem: $a < b \iff \xi(a) < \xi(b)$ dla każdego $a, b \in R$. Załóżmy, że porządek $(V, <)$ jest zgodny z ξ , oraz ustalmy element $x \in V \setminus R$. W każdym potencjalnym rozwiązaniu ψ problemu w wersji porządkowej funkcja $\psi(x)$ musi znajdować się powyżej funkcji $\xi(a)$, jeśli $a \in R$ i $a < x$, oraz poniżej funkcji $\xi(a)$, jeśli $a \in R$ i $x < a$. Ograniczenia te określają „pasek” rozpięty między L_1 oraz L_2 , w którym musi znaleźć się funkcja $\psi(x)$ – pasek ten nazywamy *regionem* elementu x (patrz rysunek 5). Przyjmując, że regionem elementu $a \in R$ jest wykres funkcji $\xi(a)$, problem

¹¹Pozwalamy sobie tutaj na drobną nieścisłość – oczywiście częściowym porządkiem jest dopełnienie zwrotne przechodniej orientacji $(V, <)$ grafu \overline{G} .

rozszerzania w wersji porządkowej ma następujące rozwiązanie (lemat 1 z [C1]): częściowa reprezentacja $\xi : R \rightarrow \mathcal{F}$ jest rozszerzalna do modelu porządku $(V, <)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- (*) porządek $(V, <)$ jest zgodny z częściową reprezentacją ξ oraz dla każdych dwóch nieporównywalnych elementów w $(V, <)$ ich regiony się przecinają.

Dla ustalonej przechodniej orientacji $(V, <)$ grafu \overline{G} , warunek (*) możemy sprawdzić w czasie wielomianowym.

Aby rozwiązać problem w wersji ogólnej należy sprawdzić, czy istnieje przechodnia orientacja $(V, <)$ grafu \overline{G} spełniająca warunek (*). Graf \overline{G} może mieć wykładniczo wiele przechodnich orientacji, dlatego podejście sprawdzające po kolei wszystkie nie zadziała. Aby pokonać to ograniczenie, wykorzystujemy *modularną dekompozycję* grafu \overline{G} – strukturę, którą możemy utworzyć w czasie liniowym [79] i która pozwala w pamięci liniowej reprezentować wszystkie przechodnie orientacje \overline{G} . Zależności zachodzące pomiędzy przechodnimi orientacjami grafu \overline{G} a modularną dekompozycją \overline{G} zostały opisane przez Gallaiego w pracy [27]. Ponieważ są one podstawą działania algorytmów z twierdzeń 12 i 14 oraz dowodu trudności z twierdzenia 13, pokrótce je tutaj przedstawimy.

Niech $\overline{G} = (V, \sim)$ będzie dopełnieniem grafu $G = (V, E)$. Zbiór $M \subseteq V$ jest *modułem* w \overline{G} , jeżeli każdy wierzchołek x spoza M jest połączony krawędzią grafu \overline{G} z każdym elementem M albo nie jest połączony z żadnym elementem M . Moduł M grafu \overline{G} jest *silny*, jeżeli $M \subseteq N$, $N \subseteq M$, lub $M \cap N = \emptyset$ dla każdego modułu N w \overline{G} . *Modularna dekompozycja* grafu \overline{G} składa się ze wszystkich silnych modułów grafu \overline{G} . Zbiór silnych modułów \overline{G} uporządkowany relacją zawierania tworzy drzewo: korzeniem tego drzewa jest zbiór V , liśćmi są zbiory $\{v\}$ dla $v \in V$, a dzieci każdego silnego modułu M stanowią podział zbioru M . Silne moduły \overline{G} indukują podział krawędzi \overline{G} : krawędź $u \sim v$ grafu \overline{G} przypisujemy do modułu M , co oznaczamy przez $u \sim_M v$, jeżeli $u, v \in M$ oraz u i v należą do różnych dzieci modułu M . Niech M będzie silnym modułem \overline{G} i niech M_1, \dots, M_k będą dziećmi M w modularnej dekompozycji \overline{G} . Silny moduł M nazywamy:

- *równoległym*, jeżeli $M_i E M_j$ dla każdego $i \neq j$,
- *szeregowym*, jeżeli $M_i \sim M_j$ dla każdego $i \neq j$,
- *pierwszym*, jeżeli nie zachodzi żaden z wcześniejszych przypadków.

Gallai [27] wykazał, że dla każdej przechodniej orientacji $(M, <_M)$ grafu (M, \sim_M) oraz dla każdych dwóch dzieci M_i i M_j , takich że $M_i \sim_M M_j$, zachodzi $M_i <_M M_j$ albo $M_j <_M M_i$. Ponadto:

- jeżeli M jest modułem równoległym, (M, \sim_M) jest grafem pustym i ma jedną (pustą) przechodnią orientację,
- jeżeli M jest modułem szeregowym, (M, \sim_M) ma $k!$ przechodnich orientacji postaci $M_{\delta(1)} < \dots < M_{\delta(k)}$ dla wszystkich permutacji δ zbioru $\{1, \dots, k\}$,
- jeżeli M jest modułem pierwszym, (M, \sim_M) ma dokładnie dwie przechodnie orientacje, z których jedna jest przeciwna do drugiej.

Gallai [27] wykazał, że każda przechodnia orientacja grafu \overline{G} w zawężeniu do krawędzi silnego modułu M jest przechodnią orientacją modułu (M, \sim_M) oraz że wszystkie przechodnie orientacje \overline{G} możemy otrzymać poprzez niezależne przechodnie zorientowanie krawędzi każdego silnego modułu (M, \sim_M) .

Przypomnijmy, że problem testowania, czy graf G posiada reprezentację rozszerzającą ξ , jest równoważny sprawdzeniu, czy \overline{G} ma przechodnią orientację spełniającą warunek (*). Algorytm z twierdzenia 12 w pierwszej fazie swojego działania dokonuje redukcji instancji wejściowej do instancji równoważnej, w której każdy silny moduł \overline{G} ma co najwyżej dwie przechodnie orientacje. Redukcja ta pozwala nam reprezentować przechodnie orientacje każdego silnego modułu grafu \overline{G} za pomocą jednej zmiennej boolowskiej. Na mocy twierdzeń Gallaiego [27] wartościowania

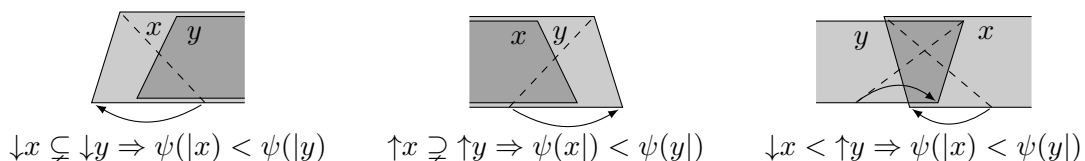
zmiennych modułowych są w jednoznacznej odpowiedniości z przechodnimi orientacjami całego grafu \overline{G} . Następnie dowodzimy, że problem znajdowania przechodniej orientacji \overline{G} spełniającej warunek (*) jest równoważny problemowi spełnialności pewnej szczególnie określonej formuły 2-SAT na zbiorze zmiennych modułowych. Kluczowa obserwacja, która pozwala taką formułę skonstruować, jest następująca (lemat 4 z [C1]): dla każdego wierzchołka $x \in V \setminus R$ w grafie G region x może przyjmować jedną z dwóch postaci, przy czym postać ta zależy od wyboru orientacji jednego silnego modułu \overline{G} . Tym samym problem rozszerzania grafów funkcyjnych możemy rozwiązać algorytmem wielomianowym.

