

# Autoreferat

**1.** Imię i Nazwisko: Paweł Pilarczyk

**2.** Posiadane dyplomy, stopnie naukowe – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej:

- (a) tytuł zawodowy magistra matematyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie (dyplom z wyróżnieniem), 1997; temat pracy magisterskiej: *Macierze połączeń dla rozkładów Morse’a*; promotor: prof. dr hab. Roman Srzednicki
- (b) tytuł zawodowy magistra informatyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie (dyplom z wyróżnieniem), 1999; temat pracy magisterskiej: *Obliczanie homologii kompleksów łańcuchowych i zbiorów kostkowych*; promotor: prof. dr hab. Marian Mrozek
- (c) stopień doktora nauk matematycznych w zakresie informatyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, 2001; temat rozprawy: *Topologiczny algorytm ścisłej weryfikacji istnienia trajektorii okresowych*; promotor: prof. dr hab. Marian Mrozek

**3.** Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- (a) październik 1999 – sierpień 2006: asystent w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, Katedra Metod Numerycznych
- (b) sierpień 2001 – maj 2003 oraz sierpień 2005 – lipiec 2006: Visiting Assistant Professor w School of Mathematics na Georgia Institute of Technology w Atlancie w stanie Georgia w U.S.A. (staż podoktorski)
- (c) sierpień 2006 – wrzesień 2007: stypendysta instytucji rządowej Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) w Instytucie Matematyki na Uniwersytecie Kioto w Japonii przez okres 13 miesięcy (staż podoktorski)
- (d) lipiec 2008 – czerwiec 2013: Investigador Auxiliar<sup>1</sup> w Centro de Matemática na Universidade do Minho w Bradze w Portugalii (staż podoktorski)
- (e) kwiecień 2014 – sierpień 2016: Marie Curie Intra-European Postdoctoral Fellow (do marca 2016), a następnie Postdoctoral Fellow (kwiecień-sierpień 2016) w grupie Edelsbrunnera w Institute of Science and Technology Austria (staż podoktorski)
- (f) od sierpnia 2016 do chwili obecnej: Assistant Professor (Tenure Track) w California State University Channel Islands, Computer Science Program, Kalifornia, U.S.A.

---

<sup>1</sup>Pozycja naukowa (wymagany doktorat) bez obowiązku prowadzenia zajęć dydaktycznych.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

a) tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego:

**Algorytmy dyskretne ścisłej analizy numeryczno-topologicznej układów dynamicznych**

b) wykaz publikacji wchodzących w skład osiągnięcia naukowego (w porządku chronologicznym):

- [H1] K. Mischaikow, M. Mrozek, P. Pilarczyk, Graph approach to the computation of the homology of continuous maps, *Found. Comput. Math.*, Vol. 5, No. 2 (2005), 199–229.  
DOI: [10.1007/s10208-004-0125-2](https://doi.org/10.1007/s10208-004-0125-2).
- [H2] P. Pilarczyk, K. Stolot, Excision-preserving cubical approach to the algorithmic computation of the discrete Conley index, *Topology Appl.*, Vol. 155, No. 10 (2008), 1149–1162.  
DOI: [10.1016/j.topol.2008.02.003](https://doi.org/10.1016/j.topol.2008.02.003).
- [H3] Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 8, No. 3 (2009), 757–789.  
DOI: [10.1137/080734935](https://doi.org/10.1137/080734935).
- [H4] P. Pilarczyk, Parallelization method for a continuous property, *Found. Comput. Math.*, Vol. 10, No. 1 (2010), 93–114.  
DOI: [10.1007/s10208-009-9050-8](https://doi.org/10.1007/s10208-009-9050-8).
- [H5] S. Luzzatto, P. Pilarczyk, Finite resolution dynamics, *Found. Comput. Math.*, Vol. 11, No. 2 (2011), 211–239.  
DOI: [10.1007/s10208-010-9083-z](https://doi.org/10.1007/s10208-010-9083-z).
- [H6] E. Liz, P. Pilarczyk, Global dynamics in a stage-structured discrete-time population model with harvesting, *J. Theoret. Biol.*, Vol. 297 (2012), 148–165.  
DOI: [10.1016/j.jtbi.2011.12.012](https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2011.12.012).
- [H7] D.H. Knipl, P. Pilarczyk, G. Röst, Rich bifurcation structure in a two-patch vaccination model, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 14, No. 2 (2015), 980–1017.  
DOI: [10.1137/140993934](https://doi.org/10.1137/140993934).  
Ten artykuł był również wymieniony w wiadomościach popularnonaukowych: [SIAM Nuggets](#), [ScienceDaily](#), and [phys.org](#).
- [H8] S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow, P. Pilarczyk, Inducing a map on homology from a correspondence, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 144, No. 4 (2016), 1787–1801.  
DOI: [10.1090/proc/12812](https://doi.org/10.1090/proc/12812).

c) omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania:

## 1. Wprowadzenie

Korzystając z solidnych podstaw matematycznych (magisterium z matematyki, praca magisterska na temat indeksu Conleya) oraz doświadczenia w projektowaniu algorytmów i tworzeniu oprogramowania naukowego (magisterium z informatyki, praca magisterska na temat algorytmów obliczania homologii), moje zainteresowania naukowe koncentrują się na tworzeniu metod algorytmicznych służących topologicznej analizie jakościowej układów dynamicznych. W ramach badań naukowych związanych z moim doktoratem, opracowałem pewne podstawowe algorytmy i metody, które zostały później uogólnione i przekształciły się w kompletne składniki osiągnięć opisanych poniżej.

Moje osiągnięcia naukowe zawierają wyniki czterech rodzajów: (a) wyniki teoretyczne (definicje, twierdzenia, dowody), (b) algorytmy obliczania wybranych niezmienników oraz przetwarzania związanych z nimi struktur danych, (c) oprogramowanie naukowe, a także (d) zastosowania do badania konkretnych modeli matematycznych.

Moim centralnym osiągnięciem naukowym jest opracowanie kompleksowej metody do automatycznej analizy jakościowej dynamiki globalnej obserwowanej w układzie dynamicznym na ograniczonym podzbiorze  $\mathbb{R}^n$  przy zadanej rozdzielczości. Może to być układ semidynamiczny z czasem dyskretnym (indukowany przez odwzorowanie ciągłe, niekoniecznie odwracalne) albo układ dynamiczny z czasem ciągłym (potok; indukowany przez równanie różniczkowe zwyczajne). Równania definiujące ten układ dynamiczny mogą zawierać kilka parametrów, których wartości znajdują się w konkretnych zakresach, a wtedy w wyniku obliczeń zbiór parametrów zostaje podzielony na podzbiory, dla których obserwuje się taki sam rodzaj dynamiki. Dynamika jest klasyfikowana przy pomocy rozkładu Morse’a, przy czym obliczone indeksy Conleya zbiorów Morse’a pozwalają rozróżnić różne typy stabilności izolowanych zbiorów niezmienniczych.

Metoda ta została wprowadzona w pracy [H3] dla układów semidynamicznych z czasem dyskretnym, a następnie uogólniona do potoków w [H7]; jest ona omówiona w rozdziale 3 poniżej. Kilka zastosowań tej metody zostało przedstawionych w [H3], [H6] i [H7]; zastosowania te są omówione w rozdziale 4 poniżej.

Omawiana metoda algorytmiczna składa się z kilku części. Najważniejszym składnikiem, do którego rozwoju znacznie się przyczyniłem, jest efektywna metoda obliczania homologicznego indeksu Conleya przy użyciu zbiorów kostkowych, która bazuje na algorytmach wprowadzonych w [H1] oraz [H2]. To podejście do obliczania indeksu Conleya jest omówione w rozdziale 5 poniżej. Ogólniejsza metoda, która pokonuje niektóre ograniczenia tego podejścia, została wprowadzona w [H8] i jest omówiona w rozdziale 6. Inne składniki zawierają iteracyjną metodę przybliżania na różnych rozdzielczościach oraz oryginalną metodę prowadzenia obliczeń równoległych, obie wprowadzone w [H4], gdzie również została przedstawiona metoda efektywnego przybliżania zbioru parametrów o określonych właściwościach, omówiona w rozdziale 6 poniżej.

Gdy się pracuje z modelem układu dynamicznego widzianego w pewnej rozdzielczości, pojawia się naturalne pytanie, czy niektóre własności dynamiczne (takie jak tranzytywność lub mieszanie) nie mogłyby być zdefiniowane bezpośrednio na tym modelu, a także jaki byłby wtedy związek między tak zdefiniowanymi właściwościami a oryginalnymi właściwościami modelowanego układu. Ten temat jest ściśle powiązany z metodą

wprowadzoną w [H3] i jest omówiony w rozdziale 6 poniżej oraz w [H5], gdzie również jest podjęta próba uzasadnienia tego, że właściwości obserwowane w skończonej rozdzielczości być może są ważniejsze (z perspektywy zastosowań) niż te, które widać dopiero w skali nieskończonej. Byłoby to bardzo ważnym uzasadnieniem metod opierających się na dyskretnej analizie algorytmicznej, ponieważ nadałoby ono ściśle zdefiniowany sens wynikom otrzymanym w skończonej rozdzielczości.

## 2. Kilka słów o oprogramowaniu

Chciałbym podkreślić fakt, że programy komputerowe stanowią ważne uzupełnienie wyników natury teoretycznej zawartych w artykułach naukowych. Są one nie tylko dowodem na to, że rozwijane przeze mnie metody teoretyczne daje się faktycznie stosować, lecz jest również ważnym narzędziem badawczym używanym nie tylko przeze mnie. Oprogramowanie to jest opisane w kolejnych rozdziałach niniejszego autoreferatu razem z opisem osiągnięć opublikowanych w artykułach.

Tworzenie oprogramowania naukowego zawierającego dobrej jakości implementację algorytmów sformułowanych w publikacjach naukowych jest pracą bardzo żmudną, która wymaga znacznych umiejętności, twórczego myślenia, wiedzy teoretycznej i doświadczenia praktycznego. Zadanie to zahacza o techniki inżynierii oprogramowania i wymaga również dogłębnego rozumienia matematycznej natury obiektów oraz algorytmów, które są implementowane.

Kod źródłowy oprogramowania, które powstało w związku z publikacjami wchodzącymi w skład habilitacyjnego osiągnięcia naukowego, jest opublikowany na stronach internetowych, których adresy podane są w tych artykułach. Każdy plik kodu źródłowego oprogramowania zawiera informacje o jego autorstwie, która może pomóc w ocenie mojego wkładu, ponieważ – aby zapewnić kompletność tego programowania – może ono zawierać kod skopiowany z innych publicznie dostępnych bibliotek programistycznych albo po prostu programy napisane przez innych autorów i umieszczone w jednym pakiecie w celu wspólnego rozpowszechniania, nawet jeżeli te fragmenty oprogramowania nie są faktycznie używane w mojej pracy. Na tych stronach znajdują się również prezentacje danych (nierzadko interaktywne) omawianych w publikacjach. W celu kompletności niniejszego autoreferatu, poniżej znajduje się spis tych stron (w kolejności chronologicznej):

- [S1] Computational Homology Project. The Original CHomP Software (2005+),  
<http://chomp.rutgers.edu/software/>
- [S2] Excision-Preserving Cubical Approach to the Algorithmic Computation of the Discrete Conley Index. Software and Examples (2008),  
<http://www.pawelpilarczyk.com/excision/>
- [S3] Conley-Morse Graphs Computation Software (2009),  
<http://www.pawelpilarczyk.com/cmgraphs/>
- [S4] Databases for the Global Dynamics of Multiparameter Systems (2009),  
<http://chomp.rutgers.edu/database/>
- [S5] Parallelization Method for a Continuous Property. Software and Examples (2010),  
<http://www.pawelpilarczyk.com/parallel/>

- [S6] Finite Resolution Dynamics. Software and Examples (2011),  
<http://www.pawelpilarczyk.com/finresdyn/>
- [S7] A Stage-Structured Discrete Population Model with Harvesting. Results of Computations (2012),  
<http://pawelpilarczyk.com/harvesting/>
- [S8] Rich Bifurcation Structure in a Two-Patch Vaccination Model. Results of Computations (2015),  
<http://www.pawelpilarczyk.com/infmodel/>

### 3. Automatyczna analiza dynamiki globalnej

Artykuły zawierające osiągnięcia opisane w tym rozdziale: [H3], [H4], [H7].

