

dr hab. Michał Jasiczak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 25 października 2017

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgra Kamila Drzyzgi zatytułowanej "Bishop's multivalued projections"

Pan mgr Kamil Drzyzga przedstawił rozprawę doktorską zatytułowaną "Bishop's multivalued projections". Praca napisana jest w języku angielskim. Liczy ona 29 stron. Jest ona oparta na wynikach zawartych w dwóch artykułach [3], [4], których autorem jest Pan mgr Drzyzga. Oba zostały opublikowane w *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica*.

Muszę przyznać, że przygotowanie recenzji tej rozprawy doktorskiej sprawiło mi prawdziwą przyjemność. Dotyczy ona bowiem pięknej matematyki. Jest ona oparta na ideach Erretta Bishopa.

Jest rzeczą klasyczną i fundamentalną w analizie zespolonej, że:

- Zbiór analityczny L rozmaitości Steina K jest zbiorem zer pewnej rodziny funkcji analitycznych na K ;
- Jeżeli L jest podrozmaitością rozmaitości Steina K , to każda funkcja analityczna na L rozszerza się do funkcji analitycznej na K .

Wyniki te pochodzą od Kiyoshiego Oki [5], [6]. Zostały one uzyskane metodami teorii snopów. Errett Bishop w [2] podał dowody powyższych faktów niezależne od teorii snopów. Dokładniej podał on jawną postać funkcji rozwiązujących pierwszy z podanych problemów i jawną postać rozszerzenia z L do K .

Bezpośrednią motywacją do napisania recenzowanej rozprawy była uwaga zawarta pod koniec artykułu Erretta Bishopa [2]. Napisał on, że udowodnione przez niego twierdzenie dotyczące specjalnych analitycznych wielościanów może być wykorzystane do wykazania istnienia wielowartościowych projekcji analitycznych. Te z kolei można wykorzystać do konstrukcji operatora rozszerzenia z podrozmaitości rozmaitości Steina. Pan mgr Drzyzga podjął się zrealizowania tego zadania. **Z powodzeniem rozwiązał ten problem.** Nie tylko bardzo dobrze opanował narzędzia wprowadzone przez E. Bishopa, ale także twórczo je rozwinął. Na szczególną uwagę zasługuje wprowadzone przez Niego pojęcie *globalnego systemu projekcji wielowartościowych*. Matematyka, którą zajął się Pan Drzyzga zdecydowanie nie jest łatwa. Tym większe należy mu się uznanie za poziom rozumienia badanych zagadnień, które zaprezentował w rozprawie. Moim zdaniem, fakt, że przedstawione wyniki są w pewnym stopniu znane nie umniejsza wartości rozprawy. Wręcz przeciwnie wydaje mi, że fakt, że idee Bishopa zostały zrealizowane jest bardzo ważny. Mam zresztą wrażenie, że matematycy zajmujący się teorią funkcji wielu zmiennych nie poświęcili wystarczająco dużo uwagi pojęciu projekcji wielowartościowej. Tym większa jest wartość recenzowanej rozprawy.

Recenzowana rozprawa składa się z pięciu rozdziałów. W trzech pierwszych Autor przedstawia motywację i niezbędne informacje dotyczące rozmaitości zespolonych, zbiorów analitycznych i wielościanów analitycznych. Zaprezentowane są także kluczowe dla rozprawy pojęcia produktów symetrycznych i odwzorowań wielowartościowych.

W rozdziale czwartym wykazane jest pierwsze z głównych twierdzeń pracy. Mówi ono, że istnieje system wielowartościowych holomorficznych projekcji z U na M . Zbiór U jest relatywnie zwartym podzbiorem rozmaitości Steina, a M jest podrozmaitością analityczną X taką, że $U \cap M \neq \emptyset$. Twierdzenie to implikuje istnienie liniowego operatora rozszerzenia z $\mathcal{O}(M)$ w $\mathcal{O}(U)$. Dowód oparty jest metodach wprowadzonych przez Bishopa w [2], co jednak należy podkreślić mgr Drzyzga twórczo je rozwija.

W rozdziale piątym wykazane jest drugie główne twierdzenie rozprawy. Mówi ono, że istnieje globalny system holomorficznych projekcji wielowartościowych w pewnym sensie jednostajnie dobry dla lokalnie ograniczonej podprzestrzeni $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(M)$. To implikuje istnienie liniowego operatora rozszerzenia na przykład dla pewnych przestrzeni Hilberta funkcji holomorficznych na M . Podobnie jak w rozdziale poprzednim wykorzystywane metody

pochodzą od Bishopa [2], od Bishopa także pochodzi sposób szacowania funkcji pojawiających się w dowodzie. Należy jednak podkreślić, że przywołane już pojęcie globalnego systemu holomorficznych projekcji wielowartościowych jest autorstwa Pana mgra Drzyzgi. Podobnie Jego zasługą jest obserwacja, że metody Bishopa można wykorzystać do wykazania własności i istnienia tego nowego obiektu.

Wadą recenzowanej rozprawy jest pewna lakoniczność. Moim zdaniem, niektóre ze stwierdzeń zawartych w pracy wymagają dokładniejszego wyjaśnienia i takiego wyjaśnienia w pracy doktorskiej należałoby oczekiwać. Na przykład Autor w dowodzie twierdzenia 4.1.4 pisze: *Obviously, we may assume that $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^j = y_0^j$ for $j = 1, \dots, k$, where $\omega_s \circ g_s|_U(x_0) = [y_0^1, \dots, y_0^{k_s}]$.* Nie wydaje mi się, aby było to oczywiste. Podkreślić jednak należy, że w recenzowanej rozprawie nie znalazłem błędów.

Rozprawa zredagowana jest w sposób staranny, chociaż mgr Drzyzga nie ustrzegł się pewnych błędów natury technicznej. Na przykład zbiór $\Xi_k(x)$ na stronie 23 raz jest zbiorem liczb naturalnych, innym razem zbiorem punktów rozmaitości. Język pracy jest także poprawny, chociaż w kilku miejscach brakuje przedimków.

Autor cytuje tylko pracę [2] E. Bishopa. Uważam, że zacytowana powinna być także wcześniejsza praca tego matematyka [1], w której to udowodnione są niektóre z twierdzeń wykorzystywanych w rozprawie.

Recenzowana praca prezentuje wysoki poziom. Autor z dużą wprawą posługuje się niełatwymi pojęciami i, jak już podkreślałem, twórczo je rozwija. To naprawdę piękna matematyka. Z całą pewnością rozprawa mgra Drzyzgi spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Wnioskuje zatem o dopuszczeniu Go do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Michał Jasiczak

Literatura

- [1] E. Bishop, Mappings of partially analytic spaces, Amer. J. Math. 83 (1961), 209–242.
- [2] E. Bishop, Some global problems in the theory of functions of several complex variables, Amer. J. Math. 83 (1961), 479–498.

- [3] K. Drzyzga, A remark on Bishop's multivalued projection, *Univ. Iag. Acta Math.* 53 (2016), 13–20.
- [4] K. Drzyzga, Systems of holomorphic multivalued projections on complex manifolds, *Univ. Iag. Acta Math* 54 (2017).
- [5] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. I-Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, *Journal of Science of Hiroshima University* 6 (1936), 245–255.
- [6] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. II-Domaines d'holomorphic, *Journal of Science of Hiroshima University*, 7 (1937), 115–130.