Aby udowodnić twierdzenie 13, stosujemy podobne podejście. Uzyskujemy analogiczny do warunku (*) warunek konieczny i wystarczający dla rozszerzalności funkcji częściowych do reprezentacji $(V, <)$, przy czym w tej wersji problemu regiony elementów porządku $(V, <)$ wymagają nieznacznie innej definicji. Warunek ten pozwala sformułować wielomianowy algorytm dla porządkowej wersji problemu. Okazuje się, że w wersji ogólnej regiony elementów mogą mieć wiele postaci i mogą zależeć od orientacji wielu silnych modułów \overline{G} . Spostrzeżenie to pozwala zakodować spełnialność problemu 3-SAT w problemie rozszerzania funkcji częściowych. Dla formuły 3-SAT konstruujemy egzemplarz problemu rozszerzania: graf funkcyjny i funkcje częściowe dla wierzchołków tego grafu, przy czym tak jak wcześniej, zmienne oraz ich wartościowania odpowiadają modułom oraz orientacjom przechodnim dopełnienia tego grafu, zaś spełnialność formuły równoważna jest spełnialności warunku (*).

Tematem pracy [C2] jest problem rozszerzania częściowych reprezentacji grafów trapezowych. Niech \mathcal{T} będzie zbiorem trapezów o podstawach zawartych pomiędzy dwiema liniami poziomymi L_1 i L_2 . Habib, Kelly i Möhring [38] wykazali, że problem rozpoznawania grafów trapezowych równoważny jest problemowi rozpoznawania porządków trapezowych: graf G ma model przecięć w \mathcal{T} wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna przechodnia orientacja $(V, <)$ grafu \overline{G} ma model w \mathcal{T} . Algorytmy sprawdzające, czy porządek $(V, <)$ ma model w \mathcal{T} , korzystają z następującej obserwacji: każdy model $\psi : V \rightarrow \mathcal{T}$ porządku trapezowego $(V, <)$ może zostać przekształcony do tzw. *modelu znormalizowanego*, który uściśla wzajemne położenie niektórych boków trapezów $\psi(x)$ dla $x \in V$. Aby opisać proces normalizacji modelu ψ , potrzebujemy kilku definicji. Dla $x \in V$, przez $\psi(|x)$ oraz $\psi(x|)$ oznaczmy odpowiednio lewy oraz prawy bok trapezu $\psi(x)$, przyjmijmy również $\downarrow x = \{z \in V : z < x\}$ oraz $\uparrow x = \{z \in V : z > x\}$. Proces normalizacji modelu ψ polega na wykonaniu, dopóki jest to możliwe, jednego z trzech *kroków normalizacji* (patrz rysunek 6):

- (1) jeżeli $\downarrow x \subsetneq \downarrow y$ oraz $\psi(|y) < \psi(|x)$ w linii L_i , koniec odcinka $\psi(|x)$ z linii L_i przeciągamy wzdłuż tej linii tuż przed odcinek $\psi(|y)$, tak aby $\psi(|x) < \psi(|y)$,
- (2) jeżeli $\uparrow y \subsetneq \uparrow x$ oraz $\psi(y|) < \psi(x|)$ w linii L_i , koniec odcinka $\psi(y|)$ z linii L_i przeciągamy wzdłuż tej linii tuż przed odcinek $\psi(x|)$, tak aby $\psi(x|) < \psi(y|)$,
- (3) jeżeli $\downarrow x < \uparrow y$ oraz $\psi(y|) < \psi(|x)$ w linii L_i , końce odcinków $\psi(|x)$ oraz $\psi(y|)$ w linii L_i przeciągamy w kierunku siebie, tak aby ich kolejność na tej linii została zamieniona (tak aby $\psi(|x) < \psi(y|)$).

Każdy z trzech powyższych kroków możemy wykonać tak, by utrzymać własność, że ψ jest modelem $(V, <)$.



RYСУNEK 6. Przekształcanie modelu ψ w model znormalizowany – kroki normalizacji: (1), (2) oraz (3), kolejno.

Rozdwojeniem porządku trapezowego $(V, <)$ nazywamy porządek określony na zbiorze $\{|x, x| : x \in V\}$, w którym zachodzi relacja $x' < y'$ dla $x' \in \{|x, x|\}$ oraz $y' \in \{|y, y|\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w modelu znormalizowanym ψ porządku $(V, <)$ zachodzi $\psi(x') < \phi(y')$. Pomimo iż porządek trapezowy może mieć wiele reprezentacji znormalizowanych (reprezentacje takie mogą się różnić kierunkiem krzyżowania się boków trapezów), rozdzielenie porządku $(V, <)$ jest jednoznaczne i zależy tylko od porządku $(V, <)$ (a dokładnie od relacji, jakie zachodzą wśród zbiorów $\uparrow x$ i $\downarrow x$ dla $x \in V$) [78]. Algorytmy rozpoznawania porządków trapezowych [15, 24, 78] wykorzystują następującą obserwację: porządek $(V, <)$ jest porządkiem trapezowym wtedy i tylko wtedy, gdy rozdzielenie porządku $(V, <)$, które zależy od porządku $(V, <)$, ma model w zbiorze odcinków rozpiętych między L_1 a L_2 , co można sprawdzić w czasie wielomianowym.

W problemie rozszerzania częściowych reprezentacji grafów trapezowych, tak jak w grafach funkcyjnych, najpierw rozwiązujemy porządkową wersję problemu rozszerzania: dla ustalonej przechodniej orientacji $(V, <)$ grafu \overline{G} pytamy, czy częściowa reprezentacja ξ jest rozszerzalna do modelu ψ porządku $(V, <)$. Nasze podejście do tego problemu jest następujące. Załóżmy, że ψ jest rozwiązaniem problemu w wersji porządkowej. Model ψ można przekształcić do znormalizowanego modelu ϕ , stosując pewien ciąg kroków normalizacji (1)-(3). Oznacza to, że $(V, <)$ ma model rozszerzający ξ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje model znormalizowany ϕ porządku $(V, <)$, na którym możemy wykonać serię operacji odwrotnych do (1)-(3), które przekształcą ϕ do modelu $(V, <)$ rozszerzającego ξ – o modelu ϕ , który spełnia te warunki, powiemy, że *podlega procesowi denormalizacji*. Zadaniem algorytmu jest więc sprawdzenie, czy istnieje model znormalizowany porządku $(V, <)$, który podlega procesowi denormalizacji. Porządek $(V, <)$ może mieć wiele modeli znormalizowanych – są one w jednoznacznej odpowiedniości z przechodnimi orientacjami grafu nieporównywalności rozdzielenia porządku $(V, <)$. Tak jak uprzednio, wszystkie przechodnie orientacje tego grafu można opisać w terminach przechodnich orientacji jego silnych modułów. Tym samym, wprowadzając zmienne dla silnych modułów, uzyskujemy wzajemną jednoznaczność między wartościowaniami tych zmiennych a modelami znormalizowanymi porządku $(V, <)$. Następnie w terminach formuły 2-SAT, oznaczonej w pracy [C2] symbolem Φ , formułujemy warunki konieczne i wystarczające wyrażające możliwość wykonania procedury denormalizacji – w szczególności, wartości zmiennych modułowych z wartościowania spełniającego tę formułę określają w sposób jednoznaczny model znormalizowany porządku $(V, <)$, który podlega procedurze denormalizacji. Problem istnienia modelu porządku trapezowego $(V, <)$ rozszerzającego częściową reprezentację ξ sprowadza się więc do sprawdzenia, czy formuła Φ jest spełnialna (lemat 7 w [C2]). Ostatecznie, algorytm testujący, czy porządek trapezowy $(V, <)$ posiada model rozszerzający ξ , można zaimplementować tak, by działał w czasie $O(n^4)$.