Oprogramowanie i prezentacje danych: [S3], [S4], [S8], a także część [S1].

Układy dynamiczne są wykorzystywane do modelowania wielu zjawisk w nauce. Z punktu widzenia zastosowań, często ważne jest badanie długoterminowego zachowania dynamiki w ograniczonym obszarze dopuszczalnych stanów systemu w zależności od wartości kilku parametrów. Można na przykład badać długoterminową dynamikę populacji wybranych roślin, która zależy od współczynników reprodukcji różnych grup wiekowych oraz prawdopodobieństwa przeżycia do następnej grupy wiekowej. Znajdowanie stanów równowagi, rozwiązań okresowych i innych zbiorów niezmienniczych stanowi ważny wkład w takie badania. Metody analityczne zwykle koncentrują się na rozwiązywaniu równań w celu znalezienia punktów stacjonarnych, a następnie badaniu ich stabilności. To zadanie jest bardzo pracochłonne i pozwala uzyskać tylko ograniczoną ilość informacji o dynamice (np. bardzo trudno jest znajdować analitycznie niestacjonarne rozwiązania okresowe równań różniczkowych zwyczajnych). Z drugiej strony, symulacje numeryczne pozwalają szybko przeanalizować dynamikę, lecz ich wyniki nie są matematycznie ścisłe, a jeśli chodzi o dynamikę długoterminową, pozwalają one zwykle znajdować wyłącznie zbiory stabilne.

Metody, którymi jestem zainteresowany, łączą matematykę dyskretną, ścisłą numerykę i topologię algebraiczną, a ich celem jest tworzenie algorytmów do obliczania niezmienników topologicznych dynamiki (stąd tytuł osiągnięcia habilitacyjnego). W tym podejściu ścisłe metody numeryczne (takie jak obliczanie wartości wyrażeń w arytmetyce przedziałowej) są wykorzystywane do tworzenia dyskretnej reprezentacji dynamiki odzwierciedlającej jej topologię (w postaci skończonego grafu skierowanego, w którym wierzchołki odpowiadają fragmentom przestrzeni fazowej, a krawędzie odpowiadają odwzorowaniu tych fragmentów). Następnie są stosowane metody obliczeniowe topologii algebraicznej (obliczanie grup homologii przestrzeni, a także obliczanie homomorfizmów indukowanych w homologiach przez odwzorowania) w celu obliczania niezmienników topologicznych (takich jak indeks Conleya), które z kolei dają informacje o dynamice (takie jak istnienie niepustych izolowanych zbiorów niezmienniczych), i w ten sposób koło się zamyka. Proces jest wykonywany przez algorytmy z minimalnym udziałem człowieka, a matematyczna poprawność uzyskanych wyników jest udowodniona przez komputer.

### 3.1. Schemat bazy danych do analizy dynamiki globalnej układów z parametrami

Całościowa metoda algorytmiczna wprowadzona w [H3] ma na celu prowadzenie analizy jakościowej dynamiki globalnej w układzie dynamicznym.<sup>2</sup> Analiza ta jest przeprowadzana na ograniczonym podzbiorze  $\mathbb{R}^n$  (zob. poniżej), który jest podzielony na skończoną liczbę kostek względem ustalonej kraty o krawędziach równoległych do osi współrzędnych.<sup>3</sup> W dalszym ciągu opisu, dyskretne struktury danych (takie jak grafy skończone) odpowiadające właściwym obiektom (ciągłym) będą nazywane obiektami *kombinatorycznymi*. W szczególności *kombinatoryczna reprezentacja* ciągłego odwzorowania  $f$  jest to odwzorowanie wielowartościowe<sup>4</sup>  $\mathcal{F}$ , które każdej kostce  $Q$  z ustalonej kraty przypisuje skończony zbiór kostek pokrywający obraz tej kostki:  $f(Q) \subset |\mathcal{F}(Q)|$ , gdzie  $|\mathcal{F}(Q)|$  oznacza sumę mnogościową kostek z  $\mathcal{F}(Q)$ . Takie odwzorowanie kombinatoryczne może być w naturalny sposób reprezentowane przez graf skierowany. Podobnie, *kombinatoryczny zbiór Morse’a* to otoczenie izolujące faktycznego zbioru Morse’a zbudowane ze skończonej liczby kostek względem kraty.

Dane wejściowe do metody obliczeniowej składają się z następujących obiektów:

1. Ograniczony zbiór prostopadłościenny  $B \subset \mathbb{R}^n$  (produkt kartezjański ograniczonych przedziałów domkniętych), na którym dynamika będzie analizowana.
2. Układ semidynamiczny  $\varphi$  z czasem dyskretnym zdefiniowany albo przez podanie wzoru na odwzorowanie, które go generuje, albo przez zaprogramowanie algorytmu obliczania ścisłego oszacowania zewnętrznego dowolnego (małego) zbioru prostopadłościennego w postaci zbioru prostopadłościennego, który zawiera ten obraz, albo w postaci zbioru kostek względem ustalonej kraty pokrywających łącznie ten obraz. (W szczególności odwzorowanie może być znane tylko z pewną dokładnością.) Układ ten może zależeć od kilku parametrów.
3. Ograniczone przedziały na dopuszczalne wartości parametrów układu.
4. Kilka dodatkowych parametrów technicznych, takich jak żądana rozdzielczość przybliżania zbiorów w  $B$  oraz liczba podprzedziałów, na które będą podzielone zakresy parametrów.

Algorytm działa w pełni automatycznie, bez potrzeby dodatkowej interwencji użytkownika, i przekazuje w wyniku następujące dane:

1. Podział zbioru parametrów na rozłączne klasy kostek (nazywane *klasami fenotypów*) w docelowej rozdzielczości, w których obliczone otoczenia rozkładów Morse’a są powiązane przez kontynuację.
2. Indeksy Conleya wszystkich zbiorów Morse’a występujących we wszystkich rozkładach Morse’a, dla których obliczenie indeksu było możliwe, oraz lista tych zbiorów, dla których to obliczenie się nie powiodło, z reguły z powodu braku izolacji w  $B$ .
3. Wskazanie potencjalnie możliwych orbit łączących pomiędzy zbiorami Morse’a. Chciałbym zauważyć, że nie ma tu dowodu istnienia tych orbit, lecz jeśli jakieś połączenie nie jest wymienione, to znaczy, że zostało udowodnione, że taka orbita łącząca zawarta w  $B$  nie istnieje.

<sup>2</sup>Zwięzły opis tej metody, z naciskiem położonym na precyzyjny opis danych wejściowych oraz na interpretację wyników obliczeń, został opublikowany w [P14].

<sup>3</sup>Chodzi o podział przestrzeni  $n$ -wymiarowej na kostki tak jak papier w kratkę dzieli płaszczyznę na kwadraty.

<sup>4</sup>Odwzorowanie wielowartościowe oznacza rodzaj odwzorowania, które punktom z dziedziny przyporządkowuje podzbiory przeciwdziedziny.



Ten zestaw danych wyjściowych jest nazywany *bazą danych dynamiki globalnej* układu dynamicznego  $\varphi$  w  $B$  obliczoną przy danych warunkach. Ta baza danych może być dalej przetwarzana przez inne oprogramowanie w celu znalezienia interesujących właściwości dynamiki (jak to jest przykładowo omówione w rozdziale 4 poniżej) albo może być przeglądana w interaktywny sposób za pomocą przeglądarki internetowej (jak pokazane w [S4]).

Proces obliczeniowy jest opisany w rozdziałach 3 i 4 pracy [H3] i składa się z następujących etapów:

1. obliczenie reprezentacji kombinatorycznej  $\mathcal{F}$ , które wymaga użycia ścisłych metod numerycznych,
2. konstrukcja kombinatorycznego rozkładu Morse’a, która sprowadza się do obliczenia krawędziowo silnie spójnych składowych grafu reprezentującego  $\mathcal{F}$  (problem z matematyki dyskretnej),
3. obliczenie indeksów Conleya znalezionych zbiorów Morse’a (algorytmy z topologii algebraicznej),
4. porównanie otrzymanych grafów Conleya-Morse’a (reprezentujących rozkłady Morse’a) i utworzenie *grafu sprzęgającego* (ang. *clutching graph*), który identyfikuje pary zbiorów Morse’a o niepustym przecięciu obliczonych dla sąsiednich kostek parametrów.

Chciałbym tu zauważyć, że algorytm konstrukcji kombinatorycznego rozkładu Morse’a różni się od standardowego algorytmu znajdującego silnie spójne składowe grafu, ponieważ wymaga się tutaj dodatkowo, że każda składowa odpowiada dynamice powracającej (ang. *recurrent dynamics*), w związku z czym w każdej składowej jest wymagana co najmniej jedna krawędź (stąd też nazwa: *krawędziowo silnie spójna składowa*); jest to powód, dla którego ten etap obliczeń wymagał wymyślenia nowego algorytmu.

W obliczeniach są również stosowane liczne dodatkowe metody, które znacznie poprawiają efektywność tego podejścia oraz przyczyniają się do poprawy jakości wyników, niektóre opisane w [H3], a niektóre zawarte jedynie w oprogramowaniu [S3]. Przykładowo, ograniczenie zbioru niezmienniczego odwzorowania jest znajdowane metodą iteracyjnego zwiększania rozdzielczości. Mianowicie, kombinatoryczna reprezentacja odwzorowania jest początkowo konstruowana przy niewielkiej rozdzielczości, następnie jest obliczane zewnętrzne oszacowanie części niezmienniczej  $B$  i dalsze konstrukcje są zawężane do tej części. Ta procedura jest powtarzana kilkakrotnie aż do uzyskania docelowej rozdzielczości. Ponadto w programie dokonuje się sprawdzenia, czy przypadkiem część niezmiennicza małych kombinatorycznych zbiorów Morse’a o trywialnych indeksach Conley’a nie jest pusta. Jeżeli uda się sprawdzić przez obliczenie ich części niezmienniczej na kilku kolejnych rozdzielczościach, że ta część niezmiennicza jest faktycznie pusta, to takie zbiory Morse’a są usuwane jako nieprawdziwe (“przekłamanie numeryczne”) w celu uproszczenia danych wyjściowych przez usunięcie składników, które i tak nie przynoszą istotnych informacji z punktu widzenia dynamiki.

### 3.2. Uogólnienie na potoki

Uogólnienie tej metody wprowadzone w [H7] i zaimplementowane w oprogramowaniu opublikowanym w [S8] pozwala przeprowadzać analogiczne obliczenia dla potoków (układów dynamicznych z czasem ciągłym). Jest to osiąganе za pomocą ustalenia czasu  $\tau > 0$  i

analizie stroboskopowego obrazu potoku przy przesunięciu o czas  $\tau$ . Reprezentacja kombinatoryczna musi być wtedy obliczana przy pomocy znacznie bardziej zaawansowanych metod, zwłaszcza że łatwo jest o poważne przeszacowania; w moim oprogramowaniu korzystam z biblioteki programowej udostępnionej przez grupę CAPD [2]. Udowodniłem, że wyniki otrzymane dla przesunięcia o czas  $\tau$  (takie jak rozkład Morse’a i indeksy Conleya) przenoszą się na potok. W szczególności następujący wynik został udowodniony w [H7]:

**Twierdzenie 1 (twierdzenie 5.1 w [H7], str. 1007)** *Niech  $\varphi$  będzie potokiem na  $\mathbb{R}^n$ . Niech  $\tau > 0$ . Niech  $B \subset \mathbb{R}^n$  będzie otoczeniem izolującym względem  $\varphi_\tau$ . Załóżmy, że  $N_1, \dots, N_k \subset B$  są pewnymi otoczeniami izolującymi względem  $\varphi_\tau$  o parami rozłącznych wnętrzach. Załóżmy, że  $\mathbb{M} := \{M_i := \text{Inv } N_i \mid i = 1, \dots, k\}$  jest rozkładem Morse’a zbioru  $\text{Inv}(B, \varphi_\tau)$  względem  $\varphi_\tau$ . Wtedy  $N_1, \dots, N_k$  są otoczeniami izolującymi dla  $\varphi$ , a  $\mathbb{M}$  jest rozkładem Morse’a zbioru  $\text{Inv}(B, \varphi)$  względem  $\varphi$ . Jeżeli ponadto istnieje orbita łącząca zawarta w  $B$  względem  $\varphi$  pomiędzy pewnymi zbiorami Morse’a, to wówczas istnieje również orbita łącząca w  $B$  względem  $\varphi_\tau$  pomiędzy tymi samymi zbiorami Morse’a.*

### 3.3. Oprogramowanie

Implementacja metody obliczeniowej omawianej w niniejszym rozdziale została zaprogramowana w C++ z zastosowaniem techniki programowania generycznego (przy wykorzystaniu szablonów w C++). Zapewniło to elastyczność oprogramowania (możliwość zastąpienia jednych typów danych innymi w razie potrzeby) bez negatywnego wpływu na szybkość (co mogłoby się zdarzyć w przypadku stosowania techniki programowania obiektowo orientowanego). Programy uruchamia się z poziomu terminala (a najlepiej ze skryptów) i mają one wiele parametrów, które pozwalają dopasować obliczenia do potrzeb (zachowywanie danych do plików, pomijanie niektórych bardziej czasochłonnych etapów obliczeń itp.). Oprogramowanie działa w modelu klient-serwer. Serwer (zwany tu *koordynatorem*) rozdziela całość obliczeń na mniejsze porcje, wysyła te porcje klientom (zwanych tu *pracownikami*), odbiera od nich wyniki obliczeń i zachowuje je do plików (te wyniki właśnie stanowią *bazę danych*). Pracownicy łączą się z koordynatorem, otrzymują zadania, wykonują obliczenia, zachowują niektóre dane do plików, a następnie wysyłają wyniki do koordynatora. Koordynator zezwala na przyłączanie się pracowników w dowolnym momencie i wykrywa sytuację, kiedy pracownik odłączył się nieoczekiwanie (wtedy wysłane do niego, lecz nie wykonane zadania są wysyłane do innych pracowników). Ten model obliczeń równoległych został wprowadzony w [H4] i okazał się wystarczająco elastyczny i niezawodny do przeprowadzenia znacznych ilości obliczeń na klastrach komputerowych typu „Beowulf” dla konkretnych modeli; wyniki tych zastosowań są omówione w rozdziale 4 poniżej.

Oprogramowanie używa wielu algorytmów i struktur danych udostępnionych w ramach biblioteki programowej CHomP [S1], która jest omówiona w rozdziale 5 poniżej, a także struktur danych i algorytmów opracowanych specjalnie na potrzeby tego projektu. W rzeczywistości niektóre typy danych znajdujące się w bibliotece CHomP zostały opracowane specjalnie dla omawianego tu oprogramowania, a następnie dodane tam ze względu na inne możliwości zastosowania. Na przykład reprezentacja grafów skierowanych została przygotowana tak, aby zminimalizować zużycie pamięci i jednocześnie pozwolić na szybki dostęp do listy krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka. Struktury danych służące reprezentacji skończonych zbiorów kostek, jak również reprezentacji kombinatorycznych, pozwalają na dostęp do elementów zarówno za pomocą



indeksu (jak w tablicy lub `std::vector`), jak i za pomocą haszowania (w celu znajdowania elementów w stałym średnim czasie, w praktyce znacznie szybciej niż przy użyciu metody bisekcji i utrzymywaniu list posortowanych). Procedury obliczania homologii omawiane w rozdziale Section 5 są stosowane do obliczania indeksów Conleya.

Przykładowa prezentacja danych umieszczona na [S4] została zaprogramowana w PHP przy wykorzystaniu kilku dodatkowych programów zewnętrznych, takich jak np. `dot` z pakietu `GraphViz`. Pliki z kodem źródłowym tej prezentacji są również udostępnione na [S4] i mogą być dostosowane do przeglądania innej bazy danych otrzymanej przy użyciu oprogramowania [S3]. Oprogramowanie to składa się z następujących składowych:

1. Diagram, który można klikać myszką, zaprogramowany w JavaScriptcie. Gdy kursor myszki znajduje się nad ilustracją z diagramem, wyświetlane są współrzędne obok kursora myszki. Kliknięcie w obraz przenosi użytkownika do opisu odpowiedniej klasy fenotypu.
2. Informacja o każdej klasie fenotypu: współrzędne kostki parametrów, obliczony graf Conleya-Morse’a oraz portret fazowy zbiorów Morse’a. Współrzędne kostki parametrów są wyświetlone w edytowalnych polach formularza, które mogą być zmienione, a następnie naciśnięcie przycisku “show” powoduje wyświetlenie informacji o żądanej klasie fenotypu.
3. Animacja składająca się z ciągu obrazów PNG (kod w JavaScriptcie generowany przez PHP) do wyświetlania dwuwymiarowych przekrojów diagramów trójwymiarowych. Najeżdżenie myszką na obraz zatrzymuje animację, a kliknięcie powoduje przeniesienie na stronę z listą wszystkich aktywnych diagramów ilustrujących przekroje, przewiniętą do przekroju klikniętego w animacji.
4. Przeglądarka klas fenotypów wraz z obracającymi się 3-wymiarowymi zbiorami parametrów.

### 3.4. Wpływ tego osiągnięcia

Całościowa metoda analizy globalnej dynamiki oraz efektywna implementacja tej metody przyczyniła się do znacznego postępu w stosowaniu topologii obliczeniowej i metod dyskretnych do analizy jakościowej układów dynamicznych. Praca [H3] ma już 37 cytowań. Sam wygłosiłem 9 referatów proszonych (*invited talks*) na konferencjach w różnych krajach (Tajwan, Japonia, U.S.A., Polska, Hiszpania, Holandia) oraz 18 wykładów na seminariach (w Hiszpanii, w Polsce, w Japonii, w Portugalii, w Wielkiej Brytanii, w Stanach Zjednoczonych Ameryki, w Norwegii, na Węgrzech, w Austrii i w Niemczech).

Metoda ta wraz z oprogramowaniem była w stosowana przez moich współautorów w ich badaniach i była podstawą ich grantów i wystąpień. Oto kilka wybranych przykładów:

1. Zin Arai:
  - (a) JSPS Kakenhi Grant No. JP23684002 (2011–2014, **14,400,000 JPY**), „Toward a new approach to transient dynamics”; tematyka: dynamical systems, transient dynamics, computational topology, graph theory.
  - (b) Wykłady zapraszane, w tym wygłoszone na następujących konferencjach: Emerging Topics in Nonlinear Science, Goldrain, Italy (Sep 2010), 2013 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Santa Fe Community Convention Center (Sep 2013), a także 16-th RIES-Hokudai International Symposium, Sapporo, Japan (Nov 2015).

2. Konstantin Mischaikow:

- (a) Air Force grant (2009–2014, **\$1,546,344**), tytuł: „Database for the Global Dynamics of Multiparameter Nonlinear Systems.”
- (b) NSF DMS grant (2009–2011, **\$370,226**), tytuł: „Computing Dynamics in Multiparameter Systems.”
- (c) AMS Invited Address, „Computational Topology Applied to the Global Dynamics of Nonlinear Systems,” AMS Sectional Meeting, Newark, NJ, May 2010.
- (d) Ponad 50 wykładów zatytułowanych „Building a Database for the Global Dynamics of Multi-Parameter Systems” lub podobnie, zaproszonych na konferencje w wielu miejscach na świecie oraz wygłoszonych na seminariach w wielu instytucjach.

3. Hiroshi Kokubu:

- (a) Projekty badawcze “Dynamical time-series analysis of meteorological data” oraz “Morse decomposition of regulatory networks” finansowane z grantów JSPS Kakenhi 25287029 (2013–2016, **14,000,000 JPY**) oraz 26310208 (2014–2018, **12,000,000 JPY**), a także JST CREST.
- (b) Wykłady zapraszane wygłoszone m.in. na AMS Sectional Meeting, New Brunswick, NJ, U.S.A. (Nov 2015), Workshop on Stochastic Dynamics, Beijing, China (Aug 2015), Mathematical Analysis on Nonlinear PDEs, Meiji University, Tokyo, Japan (Jan 2017), EquaDiff 2015, Lyon, France (July 2015).

4. Hiroe Oka:

- (a) Referaty wygłaszane na konferencjach międzynarodowych i krajowych.
- (b) Prace magisterskie bazujące na metodzie algorytmicznej i korzystające z oprogramowania.

5. Tomoyuki Miyaji:

- (a) Zastosowania metody algorytmicznej i oprogramowania do szeregów czasowych sygnałów biomedycznych, omówiona w referacie wygłoszonym 31.10.2017 na Kyoto University Applied Mathematics Seminar (KUAMS).

## 4. Zastosowania do konkretnych układów dynamicznych

Artykuły zawierające osiągnięcia opisane w tym rozdziale: [H3], [H6], [H7].

Oprogramowanie i prezentacje danych: [S4], [S7], [S8].

Metoda obliczeniowa automatycznej klasyfikacji dynamiki globalnej w układach dynamicznych z parametrami, omówiona w rozdziale 3 powyżej, ma bardzo mało restrykcyjne założenia, jeśli chodzi o układy dynamiczne, do których może być stosowana, dzięki czemu jej potencjał zastosowań do różnorodnych układów jest znaczący. W tym rozdziale są omówione trzy konkretne zastosowania.

### 4.1. Model populacyjny Lesliego

W [H3] jest rozważane zastosowanie automatycznej metody klasyfikacji dynamiki globalnej przy pomocy oprogramowania [S3] do 2-wymiarowego (rozdział 5) i 3-wymiarowego (rozdział 6) modelu populacyjnego Lesliego. Modele te były już wcześniej analizowane

numerycznie w [14], gdzie znaczna ilość symulacji numerycznych pozwoliła znaleźć skomplikowaną dynamikę, w tym bifurkację podwojenia okresu i dynamikę chaotyczną. W porównaniu z dotychczasowymi wynikami, niektóre z zalet metody wprowadzonej w [H3] są następujące:

1. Wszystkie wyniki są matematycznie udowodnione, w przeciwieństwie do przybliżonych wyników uzyskiwanych w wyniku symulacji numerycznych.
2. Zostały znalezione otoczenia wszystkich zbiorów rekurencyjnych, również niestabilnych, razem z potencjalnie możliwymi orbitami łączącymi. Nowa metoda ponadto gwarantuje, że żaden zbiór rekurencyjny nie został pominięty (co może się zdarzać w przypadku symulacji numerycznych, np. jeżeli atraktor ma mały obszar przyciągania).
3. Wszystkie zaobserwowane typy dynamiki globalnej zostały podzielone na klasy ze względu na kontynuację otoczeń izolujących zbiorów Morse’a.
4. Analiza była wykonana przy dwóch albo trzech parametrach zmieniających się niezależnie od siebie, bez potrzeby czynienia dodatkowych założeń w celu uzyskania jednoparametrycznej rodziny układów dynamicznych w celu analizy bifurkacji.
5. Niezależnie od wizualizacji (która może być niemożliwa w wyższych wymiarach), w wyniku zastosowania nowej metody powstaje baza danych, która może być przeszukiwana w poszukiwaniu różnych własności, np. istnienia więcej niż jednego atraktora, występowania zmian okresowych albo zagrożenia populacji wyginieciem.

Interaktywna demonstracja bazy danych, która może być oglądana przy użyciu przeglądarki internetowej (dla każdego zbioru parametrów można wyświetlić obliczony rozkład Morse’a), jest opublikowana pod adresem [S4].

## 4.2. Model populacji o czasie dyskretnym ze zbieraniem plonów

W pracy [H6] została przeprowadzona analiza pewnego 2-wymiarowego układu dynamicznego z czasem dyskretnym. Układ ten modeluje populację podzieloną na osobniki młode i dorosłe, z których pewien procent jest uśmiercany w każdej iteracji, co jest eufemistycznie określane jako „zbieranie plonów” (ang. *harvesting*) i może dotyczyć albo jednej z tych grup, albo obydwu. Niektóre z populacji, jakie mogą być modelowane przez ten układ dynamiczny, to ryby, które są poławiane (i zależy nam na utrzymaniu tej populacji stabilnej i na wysokim poziomie), albo szkodniki, na które wpływamy pestycydami (i tu raczej wolelibyśmy, by tych osobników było ich jak najmniej).