Zadaniem algorytmu rozszerzania częściowej reprezentacji ξ grafu trapezowego G jest wyszukanie przechodniej orientacji $(V, <)$ grafu \overline{G} takiej, że porządek $(V, <)$ ma model rozszerzający ξ w zbiorze \mathcal{T} . W pierwszej fazie działania algorytm redukuje instancję wejściową do instancji równoważnej, w której każdy silny moduł grafu \overline{G} ma co najwyżej dwie przechodnie orientacje – redukcja ta pozwala reprezentować wszystkie przechodnie orientacje grafu \overline{G} wartościowaniami zmiennych boolowskich związanymi z silnymi modułami grafu \overline{G} . Następnie zawężamy przeszukiwany zbiór przechodnich orientacji grafu \overline{G} do tych orientacji, które spełniają pewien zbiór ograniczeń, wyrażony w pracy formułą Π postaci 2-SAT. Ograniczenia te spełniają podobną rolę do warunku (*) w problemie rozszerzania grafów funkcyjnych: jeżeli przechodnia orientacja $(V, <)$ spełnia ograniczenia Π , to $(V, <)$ jest zgodna z częściową orientacją ξ oraz dla każdego dwóch nieporównywalnych elementów w $(V, <)$ obszary między liniami L_1 oraz L_2 , w których mogą znaleźć się trapezy reprezentujące te elementy w potencjalnym rozwiązaniu problemu w wersji porządkowej, mają niepuste przecięcie. Przechodnią orientację grafu \overline{G} , która ma model rozszerzający ξ , wyszukujemy wykorzystując programowanie dynamiczne po drzewie modularnej

dekompozycji grafu \overline{G} , w kolejności od liści do korzenia. Dla każdego silnego modułu M algorytm określa *dobrą* przechodnią orientację tego modułu, korzystając z już obliczonej informacji o dobrych przechodnich orientacjach dla podmodułów modułu M . Aby zdecydować, czy ustalona orientacja $(M, <_M)$ modułu M jest dobra, algorytm wybiera dowolną dobrą orientację dla każdego podmodułu modułu M (co jest możliwe dzięki programowaniu dynamicznemu) oraz dowolną przechodnią orientację dla każdego innego silnego modułu dekompozycji modularnej \overline{G} , tak aby przechodnia orientacja $(V, <)$ całego grafu \overline{G} powstająca ze złożenia wybranych przechodnich orientacji silnych modułów spełniała zbiór ograniczeń Π (wybór taki jest rozwiązaniem odpowiednio zdefiniowanej instancji 2-SAT). Algorytm oznacza orientację $(M, <_M)$ jako dobrą, jeżeli porządek $(R \cup M, <)$ powstały z $(V, <)$ przez odrzucenie niereprezentowanych elementów spoza M posiada model rozszerzający ξ w zbiorze trapezów \mathcal{T} . Warunek ten możemy sprawdzić algorytmem rozszerzania w wersji porządkowej. Algorytm stwierdza, że G ma model rozszerzający ξ , jeżeli co najmniej jedna orientacja modułu V jest dobra. Dowód poprawności algorytmu opiera się na lemacie (lemat 10 z [C2]), który gwarantuje, że niezależnie od wyboru orientacji silnych modułów różnych od M , algorytm rozszerzania porządku $(R \cup M, <)$ albo zawsze stwierdza, że $(R \cup M, <)$ ma model rozszerzający ξ , albo zawsze stwierdza, że model taki nie istnieje.

5. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

5.1. Algorytmy on-line kolorowania porządków.

- [D1] Bartłomiej Bosek, Stefan Felsner, Kamil Kloch, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki, Piotr Micek,
On-line chain partitions of orders: a survey,
Order 29 (1), 49–73, 2012.

Praca [D1] jest pracą przeglądową dotyczącą zagadnień związanych z kolorowaniem on-line zbiorów częściowo uporządkowanych. Zawiera między innymi:

- zarys pierwszego podwykładniczego algorytmu dla problemu ogólnego autorstwa Boska i Krawczyka z pracy [A2] (sekcja 3),
- nowe ograniczenie dolne dla problemu ogólnego: $val(w) \geq (2 - o(1))\binom{w+1}{2}$ (twierdzenie 3.2 z sekcji 3.2).

Ponadto praca zawiera omówienie problemów kolorowania on-line różnych klas porządków przy różnych ograniczeniach na sposób prezentowania porządku. Ze względu na te ograniczenia wyróżniamy:

- porządki podawane w sposób *narastający*, w których każdy element w chwili prezentacji jest maksymalny,
- porządki podawane z *reprezentacją*, w których każdy wprowadzany element reprezentowany jest przez odpowiedni obiekt geometryczny.

W pracy omawiamy problemy kolorowania on-line:

- w klasie porządków przedziałowych (sekcja 4) i równopredziałowych (sekcja 5) wprowadzanych z reprezentacją i bez reprezentacji, w sposób narastający i ogólny,
- w klasie porządków d -wymiarowych podawanych z reprezentacją, w sposób ogólny i narastający (sekcja 6).

Dodatkowo omawiamy *adaptowną* wersję problemu kolorowania on-line porządków. W wersji tej każdy element w chwili wprowadzenia może otrzymać więcej niż jeden kolor, kolory te mogą być mu następnie odbierane i przydzielane innym wprowadzanym elementom, ale z zachowaniem warunku, że zbiór kolorów przydzielony każdemu elementowi jest niepusty (sekcja 8).

Ponadto praca zawiera kilka uproszczonych dowodów dla znanych już wcześniej twierdzeń.

5.2. Wymiar on-line porządków.

- [D2] Stefan Felsner, Tomasz Krawczyk, William T. Trotter,
On-line dimension for posets excluding two long incomparable chains,
Order 30 (1), 1–12, 2013.
- [D3] Bartłomiej Bosek, Kamil Kloch, Tomasz Krawczyk, Piotr Micek,
On-line dimension of semi-orders,
Order 30 (2), 593–615, 2013.
- [D4] Bartłomiej Bosek, Kamil Kloch, Tomasz Krawczyk, Piotr Micek,
On-line version of Rabinovitch theorem for proper intervals,
Discrete Mathematics 312 (23), 3426–3436, 2012.

Realizatorem porządku P jest zbiór liniowych rozszerzeń P , których przecięcie jest równe P . Dushnik i Miller [18] zdefiniowali *wymiar* porządku P jako licznosc minimalnego realizatora P . Równoważnie, wymiar P to najmniejsze d takie, że P jest podporządkiem \mathbb{R}^d z relacją „po współrzędnych”. Znane są następujące ograniczenia na wymiar porządków. Hiraguchi udowodnił, że wymiar każdego porządku jest ograniczony szerokością tego porządku [43]. Füredi, Hajnal, Rödl i Trotter [26] wykazali, że wymiar n -elementowego porządku przedziałowego jest rzędu $O(\log \log n)$ i ograniczenie to jest asymptotycznie najlepsze. Rabinovitch [86] wykazał, że wymiar każdego porządku równoprzedziałowego wynosi co najwyżej 3 i ograniczenie to jest możliwe najlepsze.

Algorytm on-line utrzymujący realizator rozmiaru d otrzymuje porządek P w kolejności elementów x_1, \dots, x_n i konstruuje d liniowych porządków L_1, \dots, L_d , tak że dla każdego $1 \leq i \leq n$:

- po zaprezentowaniu elementów x_1, \dots, x_i porządki liniowe L_1, \dots, L_d stanowią realizator porządku $P[x_1, \dots, x_i]$ (porządku P indukowanego przez elementy $\{x_1, \dots, x_i\}$),
- po zaprezentowaniu elementu x_i algorytm wstawia element x_i do porządków liniowych L_1, \dots, L_d , przy czym pozycja x_i w każdym z tych porządków zależy tylko i wyłącznie od $P[x_1, \dots, x_i]$ oraz aktualnego stanu porządków L_1, \dots, L_d .

Klasa \mathcal{P} ma *wymiar on-line* co najwyżej d , jeżeli istnieje algorytm on-line utrzymujący realizator rozmiaru d dla każdego scenariusza prezentacji każdego porządku z klasy \mathcal{P} . Równoważnie, klasa \mathcal{P} ma wymiar on-line co najwyżej d , jeżeli istnieje algorytm on-line „zanurzający” elementy wprowadzanego porządku z klasy \mathcal{P} w przestrzeń \mathbb{R}^d z relacją „po współrzędnych”.

Kierstead, McNulty i Trotter [55] wykazali, że wymiar on-line klasy porządków o wymiarze 2 nie jest ograniczony oraz że wymiar on-line klasy porządków szerokości w wynosi co najmniej w . Wyniki te oraz twierdzenie orzekające, że wymiar (off-line) porządku szerokości w wynosi co najwyżej w , skierowały uwagę na badanie problemu wymiaru on-line w klasie porządków szerokości co najwyżej w . Kierstead, McNulty i Trotter [55] udowodnili, że wymiar on-line porządków szerokości 2 wynosi co najwyżej 6. *Koroną szerokości k* nazywamy porządek składający się z k elementów minimalnych a_1, \dots, a_k oraz k elementów maksymalnych b_1, \dots, b_k oraz porównywalności $a_i < b_i$ oraz $a_i < b_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, k$ (cyklicznie). Autorzy pracy [55] wykazali, że wymiar on-line porządków szerokości 3 nie jest ograniczony: przeciwnik w tej strategii wprowadza najpierw strukturę składającą się z dwóch nieporównywalnych łańcuchów wysokości d , które są następnie łączone koroną szerokości 3. Z drugiej strony, główne twierdzenie pracy [55] orzeka, że wymiar on-line porządków szerokości w , które są wolne od koron szerokości k dla $3 \leq k \leq w$, jest ograniczony przez $val(w)!$, gdzie $val(w)$ jest liczbą kolorów, jakie używa optymalny algorytm kolorowania on-line porządków z tej klasy (algorytm Kiersteada, McNulty’ego i Trottera wykorzystuje jako „czarną skrzynkę” algorytm kolorowania porządków on-line). Autorzy [55] zadają również pytanie, które ciągle pozostaje otwarte, czy w klasie porządków szerokości w wolnych od korony szerokości 3 wymiar on-line jest ograniczony. Wspomniana strategia

adwersarza pokazująca, że wymiar on-line porządków szerokości 3 jest nieograniczony, poza koroną szerokości 3, wprowadza również dowolnie dużą strukturę $(\underline{k} + \underline{k})$. Naturalne jest więc pytanie, czy zabronienie tej struktury pomaga skonstruować algorytm on-line utrzymujący skończony realizator. Główny wynik pracy [D2] pokazuje, że tak właśnie jest (twierdzenie 1.1 w [D2]): dla dowolnych $w, k \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $d = d(w, k)$ oraz algorytm on-line utrzymujący realizator rozmiaru d w klasie $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnych porządków szerokości w . W pracy [D2] znajdują się dwa dowody poprawności tego algorytmu, oba wykorzystujące dosyć proste własności kombinatoryczne $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnych porządków szerokości w . Dla przykładu, dowód z sekcji 4.4 pracy [D2] korzysta z faktu, że szerokość ścieżkowa grafów nieporównywalności $(\underline{k} + \underline{k})$ -wolnych porządków szerokości w jest ograniczona przez $O(kw^2)$. Wynik ten nie jest wypowiedziany wprost, przedstawiona jest tylko konstrukcja, jak otrzymać dekompozycję ścieżkową świadczącą tę szerokość (sekcja 4.4 w [D2]).

Prace [D3] oraz [D4] dotyczą problemu szacowania wymiaru on-line w klasie porządków przedziałowych.

W pracy [D3] skupiamy się na problemie wymiaru on-line porządków przedziałowych podawanych bez reprezentacji. Dla takiego scenariusza prezentowania porządków znane są następujące ograniczenia: wymiar on-line porządków równoprzedziałowych wynosi co najmniej $4w/3$ [55], zaś wymiar on-line porządków przedziałowych wynosi co najwyżej $4w - 4$ [44]. W pracy [D3] wykazujemy, że wymiar on-line porządków równoprzedziałowych jest ograniczony przez $2w$ (twierdzenie 9 z [D3]). Główny wynik pracy [D3] dotyczy problemu wymiaru on-line w klasie porządków równoprzedziałowych podawanych w sposób narastający. W klasie tej działa wspomniana już strategia adwersarza z pracy [55], która pokazuje, że wymiar on-line tej klasy porządków wynosi co najmniej w . W pracy [D3] konstruujemy algorytm on-line, który utrzymuje realizator rozmiaru w w tej klasie porządków (algorytm 2 w [D3]). Algorytm ten jest więc optymalny i pokazuje, że wymiar on-line porządków równoprzedziałowych podawanych w sposób narastający wynosi w (twierdzenie 18 w [D3]).

Praca [D4] dotyczy problemu wymiaru on-line porządków równoprzedziałowych podawanych z reprezentacją. W pracy tej rozważamy dwie wersje tego problemu, w których adwersarz wprowadza porządek: (1) w postaci przedziałów jednostkowej długości (2) w postaci przedziałów, z których żaden nie zawiera się w drugim. Uogólniając argument Rabinovitcha, wykazujemy, że wymiar on-line porządków podawanych w postaci przedziałów jednostkowej długości wynosi 3 (wniosek 2 w [D4]). Główny wynik pracy [D4] orzeka (sekcja 3.2 twierdzenia 3 w [D4]), że wymiar on-line porządków podawanych w postaci przedziałów, z których żaden nie zawiera się w drugim, jest ograniczony od góry przez 4 oraz że ograniczenie to jest możliwie najlepsze (sekcja 3.1 twierdzenia 3 w [D4]).