Klasyczna analiza stanów równowagi i badania ich stabilności pozwala zauważyć występowanie zjawisk interesujących z biologicznego punktu widzenia: w pewnych rzadkich sytuacjach zwiększenie współczynnika uśmiercania może w rezultacie spowodować powiększenie się populacji (tzw. efekt Hydry). W innych konkretnych sytuacjach natomiast zwiększenie tego współczynnika może zdestabilizować populację, a dalsze jego zwiększenie może ją ustabilizować z powrotem (tzw. efekt bąbla). Te efekty i ich nazewnictwo są szczegółowo wyjaśnione w [H6].

Automatyczna analiza numeryczna dynamiki globalnej przy wykorzystaniu metody opisanej w rozdziale 3 powyżej pozwoliła uzyskać dodatkowy wgląd w dynamikę. W szczególności zostały znalezione atraktory okresowe i zostały zaobserwowane bifurkacje podwojenia okresu, a także efekt rezonansu. Z powodu innej natury otrzymanych wyników konieczne było sformułowanie alternatywnych definicji efektu Hydry i efektu bąbla (zob. załączniki B.3 i B.4 w [H6]). Zostały znalezione konkretne zakresy parametrów, przy

których te zjawiska mają miejsce, co pozwoliło potwierdzić wyniki analityczne z wykorzystaniem tych nowych definicji i dodatkowo ocenić te efekty od strony ilościowej (zob. odpowiednio rozdziały 3.4 i 3.5 w [H6]). Wyniki obliczeń zostały zilustrowane w [S7].

### 4.3. Czterowymiarowe równanie różniczkowe zwyczajne w epidemiologii

W pracy [H7] był badany układ czterech równań różniczkowych zwyczajnych, który modeluje rozprzestrzenianie się choroby zakaźnej w populacji podzielonej na dwa regiony połączone transportem. Dynamika globalna była badana metodami analitycznymi, za pomocą symulacji numerycznych, a także przy użyciu ścisłej metody numerycznej opisanej w rozdziale 3 powyżej. Wyjątkowo bogate zachowania dynamiczne zostały zaobserwowane w tym układzie dynamicznym, normalnie nie występujące w prostych modelach epidemiologicznych. W szczególności w układzie tym zaobserwowano jednoczesne występowanie kilku stabilnych punktów stacjonarnych.

Metoda obliczeniowa opisana w rozdziale 3 powyżej została zastosowana do układu równań różniczkowych zależnego od dwóch parametrów i uzyskane dane uzupełniły wyniki uzyskane metodami analitycznymi, a także potwierdziły wyniki symulacji numerycznych. Zostały znalezione zarówno stabilne, jak i niestabilne zbiory rekurencyjne, ich indeksy Conleya zostały obliczone w przypadkach, w których było to możliwe, a także zostały zidentyfikowane potencjalne możliwości istnienia orbit łączących. Brak zbiorów rekurencyjnych poza otoczeniami izolującymi punktów stacjonarnych dowodzi, że istotnie nie występują w tym układzie dynamicznym inne rekurencyjne zbiory niezmiennicze (takie jak np. orbity okresowe) poza tym otoczeniami. W artykule tym dodatkowo przekonuje, że wyniki tych obliczeń numerycznych mogą być bardziej wartościowe z punktu widzenia zastosowań; na przykład duże otoczenia izolujące stabilnych punktów stacjonarnych wskazują na ich słabą stabilność, więc po uwzględnieniu szumu i niedokładności modelu może się okazać, że rzeczywiste trajektorie mogą przemierzać całe to otoczenie. Wyniki obliczeń są opublikowane w [S8].

### 4.4. Inne zastosowania

Możliwość stosowania metody obliczeniowej omawianej rozdziale 3 powyżej do modeli układów dynamicznych występujących w literaturze wskazuje na znaczny potencjał tej metody. Oprócz zastosowań omówionych powyżej, kilka innych jest wymienionych w następujących pracach: [P14] (model populacji wielorybów fiszbinowych), [P15] (model populacyjny Lesliego z trzema klasami wiekowymi oraz 3-wymiarowa sieć sprzężonych ze sobą odwzorowań), a także [P16] (model zmian stanów skupienia plazmy: zastosowanie w fizyce teoretycznej). Obecnie trwają prace nad zastosowaniami do innych modeli, zwłaszcza do badania szeregów czasowych.

## 5. Obliczanie indeksu Conleya

Artykuły zawierające osiągnięcia opisane w tym rozdziale: [H1], [H2].

Oprogramowanie i prezentacje danych: [S1], [S2].

Skończone zbiory  $n$ -wymiarowych kostek względem ustalonej siatki prostokątnej, nazywane dalej *zbiorami kostkowymi*, mogą być stosowane do reprezentowania ograniczonych podzbiorów  $\mathbb{R}^n$  w algorytmach numerycznych, tak jak krata kwadratowych pikseli

jest używana w fotografii cyfrowej do reprezentowania obrazów albo siatka równo od-  
dalonych punktów w przestrzeni jest używana do numerycznego przybliżania rozwiązań  
równań różniczkowych cząstkowych. Kostki razem ze swoimi ścianami, krawędziami i  
wierzchołkami tworzą w naturalny sposób strukturę *kompleksu kostkowego*, która może  
być wykorzystana bezpośrednio do obliczania grup homologii bez potrzeby dzielenia  
kostek na sympleksy w celu uzyskania kompleksu symplecjajalnego — struktury typowo  
używanej w teorii homologii. Zbiory kostkowe mogą być stosowane do konstrukcji oto-  
czeń izolujących, do rozkładu przestrzeni na przybliżenie rozkładu Morse’a, a także do  
konstrukcji par indeksowych, co było już wykonywane przez Szymczaka w latach 90.  
XX wieku; zob. np. [16] oraz [17]. Książka [6] zawiera całościowe wprowadzenie do teorii  
homologii kostkowych i związanych z nią algorytmów, również w kontekście obliczania  
indeksu Conleya.

W moim doktoracie stosowałem połączenie algorytmów wprowadzonych w [1] i w [7]  
do obliczania homomorfizmu indukowanego w homologiach przez odwzorowanie ciągle  
na podstawie zewnętrznego przybliżenia tego odwzorowania w postaci kombinatorycz-  
nego kostkowego odwzorowania wielowartościowego (a konkretnie kombinatorycznej  
reprezentacji odwzorowania, jak to było wyjaśnione w rozdziale Section 3 powyżej).  
Pierwszy z tych algorytmów pozwala skonstruować selektor łańcuchowy odwzorowania  
kombinatorycznego. Używałem implementacji zaprogramowanej przez Mazura i Szyb-  
owskiego [8]. Ich program jest obecnie zawarty w pakiecie oprogramowania CHoMP [S1]  
pod nazwą `chmap`, razem z dwoma dodatkowymi programami, które napisałem: `chk-  
perf` do sprawdzania, czy odwzorowanie kombinatoryczne spełnia wymagane założenia,  
oraz `cnvchmap` do przekształcania danych wyjściowych do formatu akceptowanego przez  
moją implementację (w programie `homchain`) drugiego algorytmu, który z kolei oblicza  
grupy homologii kompleksów łańcuchowych oraz homomorfizm indukowany w homolo-  
giach przez odwzorowanie łańcuchowe. Niestety, to rozwiązanie okazało się bardzo nie-  
efektywne, a w dodatku nie pozwalało na obliczanie relatywnych grup homologii, przez  
co mogłem pracować wyłącznie z parami indeksowymi o pustym zbiorze wyjścia. Z tego  
powodu moje wyniki w pracy doktorskiej były ograniczone do atraktorów; zob. [10],  
[12] i [13]. Chęć pokonania tych ograniczeń była główną motywacją rozwoju bardziej  
efektywnego i elastycznego rozwiązania, które jest opisane w podrozdziale 5.1 poniżej.

### 5.1. Metoda opierająca się na wykresie odwzorowania ciągłego w celu obliczania homomorfizmu indukowanego w homologiach przez od- wzorowanie ciągłe

W pracy [H1] zostało przedstawione nowe podejście do obliczania homomorfizmu in-  
dukowanego w homologiach kostkowych przez odwzorowanie ciągle reprezentowane za  
pomocą kombinatorycznego kostkowego odwzorowania wielowartościowego. W podejściu  
tym są stosowane pomysły z [5] i jest ono inne niż metoda zaproponowana w [6].

Podstawowa idea tego podejścia jest następująca. Wiadomo, że jeżeli odwzorowanie  
 $f: X \rightarrow Y$  jest ciągle, to rzutowanie z jego wykresu na dziedzinę  $p_f: \Gamma_f \rightarrow X$  jest home-  
omorfizmem, wobec czego  $f = q_f \circ p_f^{-1}$ , gdzie  $q_f: \Gamma_f \rightarrow Y$  jest rzutowaniem z wykresu  $f$   
na przeciwdziedzinę. Można więc problem obliczania homomorfizmu indukowanego w ho-  
mologiach przez  $f$  zredukować do problemu obliczania homomorfizmów indukowanych  
w homologiach przez rzutowania:  $H_*(f) = H_*(q_f) \circ H_*(p_f)^{-1}$ . Chcielibyśmy zastosować  
tę samą konstrukcję do zewnętrznego przybliżenia  $F$  odwzorowania  $f$ , tzn. do górnio  
półciągłego odwzorowania wielowartościowego  $F: X \rightrightarrows Y$  (innymi słowy,  $F: X \rightarrow 2^Y$ ),

którego  $f$  jest selektorem, co oznacza, że  $f(x) \in F(x)$  dla każdego  $x \in X$ . Niestety, rzutowanie  $p_F$  z reguły nie jest homeomorfizmem. Ale jeżeli założymy, że  $F$  jest acykliczne, tzn., grupy homologii  $F(x)$  są izomorficzne z grupami homologii przestrzeni jednopunktowej, to wtedy  $p_F$  okazuje się być odwzorowaniem Vietorisa i  $H_*(p_F)$  jest izomorfizmem, co wynika z twierdzenia Vietorisa–Begle’a. Wtedy  $H_*(F) := H_*(q_F) \circ H_*(p_F)^{-1}$  jest tożsame z  $H_*(f)$ , co jest głównym wynikiem teoretycznym pracy [H1]. Konkretnie, mając kombinatoryczną reprezentację  $\mathcal{F}$  odwzorowania  $f$ , definiuje się jego *realizację geometryczną*  $F(x) := \bigcup_{Q \ni x} |\mathcal{F}(Q)|$ , a następnie  $H_*(\mathcal{F})$  jest zdefiniowane jako  $H_*(F)$ . W publikacji [H1] cała teoria i algorytmy są sformułowane w kontekście homologii relatywnych, co wymaga dodatkowego nakładu pracy (np. uogólnienia twierdzenia Vietorisa–Begle’a na pary), ale jest to niezbędne dla par indeksowych. Konieczność pracy z parami odwzorowań  $F: X \rightrightarrows Y$  i  $G: A \rightrightarrows B$ , gdzie  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , zamiast brania zawężenia  $G := F|_A$ , jest wyjaśniona w paragrafie następującym po twierdzeniu 3.1 w [H1], str. 221.