5.3. Kolorowanie grafów reprezentowanych geometrycznie.

- [D5] Arkadiusz Pawlik, Jakub Kozik, Tomasz Krawczyk, Michał Lasoń, Piotr Micek, William T. Trotter, Bartosz Walczak,
Triangle-free intersection graphs of line segments with large chromatic number,
Journal of Combinatorial Theory, Series B 105, 6–10 (5 stron), 2014.
- [D6] Arkadiusz Pawlik, Jakub Kozik, Tomasz Krawczyk, Michał Lasoń, Piotr Micek, William T. Trotter, Bartosz Walczak,
Triangle-free geometric intersection graphs with large chromatic number,
Discrete and Computational Geometry 50 (3), 714–726 (13 stron), 2013.

Podstawowe aspekty prac [D5] oraz [D6] zostały już omówione w sekcji 4.4. W pracy [D5] przedstawiamy konstrukcję grafu przecięć n odcinków na płaszczyźnie o liczbie klikowej 2 i liczbie chromatycznej $\Theta(\log \log n)$. Konstrukcją tą wykazujemy, że nieprawdziwa jest czysto

teoriografowa hipoteza Scotta twierdząca, że dla każdego grafu H klasa grafów nie zawierająca w sposób indukowany H oraz wszystkich podpodziałów¹² H jest χ -ograniczona (patrz [90]).

Głównym wynikiem pracy [D6] jest omawiane już w sekcji 4.4 twierdzenie, które orzeka, że dla każdego zbioru łukowo spójnego i zwartego X , nie będącego prostokątem wyrównanym do osi układu współrzędnych, istnieje rodzina \mathcal{F} obiektów, z których każdy jest otrzymany poprzez przesunięcie i niezależne skalowanie w pionie i w poziomie zbioru X , której graf przecięć ma liczbę klikową 2 i liczbę chromatyczną $\Theta(\log \log n)$ (twierdzenie 1 z [D6]). Ponadto podajemy warunki wystarczające na to, aby rodzinę o podobnych własnościach uzyskać z jednokładnych kopii zbioru X (dopuszczając jednocześnie skalowanie w dwóch wymiarach oraz przesuwanie zbioru X) – warunki te są dość techniczne i nie będziemy ich tutaj przedstawiać (patrz sekcja 3 w [D6]). Przykładami zbiorów spełniających te własności są brzegi kwadratów o bokach wyrównanych do osi układu współrzędnych czy też okręgi na płaszczyźnie.

Ponadto w pracy tej (sekcja 4 w [D6]) opisujemy związki pomiędzy problemem kolorowania on-line (grafu nachodzeń) narastających przedziałów a problemem kolorowania grafów przecięć ramek. Zależności te zostały już omówione w sekcji 4.4 tego opracowania.

5.4. Rozszerzanie częściowych reprezentacji grafów planarnych.

- [D7] Steven Chaplick, Grzegorz Guśpiel, Grzegorz Gutowski, Tomasz Krawczyk, Giuseppe Liotta,
The partial visibility representation extension problem,
Algorithmica, w druku, DOI:10.1007/s00453-017-0322-4, 38 stron.
Wersja konferencyjna:
Steven Chaplick, Grzegorz Guśpiel, Grzegorz Gutowski, Tomasz Krawczyk, Giuseppe Liotta,
The partial visibility representation extension problem,
24th International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization (GD 2016),
Lecture Notes in Computer Science 9801, 266–279, Springer, 2016.

Tematem pracy [D7] jest problem rozszerzania częściowych reprezentacji grafów planarnych reprezentowanych w „modelu widoczności”. Niech \mathcal{I} będzie rodziną poziomych odcinków na płaszczyźnie. Powiemy, że $\psi : V(G) \rightarrow \mathcal{I}$ jest *modelem widoczności* (ang. *bar visibility model*) grafu G , jeżeli $uv \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(u)$ oraz $\psi(v)$ się widzą, co oznacza, że istnieje prostokąt wyrównany do osi układu współrzędnych, którego poziome boki są zawarte w $\psi(u)$ oraz w $\psi(v)$ i który jest rozłączny z pozostałymi przedziałami $\psi(w)$ dla $w \in V \setminus \{u, v\}$. Oczywiście, jeżeli graf G posiada model widoczności, G jest grafem planarnym. Tamassia i Tollis [94] udowodnili, że każdy dwuspójny graf planarny ma model widoczności i że model taki może być skonstruowany w liniowym czasie. W problemie rozszerzania częściowej reprezentacji grafu planarnego do modelu widoczności dany jest graf planarny G oraz reprezentacja $\xi : R \rightarrow \mathcal{I}$ części wierzchołków $V(G)$, zadaniem zaś jest sprawdzenie, czy istnieje model widoczności grafu G rozszerzający ξ . W pracy [D7] wykazujemy, że problem ten jest NP-zupełny (twierdzenie 1 z [D7]). Ponadto rozważamy również „skierowaną” wersję tego problemu, w której dany na wejściu graf G jest zorientowany, a zadaniem algorytmu jest znalezienie modelu widoczności ψ grafu G rozszerzającego częściową reprezentację ξ i spełniającego $u \rightarrow v$ w $E(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi(u)$ i $\psi(v)$ się widzą oraz $\psi(u)$ jest pod $\psi(v)$. Problem ten rozwiązujemy w pewnej szczególnej wersji. Skierowany graf planarny G z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami s oraz t jest *st-orientacją*, jeżeli G jest acykliczny, s/t jest jedynym źródłem/ujściem grafu G oraz istnieje zanurzenie planarne G na płaszczyźnie, w którym oba wierzchołki s i t są przyległe

¹²Podpodziałem H jest graf powstały z H poprzez zastąpienie każdej jego krawędzi ścieżką na 2 lub więcej wierzchołkach.

do ściany zewnętrznej. Tamassia i Tollis [94] wykazali, że graf planarny G ma st -orientację wtedy i tylko wtedy, gdy graf skierowany G ma *prostokątny* model widoczności ψ , to jest model, w którym wszystkie przedziały $\psi(u)$ są zawarte w prostokącie płaszczyzny, którego dolnym oraz górnym bokiem są przedziały $\psi(s)$ oraz $\psi(t)$, odpowiednio. W pracy [D7] podajemy algorytm o złożoności $O(n \log^2 n)$, który testuje, czy dana na wejściu częściowa reprezentacja st -orientacji grafu planarnego G jest rozszerzalna do prostokątnej reprezentacji grafu G (twierdzenie 3 z [D7]). Algorytm ten wykorzystuje programowanie dynamiczne po *SPQR-drzewie*, czyli strukturze opisującej wszystkie planarne zanurzenia st -orientacji na płaszczyźnie z wierzchołkami s oraz t przylegającymi do ściany zewnętrznej.

5.5. Rozgrywana liczba chromatyczna grafów nieporównywalności.

[D8] Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
Asymmetric coloring games on incomparability graphs,
Electronic Notes in Discrete Mathematics, 59, 803–811, 2015.

Rozważmy następującą grę na grafie G rozgrywaną przez dwoje graczy, Alicję i Boba, parametryzowaną parą liczb (a, b) dla $a, b \in \mathbb{N}$. Gracze naprzemiennie kolorują w sposób właściwy wierzchołki grafu G , używając kolorów z pewnego ustalonego zbioru C , przy czym w pojedynczej rundzie gry najpierw Alicja koloruje a wierzchołków, później zaś Bob koloruje b wierzchołków. *Rozgrywana liczba chromatyczna* $\chi_g(G, a, b)$ grafu G jest mniejsza niż bądź równa d , jeżeli Alicja ma strategię w tej grze, niezależną od wyborów Boba, która zapewnia, że cały graf G zostanie pokolorowany kolorami ze zbioru C o liczności d . Dla klasy grafów \mathcal{G} kładziemy

$$\chi_g(\mathcal{G}, a, b) = \max_{G \in \mathcal{G}} \chi_g(G, a, b).$$

Problem ograniczania rozgrywanej liczby chromatycznej w wariacie *symetrycznym*, to jest w przypadku $a = 1$ oraz $b = 1$, ma bardzo bogatą historię. W szczególności, problem ten był intensywnie badany w klasie lasów, grafów zewnętrznie planarnych, grafów planarnych czy też grafów przedziałowych. I tak, $\chi_g(\mathcal{F}, 1, 1) = 4$, jeżeli \mathcal{F} jest klasą lasów [9, 20], $6 \leq \chi_g(\mathcal{O}, 1, 1) \leq 7$, jeżeli \mathcal{O} jest klasą grafów zewnętrznie planarnych [33, 59], $8 \leq \chi_g(\mathcal{P}, 1, 1) \leq 17$, jeżeli \mathcal{P} jest klasą grafów planarnych [59, 98], $2\omega - 2 \leq \chi_g(\mathcal{I}_\omega, 1, 1) \leq 3\omega - 2$, jeżeli \mathcal{I}_ω jest klasą grafów przedziałowych o liczbie klikowej ω [20]. Zależności pomiędzy rozgrywaną liczbą chromatyczną a innymi parametrami grafowymi, takimi jak rozgrywana liczba kolorująca, rozszerzona liczba kolorująca czy acykliczna liczba chromatyczna, zostały przedstawione w pracy Bartnickiego, Grytczuka, Kiersteada oraz Zhu [6].

Problem szacowania rozgrywanej liczby chromatycznej w przypadku *asymetrycznym*, to jest w przypadku, gdy $a > 1$ lub $b > 1$, jako pierwszy rozważył Kierstead w pracy [50]. W pracy tej Kierstead podał najlepsze oszacowania asymetrycznej rozgrywanej liczby chromatycznej w klasie lasów dla każdej pary parametrów (a, b) , $a, b \in \mathbb{N}$. Bardzo silne ograniczenia na asymetryczną liczbę chromatyczną w klasie grafów przedziałowych, zewnętrznie planarnych oraz planarnych zostały podane przez Kiersteada i Yanga [60] oraz Yanga i Zhu [96].

W pracy [D8] rozważamy problem ograniczania asymetrycznej liczby chromatycznej w klasie grafów nieporównywalności o liczbie klikowej ω – klasę tych grafów oznaczamy przez \mathcal{P}_ω . Główna hipoteza (hipoteza 1.1) postawiona w pracy [D8] mówi, że dla każdego ustalonego $\omega \geq 2$ zachodzi $\chi_g(\mathcal{P}_\omega, a, b) < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a}{b} \geq 2$. W pracy [D8] dowodzimy jedną implikację tej hipotezy; mianowicie, dla ustalonych parametrów (a, b) , takich że $\frac{a}{b} < 2$, wykazujemy, że $\chi_g(\mathcal{P}_\omega, a, b) = \infty$ dla każdego $\omega \geq 2$ (twierdzenie 1.3 z [D8]). Z drugiej strony pokazujemy, że $\chi_g(\mathcal{P}_\omega, 2, 1) \leq \omega 2^{\omega-1}$ (twierdzenie 1.6 z [D8]), co dowodzi głównej hipotezy w przypadku, gdy $a = 2$ oraz $b = 1$. Ponadto dowodzimy, że jeżeli $\frac{a}{b} \geq 2$, to zachodzi $\chi_g(\mathcal{P}_\omega, a, b) \geq (1 + 1/\lceil \frac{a}{2b} \rceil)^{\omega-1}$ (twierdzenie 1.5 w [C2]). Oznacza to, że jeżeli $\frac{a}{b} \geq 2$, to każda strategia Alicji kolorująca grafy

nieporównywalności o liczbie klikowej ω potrzebuje wykładniczo wielu kolorów w zależności od ω . Twierdzenie to pokazuje również, że strategia z twierdzenia 1.6 jest asymptotycznie najlepsza.

5.6. Algorytmiczne własności kodów kluczowych.

[D9] Wit Foryś, Tomasz Krawczyk, James Anderson,
Semiretracts - a counterexample and some results,
Theoretical Computer Science 307 (1), 117–127, 2003.

[D10] Wit Foryś, Tomasz Krawczyk,
An algorithmic approach to the problem of a semiretract base,
Theoretical Computer Science 369 (1-3), 314–322, 2006.

Niech Σ^* będzie wolnym monoidem nad alfabetem Σ . *Kodem kluczowym* nazywamy zbiór $C \subset \Sigma^*$ o tej własności, że każde słowo w C zawiera *klucz*, to jest literę, która występuje w tym słowie dokładnie jeden raz i nie występuje w żadnym innym słowie z C . *Retraktem* wolnego monoidu Σ^* nazywamy zbiór C^* , gdzie C jest kodem kluczowym w Σ^* . Head [42] wykazał, że R jest retraktem Σ^* wtedy i tylko wtedy, gdy R jest zbiorem punktów stałych homomorfizmu $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$. *Semiretraktem* wolnego monoidu Σ^* nazywamy przecięcie dowolnej rodziny retraktów.

W pracy [2] Anderson dowodził, że każdy semiretrakt wolnego monoidu jest przecięciem dwóch retraktów. Główny wynik pracy [D9] podaje kontrprzykład dla tego stwierdzenia (sekcja 2 w [D9]), co uzasadnia wprowadzenie następującego pojęcia. *Wymiarem* semiretraktu S nazywamy minimalną liczbę retraktów, która w przecięciu daje S . W pracy [D9] podajemy, wyrażony w terminach pewnego problemu kombinatorycznego na słowach, warunek konieczny i wystarczający na to, aby wymiar semiretraktu był ograniczony przez d (twierdzenie 26 z [D9]). W pracy [74] podajemy rozwiązanie tego problemu poprzez jego redukcję do problemu maksymalnego przepływu w sieciach.

W pracy [2] Anderson wykazał, że semiretrakt wolnego monoidu $S = \bigcap_{i=1}^n D_i^*$, gdzie $\{D_i : 1 \leq i \leq n\}$ jest rodziną kodów kluczowych, można przedstawić w postaci $S = \bigcap_{i=1}^n C_i^*$, gdzie $\{C_i : 1 \leq i \leq n\}$ jest rodziną kodów kluczowych określonych na tym samym zbiorze kluczy. W pracy [D10] pokazujemy alternatywny, algorytmiczny dowód tego twierdzenia, który pozwala w czasie wielomianowym obliczyć kody kluczowe C_1, \dots, C_n (twierdzenie 2.2 z [D10]). Ponadto podajemy wielomianowy algorytm, który dla wejścia D_1, \dots, D_n konstruuje minimalny automat deterministyczny rozpoznający język $\bigcap_{i=1}^n D_i^*$ (sekcja 5 w [D10]).