Algorytmiczne obliczanie homomorfizmu indukowanego w homologiach przez kombinatoryczną reprezentację odwzorowania ciągłego przebiega w kilku etapach opisanych szczegółowo w algorytmie 5.1 w [H1], str. 220. Konstrukcja odwzorowań łańcuchowych rzutowań jest poprzedzona intensywną redukcją geometryczną zbiorów i odwzorowania przy wykorzystaniu kilku nowych technik wprowadzonych w rozdziale 4 pracy [H1]. Redukcje te znacząco przyczyniają się do wydajności tego podejścia, lecz powodują, że obliczanie endomorfizmu w homologiach staje się trochę bardziej skomplikowane, ponieważ dziedzina i przeciwdziedzina odwzorowania są redukowane niezależnie. Pomocne tutaj okazuje się dodanie inkluzji  $(X, A) \hookrightarrow (Y, B)$ , która jest początkowo identycznością, a później służy do powiązania ze sobą generatorów homologii, które się zmieniają podczas redukcji. Główny rezultat pracy [H1] jest podsumowany w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie 2 (zob. twierdzenie 1.1 w [H1], str. 203)** *Niech  $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$  oraz  $B \subset Y \subset \mathbb{R}^m$  będą zbiorami kostkowymi reprezentowanymi odpowiednio przez zbiory kostek  $\mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{Y}$ . Niech kombinatoryczne odwzorowanie wielowartościowe  $\mathcal{F}: \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$  będzie reprezentacją kombinatoryczną odwzorowania ciągłego  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ . Załóżmy, że  $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{B}$  oraz obydwa odwzorowania  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{F}|_A$  są acykliczne. Wtedy homomorfizm obliczony przez algorytm 5.1 w [H1] uruchomiony z  $\mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  oraz “incl” ustawionym na false zgadza się z  $f_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$  w tym sensie, że jego dziedzina  $D$  jest izomorficzna z  $H_*(X, A)$ , przeciwdziedzina  $C$  jest izomorficzna z  $H_*(Y, B)$ , a także następujący diagram, w którym  $\varphi$  oznacza ten homomorfizm, jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & C \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H_*(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y, B) \end{array}$$

Ponadto, jeżeli  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  i włożenie  $i: (X, A) \hookrightarrow (Y, B)$  indukuje izomorfizm w homologiach, to homomorfizm obliczony przez algorytm 5.1 w [H1] uruchomiony z  $\mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$  i “incl” ustawionym na true zgadza się z endomorfizmem  $(i_*)^{-1} \circ f_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(X, A)$ .

Jednym z pierwszych nietrywialnych zastosowań tego podejścia było obliczenie indeksu Conleya w skończeniowym przybliżeniu odwzorowania Kota–Shaffera w [4]. Zbiory  $X \setminus A$  oraz  $A$  składały się odpowiednio z 3.647 i 6.683 kostek wymiaru 6.



## 5.2. Kostkowa metoda algorytmicznego obliczania indeksu Conleya zachowująca własność wycinania

W pracy [H2] została wprowadzona algorytmiczna metoda obliczania indeksu Conleya przy wykorzystaniu kombinatorycznej reprezentacji  $\mathcal{F}$  odwzorowania ciągłego  $f$  razem ze specjalną poprawką konieczną w niektórych sytuacjach opisanych poniżej.

Definicja *kombinatorycznej pary indeksowej* naśladuje definicję pary indeksowej wprowadzonej przez Szymczaka (zob. [16] i [17]).

**Definicja 3 (zob. definicja 1.3 w [H2], str. 1152)** *Mówimy, że para  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$  skończonych zbiorów kostek z  $\mathcal{X}$ , dla których  $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_1$ , jest kombinatoryczną parą indeksową względem kombinatorycznego odwzorowania wielowartościowego  $\mathcal{F}: \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ , jeżeli następujące warunki są spełnione:*

1.  $\mathcal{F}(\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_2) \subset \mathcal{P}_1$ ,
2.  $\mathcal{F}(\mathcal{P}_2) \cap \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ .

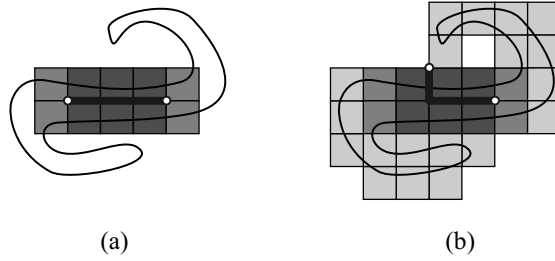
Zauważmy, że nie ma trzeciego warunku, który typowo występuje w definicji pary indeksowej:  $|\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_2|$  ma być otoczeniem izolującym. Ten warunek jest automatycznie spełniony przy dodatkowym założeniu, że  $f(Q) \subset \text{int } |\mathcal{F}(Q)|$ . Dodanie “int” jest istotnym ulepszeniem, a na dodatek nie jest kosztowne do spełnienia numerycznie, ponieważ obliczone ściśle oszacowanie zewnętrzne na  $f(Q)$  zwykle ma już pewne przeszacowania, z poza tym niezwykle rzadko może się zdarzyć, że jego brzeg wypada akurat na linii siatki. Dlatego też dowolna kombinatoryczna reprezentacja  $f$  automatycznie spełnia już ten warunek, poza zupełnie wyjątkowymi i nienaturalnymi przypadkami. Można łatwo wykazać, że jeżeli  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$  jest kombinatoryczną parą indeksową dla  $\mathcal{F}$ , to jej geometryczna realizacja  $(|\mathcal{P}_1|, |\mathcal{P}_2|)$  jest parą indeksową dla  $f$ .

Pary indeksowe mogą być konstruowane algorytmicznie na wiele sposobów. Na przykład Szymczak w [16] wprowadza algorytm ich znajdowania wewnątrz z góry zadanego obszaru, mój algorytm opublikowany w [P11] „buduje” parę indeksową zaczynając od przybliżenia przypuszczalnego izolowanego zbioru niezmienniczego, a metoda opisana w rozdziale 3 powyżej daje pary indeksowe bez potrzeby przeprowadzania dalszych konstrukcji jako  $(\mathcal{M} \cup \mathcal{F}(\mathcal{M}), \mathcal{F}(\mathcal{M}) \setminus \mathcal{M})$ , gdzie  $\mathcal{M}$  jest kombinatorycznym zbiorem Morse’a.

Jak to zostało wyjaśnione na początku pracy [H2], obliczanie odwzorowania indeksowego w homologiach dla kombinatorycznej pary indeksowej może się czasem nie udać, ponieważ własność wycinania  $(P_1 \cup f(P_2)) \setminus P_1 = (P_2 \cup f(P_2)) \setminus P_2$  może nie być spełniona dla geometrycznej realizacji kostkowej reprezentacji  $\mathcal{F}$  odwzorowania  $f$  z powodu przeszacowań nieuniknionych przy konstrukcji  $\mathcal{F}$ ; zob. rysunek 1. Taka sytuacja zdarza się dość rzadko, ale faktycznie została zaobserwowana w kilku przypadkach zastosowań omawianych w rozdziale 4 powyżej. Rozwiązanie problemu zainspirowane pracą [11] polega na „podniesieniu” zbioru  $P_1$  na wyższą warstwę, a następnie „przyklejeniu” warstwy początkowej na zbiorze  $P_2$ , jak to zostało wyjaśnione na rysunku 2.

Głównymi osiągnięciami pracy [H2] są:

1. Formalna definicja dwuwarstwowych  $\Omega$ -zbiorów oraz  $\Omega$ -odwzorowania według pomysłu przedstawionego na rysunku 2, a także dowód poprawności tych definicji (zob. rozdział 2 w [H2]).
2. Przeniesienie tych pojęć do kontekstu kombinatorycznego oraz dowód faktu, że ta konstrukcja rozwiązuje problem z własnością wycinania (zob. rozdział 3 w [H2]).



Rysunek 1: Przykładowa para indeksowa, dla której geometryczna realizacja reprezentacji kombinatorycznej odwzorowania nie spełnia własności wycinania. Z tego powodu inkluzja pary indeksowej w jej obraz przez odwzorowanie kombinatoryczne nie indukuje izomorfizmu w homologiach (grube linie z białymi końcami reprezentują generatory pierwszej grupy homologii). (a)  $\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_2$  składa się z ciemnych kwadratów,  $\mathcal{P}_2$  z szarych kwadratów, a brzeg zbioru  $f(|\mathcal{P}_1|)$  jest zaznaczony ciągłą linią. (b) Dodatkowo zbiór  $\mathcal{F}(\mathcal{P}_1) \setminus \mathcal{P}_1$  jest pokazany jako jasnoszare kwadraty.



Rysunek 2: Zbiór  $\Omega(P_1, S(P_2))$  dla  $P_1 = [2, 8] \subset \mathbb{R}$  i  $P_2 = [2, 4] \cup [6, 8]$  z  $f(P_2) \setminus P_2 = [0, 2] \cup [8, 10]$ : (a) Zbiory  $P_1 \times 1$  (na wyższej warstwie),  $P_2 \times 0$  (ciemnoszara część dolnej warstwy),  $(f(P_2) \setminus P_2) \times 0$  (jasnoszara część dolnej warstwy), oraz relacja sklejająca  $\sim$  (zaznaczona strzałkami); (b) Ilustracja poglądowa przestrzeni ilorazowej  $\Omega(P_1, S(P_2))$ .

3. Dowód faktu, że indeks Conleya obliczony przy wykorzystaniu tych nowych obiektów pokrywa się z indeksem Conleya wejściowej pary indeksowej (zob. rozdział 3 w [H2]).
4. Efektywna implementacja programistyczna tej konstrukcji.

Oprogramowanie zawierające implementację konstrukcji dwuwarstwowej wprowadzonej w tym artykule jest zawarte w pakiecie oprogramowania CHomP [S1] omawianym poniżej. Strona internetowa [S2] powiązana z artykułem zawiera przykłady omawiane w pracy oraz instrukcje wyjaśniające jak można przeprowadzić obliczenia. Ponadto znajduje się tam notatka opisująca jak struktura dwuwarstwowa może być reprezentowana przez zwykłe zbiory kostkowe kosztem zwiększenia wymiaru przestrzeni o 1, a także program wykonujący tę konstrukcję. Nie jest to rozwiązanie optymalne i dlatego nie zostało zawarte w opublikowanym artykule.

### 5.3. Oprogramowanie CHomP

Oprogramowanie [S1] było utworzone w ramach projektu pod nazwą *Computational Homology Project*, skąd się bierze skrót CHomP. Przygotowanie tego oprogramowania było moim pierwszym wyzwaniem, którego się podjąłem po otrzymaniu doktoratu w roku 2001. Korzystając z doświadczenia w tworzeniu oprogramowania uzyskanego w ramach przygotowywania pracy magisterskiej z informatyki oraz doktoratu, zaprojektowałem wszystkie struktury danych i algorytmy od podstaw. Główne składniki tego oprogramowania to:

1. Implementacja algorytmu obliczania homologii przez redukcję kompleksów łańcuchowych na podstawie pracy [7] z uogólnieniem potrzebnym do obliczania homologii o współczynnikach w dowolnym pierścieniu, a także z pewną optymalizacją.
2. Implementacje kilku algorytmów redukcji geometrycznej zbiorów kostkowych i kompleksów kostkowych, również w kontekście homologii relatywnych; algorytmy te zostały przedstawione w [H1].
3. Specjalizowane struktury danych, które są używane w efektywnych implementacjach różnych algorytmów, w tym algorytmów liczenia homologii. Te struktury danych zawierają m.in.: tablice z haszowaniem (`hashedset`), trzy różne implementacje kostek i komórek kostkowych (z tabularyzacją współrzędnych, o stałym wymiarze, a także o zmiennym wymiarze), grafy skierowane (wykorzystywane w [H3]), automatycznie zwalniane tablice (`autoarray`) oraz tablice, które się automatycznie przedłużają, i to bez kopiowania danych, w przeciwieństwie do `std::vector` (`multitable`).
4. Kompletny zestaw typów danych odpowiadających obiektom matematycznym biorącym udział w obliczaniu homologii: pierścień współczynników  $\mathbb{Z}$  i ciało  $\mathbb{Z}_p$ , łańcuchy, kompleksy łańcuchowe, kompleksy geometryczne, kostki, komórki kostkowe (w tym ściany, krawędzie itp.), sympleksy, a także podstawowe operacje na tych strukturach, jak np. generowanie brzegów.

Oprogramowanie jest napisane w C++ i intensywnie korzysta z szablonów w celu stosowania techniki programowania generycznego. Jest ono zaprojektowane głównie jako biblioteka programowa do wykorzystania z innych programów pisanych w C++ (jak np. [S3]). Jednak aby umożliwić korzystanie z głównych algorytmów zawartych w tym oprogramowaniu tym, którzy nie umieją lub nie chcą programować w C++, zostały również przygotowane programy wykonywalne, które odczytują dane wejściowe z plików tekstowych w formacie czytelnym dla człowieka i zapisują wyniki obliczeń również do takich plików tekstowych. Dane wejściowe mogą być np. generowane przez skrypty w matlabie, a dane wyjściowe mogą być dalej przetwarzane innymi skryptami (np. przygotowanymi w Perlu). Główne programy wchodzące w skład pakietu to:

1. `homchain` do liczenia homologii kompleksów łańcuchowych i odwzorowań łańcuchowych;
2. `homcubes` do liczenia homologii zbiorów kostkowych i odwzorowań kostkowych, w tym endomorfizmów, również w homologiach relatywnych;
3. `homcub2l` do obliczania odwzorowania indeksowego przy zastosowaniu konstrukcji dwuwarstwowej opisanej w podrozdziale 5.2.

Oprogramowanie jest tak zaprojektowane, aby kompilowało się kompilatorem GNU C++ na wielu różnych systemach, takich jak Linux, Windows oraz Mac OS X. Strona internetowa [S1] zawiera obszerne informacje na temat oprogramowania, takie jak wprowadzenie, opis formatów danych, instrukcje kompilacji, spis dostępnych programów wykonywalnych wraz z ich krótkimi opisami, przykłady składające się z próbek danych oraz skryptów uruchamiających programy, a także interaktywny program graficzny *CHomP Software Chooser* napisany w Pytonie, który pomaga przygotować właściwe polecenia do uruchomienia większości programów wchodzących w skład pakietu, a także wyświetla szczegółowe informacje na temat tych programów.

Wyczerpująca dokumentacja programistyczna całego oprogramowania jest automatycznie generowana programem Doxygen, który korzysta z komentarzy dodawanych w kodzie źródłowym w specjalnym formacie do utworzenia szczegółowych i dokładnych opisów wszystkich struktur danych i zaimplementowanych procedur.

## 6. Uogólnienia i dalsze kierunki badań

Artykuły zawierające osiągnięcia opisane w tym rozdziale: [H4], [H5], [H8].

Oprogramowanie i prezentacje danych: [S5], [S6].

W tym rozdziale opisane są trzy wyniki ściśle powiązane z osiągnięciami opisanymi we wcześniejszych rozdziałach i dlatego stanowiące wraz z nimi jednotematyczny ciąg publikacji.

Metoda kolejnych przybliżeń części niezmienniczej na coraz drobniejszych rozdzielczościach, zastosowana w [H3] i omówiona w rozdziale 3.1 powyżej, jest wersją uproszczoną ogólniejszej metody [H4] służącej otrzymywaniu ciągu ścisłych oszacowań podzbioru  $\mathbb{R}^n$  spełniającego konkretne warunki. Ta ogólna metoda jest opisana w rozdziale 6.1 poniżej.

Założenia, które muszą być spełnione przez kombinatoryczną reprezentację odwzorowania ciągłego, aby można było stosować metodę obliczania homomorfizmu indukowanego w homologiach wprowadzoną w [H1], okazały się dość restrykcyjne, zwłaszcza wymaganie acykliczności. Potrzeba bardziej efektywnej procedury przyczyniła się do rozwoju uogólnienia tej metody, która ma znacznie słabsze założenia. Metoda ta została przedstawiona w [H8] i jest opisana w rozdziale 6.2 poniżej. Oczekuje się, że uogólniona metoda pozwoli na nowe zastosowania algorytmicznego obliczania indeksu Conleya sposobem opisanym w rozdziale 5 powyżej, zwłaszcza jeśli chodzi o zastosowanie do badania szeregów czasowych, a także że poprawi efektywność metody klasyfikacji dynamiki globalnej wprowadzonej w [H3] i opisaną w rozdziale 3 powyżej.

Metoda reprezentowania dynamiki przy użyciu pokryw otwartych, w przeciwieństwie do partycji używanych w [H3], została wprowadzona w [H5] i jest omówiona w rozdziale 6.3 poniżej. Ma ona wiele cech wspólnych z [H3], np. reprezentowanie układu dynamicznego za pomocą grafu skierowanego i otrzymywanie wyników dynamicznych wprost z algorytmów grafowych, a jednak pozwala na uzyskanie nowego rodzaju wyników. W rzeczy samej, analiza dynamiki obserwowanej przy pewnej skończonej rozdzielczości, nawet bez próby zrozumienia układu dynamicznego w skali infinitezymalnej, może się okazać bardziej właściwa ze względu na zastosowania; dyskusja na ten temat i próba uzasadnienia tej tezy znajduje się w [H5].

### 6.1. Metoda równoległa badania właściwości ciągłych

W pracy [H4] został wprowadzony algorytm obliczania ścisłego przybliżenia podzbioru  $\mathbb{R}^n$ , którego punkty spełniają daną własność. Na wejściu musi być podana procedura algorytmiczna (program komputerowy), która dla danego punktu w  $\mathbb{R}^n$  odpowiada „tak”, jeżeli ten punkt spełnia tę własność, albo „nie”, jeżeli nie da się tego wykazać (np. dlatego, że punkt faktycznie nie spełnia tej własności, albo po prostu zbyt trudno jest udowodnić tę własność numerycznie dla danego punktu, biorąc pod uwagę ograniczenia programu), a także procedura algorytmiczna, która robi to samo w jednym obliczeniu dla całego zbioru punktów zdefiniowanego jako produkt kartezjański ograniczonych przedziałów domkniętych; tak ostatnia procedura powinna zwracać odpowiedź „tak”, jeżeli wszystkie punkty spełniają tę własność, albo „nie”, jeżeli nie da się tego sprawdzić.

Moje główne osiągnięcia opisane w tym artykule są następujące:

1. Opracowanie schematu centralnie sterowanych obliczeń równoległych i jego implementacja. Ten schemat wymaga od użytkownika zdefiniowania czterech procedur

- zależnych od konkretnego problemu, reszta programu zajmuje się dopilnowaniem, by obliczenia były wykonane.
2. Wymyślenie algorytmu obliczania (korzystając z tego schematu obliczeń równoległych) ścisłego oszacowania dolnego (wewnętrznego) na zbiór punktów spełniających daną własność, dokonując serii podpodziałów; jest to algorytm 4 w [H4] na str. 102. Algorytm ten sprawdza, czy dana własność jest spełniona na całych kostkach  $n$ -wymiarowych oraz na ich wierzchołkach (punktach  $\mathbb{R}^n$ ) i podejmuje decyzje, w jaki sposób wykonywać te sprawdzenia w celu osiągnięcia optymalnej wydajności. Ten algorytm łączy trzy inne algorytmy w schemat obliczeń równoległych.
  3. Przeprowadzenie dokładnej analizy złożoności obliczeniowej tej metody i udowodnienie, że przy pewnych naturalnych założeniach jest ona eksponencjalnie lepsza od podejścia „naiwnego” polegającego na sprawdzaniu wszystkich kostek w rozdzielczości docelowej.
  4. Zdefiniowanie pojęcia właściwości ciągłej (ang. *continuous property*) w rozdziale 6 pracy [H4].
  5. Udowodnienie zbieżności metody przy odpowiednich założeniach: twierdzenie 6 w [H4], str. 107.

Przykłady omawiane w pracy oraz kod źródłowy oprogramowania są dostępne do pobrania ze strony [S5] lub ze stron, do których linki są tam podane. W szczególności implementacja schematu obliczeń równoległych została zawarta w pakiecie oprogramowania CHomP [S1]. Składa się ona z procedur niskiego poziomu do komunikacji między procesami przez gniazda TCP, zaprogramowanych osobno dla Windows i osobno systemów podobnych do Unixa (w tym dla Linuxa). Jest tam także metoda serializacji danych niezależna od systemu, która umożliwia np. wymianę danych między 32-bitowym programem w Windows a 64-bitowym programem w Unixie działającym na innym typie procesora różniącego się kolejnością bajtów, (ang. *big endian* oraz *little endian*). Jest tam również schemat opracowany techniką obiektowo orientowaną do korzystania z tej komunikacji. Stanowi on ważny składnik oprogramowania [S3] (zob. rozdział 3 powyżej). Cała metoda zrównoleglania obliczeń do badania właściwości ciągłej jest zaprogramowana w taki sposób, że użytkownik musi jedynie zaprogramować funkcję sprawdzającą tę własność dla iloczynów kartezjańskich przedziałów (jak to zostało opisane na początku niniejszego podrozdziału), być może o długości zerowej (tzn. dla pojedynczych punktów). Nie ma potrzeby, by użytkownik musiał się zaznajamiać z głębszymi aspektami technicznymi tego oprogramowania.

## 6.2. Indukowanie homomorfizmu w homologiach przez korespondencję

W pracy [H8] jest przedstawione nowe podejście do obliczania homomorfizmu indukowanego w homologiach przez odwzorowania. Ta metoda jest znacznie mniej restrykcyjna od metody zdefiniowanej w [H1]. Zamiast rozważać górną półciągłą odwzorowania wielowartościowe, podejście to może być stosowane do dowolnej relacji domkniętej, która w tym kontekście została nazwana *korespondencją domkniętą* (ang. *closed correspondence*) z  $X$  do  $Y$ , gdzie  $X$  i  $Y$  są zwartymi podzbiórmi  $\mathbb{R}^n$ , a założenie domkniętości oznacza, że  $R$  jest domkniętym podzbiorem iloczynu kartezjańskiego  $X \times Y$ . Użyte w języku angielskim słowo „correspondence” oznacza relację, w której dziedzina i przeciwdziedzina mają znaczenie szczególne, jak dla odwzorowań, dlatego używam słowa

„korespondencja” po polsku, mimo że jest ono znacznie rzadziej używane w tym znaczeniu. Założenie acykliczności nie jest wymagane w nowym podejściu, co jest szczególnie istotnym usprawnieniem z punktu widzenia obliczeń, a także otwiera nowe możliwości, np. do analizy szeregów czasowych. Podobnie jak [H1], cały artykuł [H8] został napisany w kontekście par i z myślą o zastosowaniu do obliczania indeksu Conleya.

Główne osiągnięcia pracy [H8] są następujące:

1. Zdefiniowanie homomorfizmu indukowanego w homologiach przez korespondencję domkniętą  $(F, F')$  z  $(X, A)$  do  $(Y, B)$ : definicja 2.2 w [H8], str. 1790.
2. Wprowadzenie pojęć homologicznej kompletności (ang. *homological completeness*) i homologicznej spójności (ang. *homological consistency*) dla korespondencji, a także zauważenie i udowodnienie ich podstawowych właściwości.
3. Dowód faktu, że przy pewnych minimalnych założeniach na temat korespondencji domkniętej  $(F, F')$  homomorfizm indukowany przez nią w homologiach pokrywa się z homomorfizmem indukowanym przez jej dowolny ciągły selektor: twierdzenie 3.10 w [H8], str. 1792.
4. Dowód faktu, że nawet jeśli  $f$  nie jest selektorem korespondencji domkniętej  $(F, F')$ , lecz  $(F, F')$  jest wystarczająco dokładnym numerycznym przybliżeniem  $f$ , to wtedy również homomorfizm indukowany w homologiach przez  $f$  pokrywa się z homomorfizmem indukowanym przez  $(F, F')$ ; dokładne założenia są sformułowane i wynik ten jest udowodniony w twierdzeniach 4.6 i 4.13, obydwie w [H8], str. 1794 i 1795.

### 6.3. Dynamika w skończonej rozdzielczości

W pracy [H5] został wprowadzony nowy model reprezentowania w skończonej rozdzielczości układów dynamicznych z czasem dyskretnym. W przeciwieństwie do partycji, które używam w większości moich prac, ten model opiera się na pokryciach otwartych, które dają pewne nowe możliwości.

Głównym celem tej pracy było stworzenie podstaw teoretycznych, które umożliwią definiowanie właściwości dynamicznych bezpośrednio na modelu reprezentującym w skończonej rozdzielczości układ dynamiczny. Chodziło o taki sposób, który zapewni zgodność wyników przy zmianie rozdzielczości, a także możliwość weryfikacji algorytmicznej tych właściwości. Podobnie jak w matematyce występują różne odmiany tranzytywności (tranzytywność topologiczna, tranzytywność metryczna) albo mieszania (mieszanie silne, mieszanie słabe, mieszanie topologiczne), które są zdefiniowane na różne sposoby w zależności do kontekstu, lecz te definicje odzwierciedlają te same ogólne idee, tak właśnie definicje tranzytywności i mieszania zostały wprowadzone w [H5] w kontekście skończonej rozdzielczości. Mimo że w zasadzie pojęcia o tej samej nazwie, lecz zdefiniowane w innych teoriach nie muszą mieć ze sobą niczego wspólnego, okazuje się, że jednak czasem mają. Na przykład tranzytywność topologiczna wynika z tranzytywności metrycznej (przy pewnych założeniach), podczas gdy przeciwna implikacja na ogół nie jest prawdziwa.