LITERATURA

- [1] M. Ajtai, J. Komlós, E. Szemerédi, A note on Ramsey numbers, *J. Combin. Theory Ser. A*, 3(29), 354–360, 1980.
- [2] J. Anderson, The intersection of retracts of A^* , *Theoret. Comput. Sci.* 237, 439–445, 2000.
- [3] P. Angelini, G. Di Battista, F. Frati, V. Jelínek, J. Kratochvíl, M. Patrignani, I. Rutter, Testing planarity of partially embedded graphs, *ACM Trans. Algorithms* 11(4), Article 32, 2015.
- [4] E. Asplund, B. Grünbaum, On a colouring problem, *Math. Scand.* 8, 181–188, 1960.
- [5] K. Baker, P. Fishburn, F. Roberts, Partial orders of dimension 2, *Networks* 2(1), 11–28, 1971.
- [6] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. Kierstead, X. Zhu, The map-coloring game, *Amer. Math. Monthly* 114 (9), 793–803, 2007.
- [7] D. Bean, Effective coloration, *J. Symbolic Logic*, 41, 469–480, 1976.
- [8] T. Bläsius, I. Rutter, Simultaneous PQ-ordering with applications to constrained embedding problems, *SODA 2013*, 1030–1043, 2013.
- [9] H. Bodlaender, On the complexity of some coloring games, *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 2, 133–147, 1991.
- [10] K.S. Booth, G.S. Lueker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms. *J. Comput. Syst. Sci.* 13(3), 335–379, 1976.
- [11] B. Bosek, On-line chain partitioning approach to scheduling, *praca doktorska*, 2008.

- [12] Bartłomiej Bosek, Henry Kierstead, Tomasz Krawczyk, Grzegorz Matecki, Mathew E. Smith, An easy subexponential bound for on-line chain partitioning, w recenzji.
- [13] M. Chrobak, M. Ślusarek, On some packing problem related to dynamic storage allocation, *RAIRO Inform. Théor. Appl.* 22(4), 487–499, 1988.
- [14] S. Chaplick, R. Fulek, P. Klavík, Extending partial representations of circle graphs, *GD 2013, Lecture Notes Comput. Sci.* 8242, 131–142, 2013.
- [15] O. Cogis, On the Ferrers dimension of a digraph, *Discrete Math.* 38(1), 47–52, 1982.
- [16] X. Deng, P. Hell, J. Huang, Linear-time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs, *SIAM J. Comput.* 25(2), 390–403, 1996.
- [17] V. Dujmović, G. Joret, D. R. Wood, An improved bound for First-Fit on posets without two long incomparable chains, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 26, 1068–1075, 2012.
- [18] B. Dushnik, E. Miller, Partially ordered sets, *Amer. J. Math.* 63 (3), 600–610, 1941.
- [19] J. Enright, L. Stewart, Subtree filament graphs are subtree overlap graphs, *Inform. Process. Lett.* 104 (6), 228–232, 2007.
- [20] U. Faigle, U. Kern, H. Kierstead, W.T. Trotter, On the game chromatic number of some classes of graphs, *Ars Combin.* 35, 143–150, 1993.
- [21] P. Fishburn, Intransitive indifference with unequal indifference intervals. *J. Math. Psychol.* 7, 144–149, 1970.
- [22] S. Felsner, Interval orders: combinatorial structures and algorithms, Ph.D. Thesis, 1993.
- [23] S. Felsner, On-line chain partitions of orders, *Theoretical Computer Science* 175, 283–292, 1997.
- [24] S. Felsner, M. Habib, R. Möhring, On the interplay between interval dimension and dimension, *SIAM J. Discrete Math.* 7(1), 22–40, 1994.
- [25] J. Fox, J. Pach, Applications of a new separator theorem for string graphs, *Combin. Prob. Comput.* 23, 66–74, 2014.
- [26] Z. Füredi, P. Hajnal, V. Rödl, W. Trotter, Interval orders and shift graphs, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 60, 297–313, 1992.
- [27] T. Gallai: Transitiv orientierbare Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 18(1–2), 25–66, 1967.
- [28] M. Garey, D. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, *Theor. Comput. Sci.* 1 (3), 237–267, 1976.
- [29] M. Golumbic, The complexity of comparability graph recognition and coloring, *Computing* 18 (3), 199–208, 1977.
- [30] M. Golumbic, D. Rotem, J. Urrutia, Comparability graphs and intersection graphs, *Discrete Math.* 43, 37–46, 1983.
- [31] R. Graham, M. Grötschel, L. Lovász *Handbook of combinatorics*, 1995.
- [32] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, 1988.
- [33] D. Guan, X. Zhu, Game chromatic number of outerplanar graphs, *J. Graph Theory* 30 (1), 67–70, 1999.
- [34] A. Gyárfás, On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs, *Discrete Math.* 55, 161–166, 1985. Corrigendum: *Discrete Math.* 62, 333, 1986.
- [35] A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, *Zastos. Mat.* 19, 413–441, 1987.
- [36] A. Gyárfás, J. Lehel, On-line and first-fit coloring of graphs, *Journal of Graph Theory* 12, 217–227, 1988.
- [37] A. Gyárfás, J. Lehel, Effective on-line coloring of P_5 free graphs, *Combinatorica* 11, 181–184, 1991.
- [38] M. Habib, D. Kelly, R. Möhring, Interval dimension is a comparability invariant, *Discrete Math.* 88(2–3), 211–229, 1991.
- [39] M. Halldórsson, M. Szegedy, Lower bounds for on-line graph coloring, *Theoretical Computer Science* 130, 163–174, 1994.
- [40] M. Halldórsson, Parallel and on-line graph coloring, *Journal of Algorithms* 23, 265–280, 1997.
- [41] R. B. Hayward, R. Shamir, A note on tolerance graph recognition, *Discrete Applied Mathematics* 143(1–3), 307–311, 2004.
- [42] T. Head, Expanded Subalphabets in the theories of languages and semigroups, *Internat. J. Comput. Math.* 12, 113–123, 1982.
- [43] T. Hiraguchi, On the dimension of orders, *Sci. Rep. Kanazawa Univ.* 4, 1–20, 1955.
- [44] L. Hopkins, Some Problems Involving Combinatorial Structures Determined by Intersections of Intervals and Arcs, *Praca doktorska*, University of South Carolina, 1981.
- [45] G. Joret, K. Milans, First-fit is linear on posets excluding two long incomparable chains, *Order* 28, 455–464, 2011.
- [46] R.J. Kang, T. Müller, Sphere and dot product representations of graphs, *Discrete Comput. Geom.* 47(3), 548–568, 2012.
- [47] H. Kierstead, An effective version of Dilworth’s theorem, *Transactions of the American Mathematical Society* 268, 63–77, 1981.