Najważniejsze osiągnięcia uzyskane w pracy [H5] są następujące:

1. Sformułowanie pożądaných cech dynamiki o skończonej rozdzielczości: obliczalności i spójności.
2. Zdefiniowanie różnych pojęć, takich jak: wewnętrzna i zewnętrzna rozdzielczość pokrycia otwartego, drobniejsze i grubsze pokrycie, pokrycie istotne, reprezentacja odwzorowania,  $\varepsilon$ -obliczalność odwzorowania.



3. Zdefiniowanie, czym jest własność dynamiczna o skończonej rozdzielczości, a także precyzyjne sformułowanie, co to znaczy, że odwzorowanie ma taką własność przy wszystkich rozdzielczościach  $> \varepsilon$ .
4. Twierdzenie, które daje obliczalne kryterium na udowodnienie, że dane odwzorowanie ma daną własność przy wszystkich rozdzielczościach  $> \varepsilon$  (zob. twierdzenie 2 na str. 221).
5. Sformułowanie definicji tranzytywności i mieszania w kontekście dynamiki o skończonej rozdzielczości, a także udowodnienie, że są to własności obliczalne i spójne.
6. Efektywne algorytmy i oprogramowanie służące sprawdzaniu, czy konkretne odwzorowania kombinatoryczne spełniają warunki tranzytywności i mieszania w kontekście dynamiki o skończonej rozdzielczości. Algorytmy te bazują na DFS i dlatego mają liniową złożoność obliczeniową (co czyni je bardzo szybkimi).
7. Dowód faktu, że odwzorowanie Hénona jest mieszające (w sensie dynamiki o skończonej rozdzielczości) przy wszystkich rozdzielczościach  $> 10^{-5}$  dla wszystkich parametrów  $(a, b)$  w pewnym zbiorze otwartym zawierającym standardowe parametry  $(1.4, 0.3)$  na pewnym zbiorze otwartym na płaszczyźnie zawierającym przybliżenie atraktora obserwowane dla tego odwzorowania (zob. rozdział 5 w [H5], a szczególnie twierdzenie 3, str. 230).

Implementacja algorytmów wprowadzonych w [H5] jest przygotowana w języku C++ przy użyciu szablonów i efektywnych algorytmów grafowych. Jest ona dostępna w [S6] razem z wynikami przykładowych obliczeń opisanych w rozdziale 5 artykułu. Jedną z trudności, która musiała być pokonana, dotyczyła opracowania arytmetyki przedziałowej do przedziałów otwartych, w przeciwieństwie do przedziałów domkniętych, które są typowo stosowane w arytmetyce przedziałowej (zob. np. [2], [9]). Ponadto standardowo dostępne struktury danych do reprezentowania grafów skierowanych okazały się nieefektywne i pochłaniały zbyt dużo pamięci, więc zoptymalizowane struktury danych musiały być opracowane specjalnie na potrzeby tego zastosowania, aby umożliwić prowadzenie obliczeń dla bardzo dużych grafów.

## 5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych:

### 1. Wprowadzenie

Moje pozostałe osiągnięcia naukowe dotyczą głównie dwóch tematów: metod obliczeniowych w topologii algebraicznej (szczególnie kostkowe grupy homologii) oraz algorytmów ścisłego szacowania ekspansywności w dynamice 1-wymiarowej. Liczne publikacje dotyczące pierwszego tematu zostały opisane w rozdziale 2 poniżej, a publikacje dotyczące drugiego tematu – w rozdziale 3. Jest również kilka publikacji niezwiązanych z tymi dwoma tematami, które są przedstawione w następnych rozdziałach poniżej.

Preprinty wszystkich moich publikacji, a także odsyłacze do opublikowanych wersji (jeżeli są dostępne) znajdują się na mojej stronie internetowej <http://www.pawelpilarczyk.com/>

### 2. Obliczanie kostkowych grup homologii

- [P1] M. Niethammer, A.N. Stein, W.D. Kalies, P. Pilarczyk, K. Mischaikow, A. Tannenbaum, Analysis of blood vessel topology by cubical homology, Proceedings of the International Conference on Image Processing (2002), Vol. 2, 969–972, 2002.

Głównym osiągnięciem tego artykułu było zastosowanie oprogramowania [S1], obliczającego grupy homologii zbiorów kostkowych, do analizy 3-wymiarowych skanów naczyń krwionośnych w mózgu uzyskanych metodą rezonansu magnetycznego. Po zastosowaniu standardowych metod progowania, został uzyskany zbiór kostek w  $\mathbb{R}^3$  przybliżający naczynia krwionośne. Obliczone dla niego grupy homologii i generatory zawierały informację na temat topologicznych właściwości tego obrazu.

- [P2] M. Gameiro, P. Pilarczyk, Automatic homology computation with application to pattern classification, RIMS Kokyuroku Bessatsu B3 (2007), 1-10.

Celem tego artykułu było przedstawienie wprowadzenia do obliczania kostkowych grup homologii (zob. [6] i [S1]) oraz omówienie zastosowania do klasyfikacji złożoności wzorów obserwowanych w układzie modelowanym przez równania FitzHugh-Nagumo. Obliczone liczby Betti’ego pozwoliły ocenić złożoność przestrzenno-czasową tych wzorów.

- [P3] M. Mrozek, P. Pilarczyk, N. Żelazna, Homology Algorithm Based on Acyclic Subspace, Computers and Mathematics with Applications (2008), Vol. 55, No. 11, 2395–2412.

W tym artykule został wprowadzony algorytm zwiększający wydajność obliczania kostkowych grup homologii. Podstawowym pomysłem jest tu konstruowanie maksymalnej podprzestrzeni acyklicznej w każdej składowej spójnej, a następnie obliczanie relatywnych grup homologii względem tej podprzestrzeni. Podejście to jest skuteczne dlatego, że gdy oblicza się relatywne grupy homologii pary  $(X, A)$ , odpowiadający tej parze kompleks łańcuchowy jest generowany przez komórki w  $X \setminus A$ . Jeżeli zbiór  $A$  jest duży, to oznacza to ogromną redukcję w ilości danych, które muszą być przetworzone algorytmem

algebraicznym. Oczywiście ma to sens jedynie wtedy, gdy konstrukcja geometryczna zbioru  $A$  jest mniej kosztowna niż przeprowadzanie tych obliczeń algebraicznych. Rzeczywiście, ma to miejsce w przypadku zbiorów kostkowych, ponieważ jest udowodnione, że ten algorytm geometryczny ma złożoność liniową.

- [P4] Y. Hiraoka, P. Pilarczyk, Introduction to CHomP, Bulletin of the Japan SIAM, Vol. 18 (2008), pp. 48–55 (in Japanese).
- [P5] P. Pilarczyk, Introduction to CHomP, Part II: Advanced features, in: Summer Seminar on Applied Mathematics “Computational Homology: Theory & Applications”, Hokkaido University Technical Report Series in Mathematics, pp. 2.16–25, 2008 (in Japanese, translated by Y. Hiraoka).

Te dwa artykuły zawierają wprowadzenie do pakietu oprogramowania CHomP [S1]. Oprócz wyjaśniania idei homologii kostkowych są tam zademonstrowane i wyjaśnione niektóre sposoby uruchamiania programów i właściwości oprogramowania.

- [P6] A. Berciano, H. Molina-Abril, A. Pacheco, P. Pilarczyk, P. Real, Decomposing cavities in digital volumes into products of cycles. In: S. Brlek, C. Reutenauer, X. Provençal (Eds.): Discrete Geometry for Computer Imagery: 15th IAPR International Conference, DGCI 2009, Montréal, Canada, September 30 – October 2, 2009. Proceedings. LNCS 5810, pp. 263–274, 2009.

Głównym osiągnięciem uzyskanym w tym artykule jest opracowanie wersji kostkowej koproduktu Alexandera–Whitneya w homologiach. Koprodukt ten pozwala rozróżniać niektóre zbiory kostkowe, które nie są homotopijnie równoważne, lecz mają izomorficzne grupy homologii. Odpowiada on w przybliżeniu  $\cup$ -produktowi w kohomologiach, co jest pokazane na przykładzie. Wzory dla wymiarów 2 i 3 wyprowadzone w artykule nie wymagają dokonywania podziału kompleksu kostkowego na kompleks symplecjalny, dzięki czemu uzyskuje się znacznie lepszą wydajność niż metody stosowane poprzednio.

- [P7] P. Pilarczyk, P. Real, Computation of cubical homology, cohomology, and (co)homological operations via chain contraction, Advances in Computational Mathematics, Vol. 41, No. 1 (2015), 253–275.

Tematem tego artykułu jest przeniesienie podejścia do obliczania homologii przy użyciu kontrakcji łańcuchowej, rozwijanej wcześniej przez P. Reala i jego współpracowników, z kompleksów symplecjalnych na kompleksy kostkowe. Podejście to różni się od typowej metody „redukcji” tym, że jest tworzona kompletna kontrakcja łańcuchowa z oryginalnego kompleksu łańcuchowego do kompleksu reprezentującego grupy homologii, co otwiera nowe możliwości, takie jak pokazane w pracy [P8] omawianej poniżej.

W artykule tym zostały precyzyjnie sformułowane algorytmy konstrukcji modelu algebraiczno-topologicznego (modelu AT) oraz algebraicznego modelu minimalnego (modelu AM) i zaimplementowane w C++ przy użyciu wybranych zoptymalizowanych struktur danych dostępnych w pakiecie CHomP [S1], a także przy wykorzystaniu innych struktur danych utworzonych specjalnie do tego zadania. Zastosowano technikę programowania generycznego (z wykorzystaniem szablonów w C++), dzięki czemu powstałe

oprogramowanie jest bardzo elastyczne. Bezpośrednie wzory na kostkowy  $\cup$ -produkt oraz przekątną Alexandera-Whitneya zostały opracowane na bazie wcześniejszej pracy Serre’a [15] oraz zilustrowane kilkoma sugestywnymi przykładami. Artykuł zawiera również wyczerpujący spis publikacji związanych z tematem.

Oprogramowanie związane z tym artykułem oraz przykłady są opublikowane na stronie internetowej <http://www.pawelpilarczyk.com/chaincon/>

- [P8] M. Krčál, P. Pilarczyk, Computation of Cubical Steenrod Squares. In: A. Bac and J.-L. Mari (Eds.): Computational Topology in Image Context: 6th International Workshop, CTIC 2016, Marseille, France, June 15-17, 2016. Proceedings. LNCS 9667, pp. 140–151, 2016.

Głównym wynikiem opublikowanym w tym artykule jest bezpośredni wzór na kostkową wersję kwadratów Steenroda oraz dowód poprawności tego wzoru. Wydajna implementacja tego wzoru jest również ważnym wynikiem i została zawarta w pakiecie oprogramowania dołączonego do [P7].

### 3. Ścisłe oszacowania ekspansywności odwzorowań 1-wymiarowych

- [P9] S. Day, H. Kokubu, S. Luzzatto, K. Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, Quantitative hyperbolicity estimates in one-dimensional dynamics, *Nonlinearity* (2008), Vol. 21, No. 9, 1967–1987.

W tym artykule zostało wprowadzone nowe podejście do ścisłego numerycznego obliczania oszacowań hiperboliczności w dynamice 1-wymiarowej. Artykuł koncentruje się na metodzie algorytmicznej, której celem jest obliczenie oszacowania dolnego na średnią ekspansywność odwzorowania 1-wymiarowego wzdłuż fragmentów orbit poza otoczeniem punktów krytycznych.

Układ dynamiczny jest opisywany za pomocą grafu skierowanego z wagami krawędzi. Jego wierzchołki odpowiadają przedziałom domkniętym, na które jest podzielona dziedzina odwzorowania, a wagi krawędzi zawierają oszacowanie dolne na logarytm pochodnej, gdy punkt z jednego przedziału jest odwzorowywany do drugiego. Problem postawiony w artykule jest rozwiązany przez obliczenie oszacowania na średnią wagę pewnych ścieżek w grafie, przy wykorzystaniu zarówno znanych, jak i nowo zaprojektowanych algorytmów. Ścisłe metody numeryczne korzystające z arytmetyki przedziałowej są stosowane do zapewnienia matematycznej poprawności wyników. Implementacja algorytmów w postaci oprogramowania pozwala przeprowadzać obliczenia na wielu komputerach jednocześnie, korzystając z modelu zaprojektowanego w [H4].

Oprogramowanie związane z tym artykułem oraz przykłady są opublikowane na stronie internetowej <http://www.pawelpilarczyk.com/unifexp/>

- [P10] A. Golmakani, S. Luzzatto, P. Pilarczyk, Uniform expansivity outside a critical neighborhood in the quadratic family, *Exp. Math.*, Vol. 25, No. 2 (2016), 116–124.

Ulepszona wersja oprogramowania, które zostało zastosowane w [P9], wraz z nowymi algorytmami powodującymi znacznie mniejsze zużycie pamięci pozwoliło przeprowadzić

dokładniejszą i bardziej wszechstronną analizę oszacowań jednostajnej ekspansywności odwzorowania  $f_a(x) = a - x^2$  poza otoczeniem punktu krytycznego. Ten artykuł zawiera nowe wyniki i ich analizę.

Oprogramowanie związane z tym artykułem oraz przykłady są opublikowane na stronie internetowej <http://www.pawelpilarczyk.com/quadratic/>

#### 4. Automatyczna analiza dynamiki globalnej: metody, eksperymenty i zastosowania

- [P11] P. Pilarczyk, Topological-numerical approach to the existence of periodic trajectories in ODEs, *Discrete and Continuous Dynamical Systems 2003*, A Supplement Volume: *Dynamical Systems and Differential Equations*, 701–708.

W tym artykule została wprowadzona definicja kombinatorycznej pary indeksowej, stosowana później w [H3] i innych pracach. Został również podany nowy algorytm konstrukcji pary indeksowej, który jako punkt wyjścia bierze przybliżenie izolowanego zbioru niezmienniczego, którego indeks Conleya chcemy obliczyć, a następnie powiększa go, aż warunki na parę indeksową będą spełnione. Jest to inne podejście niż zaproponowane przez Szymczaka [16], gdzie pary indeksowe są konstruowane wewnątrz zadanego z góry większego zbioru, który jest zmniejszany do uzyskania pary indeksowej. Przykładowym zastosowaniem tych wyników omówionym w publikacji jest dowód istnienia niestabilnych trajektorii okresowych w układach równań różniczkowych Rösslera i Lorenza, co jest uogólnieniem moich wyników otrzymanych w pracy doktorskiej.

- [P12] Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, A database schema for the analysis of global dynamics, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Rethymno, Greece (September 18-22, 2009), *Numerical Analysis and Applied Dynamics*, Vols. 1 and 2, eds. T.E. Simos, G. Psihoyios, C. Tsitouras, *AIP Conference Proceedings 2009*, Vol. 1168, pp. 918–921.

Ten artykuł zawiera zwięzłe omówienie pracy [H3], a także podsumowanie głównych wyników.

- [P13] Z. Arai, H. Kokubu, P. Pilarczyk, Recent development in rigorous computational methods in dynamical systems, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics (JJIAM)* (2009), Vol. 26, No. 2/3, 393–417.

W tym artykule opisanych jest kilka wybranych wyników w dziedzinie ścisłych obliczeń numerycznych na potrzeby układów dynamicznych, które wykorzystują arytmetykę przedziałową. W szczególności artykuł ten zawiera zwięzłą prezentację metody obliczania indeksu Conleya przy wykorzystaniu zbiorów kostkowych [P11], automatycznej metody analizy dynamiki globalnej [H3] oraz algorytmicznego podejścia do uzyskiwania oszacowań z dołu na ekspansywność odwzorowania 1-wymiarowego [P9].

- [P14] P. Pilarczyk, Set-oriented numerical analysis of difference equations with parameters, Proceedings of the International Workshop Future Directions in Difference Equations (June 13-17, 2011, Vigo, Spain), E. Liz and V. Mañosa Eds., Servicio de Publicacións da Universidade de Vigo, 2011, pp. 149–156.

Ten artykuł zawiera zwięzły opis metody algorytmicznej wprowadzonej w [H3], razem ze wszystkimi niezbędnymi definicjami. Artykuł ten jest napisany dla tych, którzy mogliby być zainteresowani stosowaniem tej metody we własnych badaniach naukowych. Z tego powodu zawiera precyzyjny i wyczerpujący opis danych wejściowych, a także omówienie interpretacji wyników obliczeń. W artykule tym jest również omówione przykładowe zastosowanie do modelu populacji wielorybów fiszbinowych.

- [P15] J. Bush, M. Gameiro, S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow, I. Obayashi, P. Pilarczyk, Combinatorial-Topological Framework for the Analysis of Global Dynamics, Chaos, Vol. 22, No. 4 (2012), 047508.

W tym artykule jest omówiona metoda obliczeniowa z [H3] wraz z nową implementacją oprogramowania [S3] opracowaną przez Harkera. Jest również przedstawione zastosowanie tego nowego oprogramowania do modelu populacyjnego Lesliego z trzema grupami wiekowymi oraz zastosowanie oryginalnej wersji oprogramowania [S3] do trójwymiarowego układu odwzorowań sprzężonych ze sobą.

- [P16] P. Pilarczyk, L. García, B.A. Carreras, I. Llerena, A dynamical model for plasma confinement transitions, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 45, No. 12 (2012), 125502. **(artykuł wyróżniony)**

Celem tego artykułu była analiza numeryczna układu 3 równań różniczkowych, które opisują zmiany poziomu turbulencji, uśrednionego przepływu całościowego i stycznego przepływu strefowego (ang. *turbulence level*, *averaged shear flow* oraz *sheared zonal flow*) w plazmach ograniczonych polem magnetycznym. Analiza była przeprowadzona przy wykorzystaniu symulacji numerycznych, w których 2-wymiarowy zakres parametrów był skanowany w poszukiwaniu atraktorów. Przybliżenia atraktorów były badane przy wykorzystaniu idei homologii natrętnych (ang. *persistent homology*) w celu zidentyfikowania cyklu przyciągającego. Dodatkowo została przeprowadzona analiza topologiczna dynamiki globalnej z wykorzystaniem oprogramowania [S3] wprowadzonego w [H3].

- [P17] T. Miyaji, P. Pilarczyk, M. Gameiro, H. Kokubu, K. Mischaikow, A study of rigorous ODE integrators for multi-scale set-oriented computations, Appl. Numer. Math., Vol. 107 (2016), 34–47.

W tej pracy jest opisana analiza dwóch głównych dostępnych publicznie pakietów oprogramowania do ścisłego całkowania równań różniczkowych zwyczajnych: jednego opracowanego przez grupę CAPD [2], a drugiego bazującego na projekcie COSY Infinity [3]. Celem tej pracy była ocena użyteczności metod dostarczanych przez te pakiety do przeprowadzania obliczeń dynamiki globalnej metodą wprowadzoną w [H3]. Jest to głównie praca eksperymentalna, która bazuje na moim oprogramowaniu [S3]. Artykuł zawiera szczegółowy opis matematyczny metod ścisłego całkowania dostarczonych przez CAPD i COSY, a także wyczerpujące porównanie wyników testów, w którym pod uwagę był wzięty zarówno czas obliczeń, jak i uzyskana dokładność.



## 5. Inne rezultaty

- [P18] G. Chen, K. Mischaikow, R.S. Laramée, P. Pilarczyk, E. Zhang, Vector Field Editing and Periodic Orbit Extraction Using Morse Decomposition, IEEE TVCG (2007), Vol. 13, No. 4, 769–785.

Celem tego artykułu była analiza pól wektorowych na powierzchniach oraz ich edycja. W zastosowanej metodzie był wykorzystywany indeks Conleya, do którego obliczania było używane oprogramowanie CHomP [S1].

- [P19] P. Kościelniak, M. Mazur, P. Oprocha, P. Pilarczyk, Shadowing is generic—a continuous map case, Discrete Contin. Dyn. Syst. (DCDS-A), Vol. 34, No. 9 (2014), 3591–3609.

Ten artykuł zawiera pewne wyniki teoretyczne dotyczące generyczności własności śledzenia pseudo-orbit (ang. *shadowing*) w klasie odwzorowań ciągłych oraz w klasie ciągłych suriekcji na zwartych rozmaitościach topologicznych, które dopuszczają rozkład (wliczając w to rozmaitości triangulowalne).

- [P20] G. Graff, P. Pilarczyk, An algorithmic approach to estimating the minimal number of periodic points for smooth self-maps of simply-connected manifolds, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 45, No. 1 (2015), 273–286.

Ten artykuł opisuje nowe algorytmy kombinatoryczne, które zostały wymyślone i zaimplementowane w celu uzyskania oszacowań na minimalną możliwą liczbę orbit okresowych o danym okresie podstawowym w gładkich odwzorowaniach na jednospójnych rozmaitościach wymiaru co najmniej 4. Obliczanie tego niezmiennika redukuje się do rozwiązania pewnego problemu kombinatorycznego. Znalezienie optymalnego rozwiązania nie wydaje się łatwe, a metody „na siłę” nie wchodzi w grę, ponieważ jest za dużo możliwości do rozpatrzenia. Dlatego zaproponowana została strategia zachłanna dająca rozwiązanie niekoniecznie najlepsze, które okazało się jednak optymalne w kilku przypadkach w przeprowadzonych testach.


Oprogramowanie związane z tym artykułem oraz przykłady są opublikowane na stronie internetowej <http://www.pawelpilarczyk.com/combtop/>

## Literatura

- [1] M. Allili, T. Kaczynski, An algorithmic approach to the construction of homomorphisms induced by maps in homology, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 2261–2281.
- [2] Computer Assisted Proofs in Dynamics, Jagiellonian University, <http://capd.ii.uj.edu.pl/>
- [3] COSY Infinity, Michigan State University, <http://www.cosyinfinity.com/>
- [4] S. Day, O. Junge, K. Mischaikow, A Rigorous Numerical Method for the Global Analysis of an Infinite Dimensional Discrete Dynamical System, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 3 (2004) 117–160.
- [5] Lech Górniewicz, *Homological methods in fixed-point theory for multivalued maps*, Diss. Math. CXXIX, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1976.
- [6] T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek, *Computational homology*, Applied Mathematical Sciences 157, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [7] T. Kaczyński, M. Mrozek, M. Ślusarek, Homology computation by reduction of chain complexes, *Computers and Mathematics*, 35 (1998), 59–70.
- [8] M. Mazur, J. Szybowski, The implementation of the Allili-Kaczyński algorithm for the construction of a chain homomorphism induced by a multivalued map, *Proceedings of the International Conference on Differential Equations* (Berlin, 1999), 225–227, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.
- [9] R.E. Moore, Interval analysis, Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966.
- [10] M. Mrozek, P. Pilarczyk, The Conley index and rigorous numerics for attracting periodic orbits, *Proceedings of the Conference on Variational and Topological Methods in the Study of Nonlinear Phenomena* (Pisa, 2000), 65–74, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, 49, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- [11] M. Mrozek, J.F. Reineck, R. Srzednicki, The Conley index over a base, *Trans. AMS*, 352 (2000) 4171–4194.
- [12] P. Pilarczyk, Computer assisted method for proving existence of periodic orbits, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* (1999), Vol. 13, No. 2, 365–377.
- [13] P. Pilarczyk, Computer assisted proof of the existence of a periodic orbit in the Rössler equations, *Proceedings of the International Conference on Differential Equations* (Berlin, 1999), 228–230, World Sci. Publishing, Singapore, 2000.
- [14] I. Ugarcovici, H. Weiss, Chaotic dynamics of a nonlinear density dependent population model, *Nonlinearity* 17 (2004), 1689–1711.
- [15] J.P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, *Annals of Math* 54 (1951), 425–505.

- [16] A. Szymczak, A combinatorial procedure for finding isolating neighbourhoods and index pairs, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* 127 (1997), 1075–1088.
- [17] A. Szymczak, The Conley index for discrete semidynamical systems, *Topology Appl.* 66 (1995), 215–240.

Wymagany podpis

  
.....  
*Paweł Pilarczyk*