- [48] H. Kierstead, Recursive ordered sets, *Combinatorics and Ordered Sets. Contemp. Math.* 57, 75 – 102, 1986.
- [49] H. Kierstead, The linearity of first-fit coloring of interval graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 1(4), 526–530, 1988.
- [50] H. Kierstead, Asymmetric graph coloring games, *J. Graph Theory*, 48, 169–185, 2005.
- [51] H. Kierstead, K. Kolossa, On-Line Coloring of Perfect Graphs, *Combinatorica* 16(4), 479–491, 1996.
- [52] H. Kierstead, S. Penrice, Radius two trees specify χ -bounded classes, *Journal of Graph Theory* 18, 119–129, 1994.
- [53] H. Kierstead, S. Penrice, W. Trotter, On-line coloring and recursive graph theory, *SIAM J. Discrete Math.* 7, 72–89, 1994.
- [54] H. Kierstead, J. Qin, Coloring interval graphs with First-Fit, *Discrete Math.* 144(1–3), 47–57, 1995.
- [55] H. Kierstead, G. McNulty, W. Trotter, A theory of recursive dimension for ordered sets, *Order* 1(1), 67–82, 1984.
- [56] H. Kierstead, M. Smith, On first-fit coloring of ladder-free posets, *European J. Combin.* 34, 474–489, 2013.
- [57] H. Kierstead, D. Smith and W. Trotter, First-fit coloring on interval graphs has performance ratio at least 5, *European Journal of Combinatorics* 51, 236–254, 2016.
- [58] H. Kierstead, W. Trotter, An extremal problem in recursive combinatorics, *Congr. Numer.* 33, 143–153, 1981.
- [59] H. Kierstead, Z. Tuza, Game coloring numbers and treewidth, *manuscript*.
- [60] H. Kierstead, D. Yang, Very asymmetric marking games, *Order*, 22(2), 93–107, 2005.
- [61] J. Kim, The Ramsey number $R(3, t)$ has order of magnitude $t^2 / \log t$, *Random Struct. Algor.* 7(3), 173–208, 1995.
- [62] S. Kim, A. Kostochka, K. Nakprasit, On the chromatic number of intersection graphs of convex sets in the plane, *Electron. J. Combin.* 11, R52, 2004.
- [63] P. Klavík, J. Kratochvíl, Y. Otachi, I. Rutter, T. Saitoh, M. Saumell, T. Vyskočil, Extending partial representations of proper and unit interval graphs, SWAT 2014, Lecture Notes Comput. Sci. 8503, 253–264, 2014.
- [64] P. Klavík, J. Kratochvíl, Y. Otachi, T. Saitoh, Extending partial representations of subclasses of chordal graphs, ISAAC 2012, Lecture Notes Comput. Sci. 7676, 444–454, 2012.
- [65] P. Klavík, J. Kratochvíl, Y. Otachi, T. Saitoh, T. Vyskočil, Extending partial representations of interval graphs, arXiv:1306.2182v2.
- [66] P. Klavík, J. Kratochvíl, T. Vyskočil, Extending partial representations of interval graphs, TAMC 2011, Lecture Notes Comput. Sci. 6648, 276–285, 2011.
- [67] A. Kostochka, On upper bounds for the chromatic numbers of graphs, *Trudy Inst. Mat.* 10, 204–226, 1988.
- [68] A. Kostochka, Coloring intersection graphs of geometric figures with a given clique number, *Towards a Theory of Geometric Graphs, Contemp. Math.* 342, 127–138, 2004.
- [69] A. Kostochka, J. Kratochvíl, Covering and coloring polygon-circle graphs, *Discrete Math.* 163, 299–305, 1997.
- [70] A. Kostochka, J. Nešetřil, Chromatic number of geometric intersection graphs, *1995 Prague Midsummer Combinatorial Workshop, KAM Series* 95–309, 43–45, Charles University, Prague, 1995.
- [71] J. Kratochvíl, String graphs. II. Recognizing string graphs is NP-hard. *J. Combin. Theory Ser. B*, 52(1), 67–78, 1991.
- [72] J. Kratochvíl, A special planar satisfiability problem and a consequence of its NP-completeness, *Discrete Appl. Math.*, 52(3), 233–252, 1994.
- [73] J. Kratochvíl, J. Matoušek, Intersection graphs of segments, *J. Combin. Theory Ser. B* 62(2), 289–315, 1994.
- [74] T. Krawczyk, Algorytmiczne własności kodów kluczowych, *praca doktorska*, Uniwersytet Jagielloński, 2005.
- [75] L. Lovász, Perfect graphs, *Selected Topics in Graph Theory* 2, 55–87, 1983.
- [76] L. Lovász, M. Saks, W.T. Trotter, An on-line graph coloring algorithm with sublinear performance ratio, *Discrete Mathematics* 75, 319–325, 1989.
- [77] E. Malesińska, S. Piskorz, G. Weißenfels, On the chromatic number of disc graphs, *Networks* 32, 13–22, 1998.
- [78] T. Ma, J. Spinrad, On the 2-chain subgraph cover and related problems, *J. Algorithms* 17(2), 251–268, 1994.
- [79] R. McConnell, J. Spinrad, Modular decomposition and transitive orientation, *Discrete Math.* 201 (1–3), 189–241, 1999.
- [80] G. Mertziotis, I. Sau, S. Zaks, The Recognition of Tolerance and Bounded Tolerance Graphs, *SIAM J. Comput.* 40(5), 1234–1257, 2011.
- [81] Jan Mycielski, Sur le coloriage des graphes, *Colloq. Math.* 3, 161–162, 1955.
- [82] N. Narayanaswamy, R. Babu, A note on first-fit coloring of interval graphs, *Order* 25(1), 49–53, 2008.
- [83] M. Patrignani, On extending a partial straight-line drawing, *Int. J. Found. Comput. Sci.* 17(5), 1061–1070, 2006.
- [84] R. Peeters, On coloring j -unit sphere graphs, FEW 512, Department of Economics, Tilburg University, 1991.
- [85] S. Pemmaraju, R. Raman, Approximation algorithms for the max-coloring problem, *Lecture Notes in Comput. Sci.* 3580, 1064–1075, 2005.

- [86] I. Rabinovitch, The dimension of semiorders, *J. Combin. Theory Ser. A* 25 (1), 50–61, 1978.
- [87] D.J. Rose, R.E. Tarjan, G.S. Lueker, Algorithmic aspects of vertex elimination on graph, *SIAM J. Computing* 5 (2), 266–283, 1976.
- [88] M. Schaefer, E. Sedgwick, D. Štefankovič, Recognizing string graphs in NP, *J. Comput. Syst. Sci.* 67(2), 365–380, 2003.
- [89] D. Scott, P. Suppes, Foundational aspects of theories of measurements, *J. Symb. Log.* 23, 113–128, 1958.
- [90] Alex D. Scott, Induced trees in graphs of large chromatic number, *J. Graph Theory* 24 (4), 297–311, 1997.
- [91] D. Sleator, Robert E. Tarjan, A data structure for dynamic trees, *J. Comput. System Sci.* 26 (3), 362–391, 1983.
- [92] J.P. Spinrad, Recognition of circle graphs, *J. Algorithms* 16(2), 264–282, 1994.
- [93] A. Suk, Coloring intersection graphs of x -monotone curves in the plane, *Combinatorica* 34, 487–505, 2014.
- [94] R. Tamassia, I.G. Tollis, A unified approach to visibility representations of planar graphs, *Discrete Comput. Geom.* 1(4), 321–341, 1986.
- [95] J. Wu, X. Zhu, Lower bounds for the game colouring number of partial k -trees and planar graphs, *Discrete Math.* 308, 2637–2642, 2008.
- [96] D. Yang, X. Zhu, Activation strategy for asymmetric marking games, *European J. Combin.* 29(5), 1123–1132, 2008.
- [97] M. Yannakakis, The complexity of the partial order dimension problem, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 3(3), 351–358, 1982.
- [98] X. Zhu, Refined activation strategy for the marking game, *J. Combin. Theory Ser. B* 98, 1–18, 2008.
- [99] D. Zuckerman, Linear degree extractors and the inapproximability of Max Clique and Chromatic Number, *Theory of Computing* 3, 103–128, 2007.
- [100] A. Zykov, On some properties of linear complexes, *Mat. Sb. (N.S.)* 24(66) 2, 163–188, 1949.

Tomasz Kowalczyk