Wrocław, 5 XI 2018 r.

Dr hab. Ryszard Deszcz

Katedra Matematyki
Uniwersytet Przyrodniczy we Wrocławiu

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgr. Piotra Kopacza
pt. *Zermelo navigation problem in geometric structures*

W 2004 roku w czasopiśmie Journal of Differential Geometry została opublikowana praca: D. Bao, C. Robles and Z. Shen, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. 66 (2004), 377–435; MR2106471; poz. [22] w *Bibliography* rozprawy doktorskiej. Praca ta, zgodnie z *Google Scholar* cytowana już ponad trzysta trzydzieści razy, bez żadnych wątpliwości, istotnie przyczyniła się do dalszego rozwoju badań nad problemem nawigacji Zermelo. Znaczący wkład w te badania wniósł również Pan mgr Piotr Kopacz, przedstawiając rezultaty badań nad tym problemem m.in. w pracach: [9], [10], [66-71], tj.

[9] N. Aldea and P. Kopacz, *Generalized Zermelo navigation on Hermitian manifolds under mild wind*, Differential Geom. Appl. 54 (2017), 325–343. MR3693934.
[10] N. Aldea and P. Kopacz, *Generalized Zermelo navigation on Hermitian manifolds with a critical wind*, Results Math. 72 (2017), no. 4, 2165–2180. MR3735549.
[66] P. Kopacz, *Proposal on a Riemannian Approach to Path Modeling in a Navigational Decision Support System*. Activities of Transport Telematics. TST 2013. Communications in Computer and Information Science (395). Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
[67] P. Kopacz, *Application of codimension one foliation in Zermelo's problem on Riemannian manifolds*, Differential Geom. Appl. 35 (2014), 334–349. MR3254313.
[68] P. Kopacz, *On generalization of Zermelo navigation problem on Riemannian manifolds*. arXiv:1604.06487 [math.DG], 2016.
[69] P. Kopacz, *A note on generalization of Zermelo navigation problem on Riemannian manifolds with strong perturbation*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat. 25 (2017), no. 3, 107–123. MR3747159.
[70] P. Kopacz, *Application of planar Randers geodesics with river-type perturbation in search models*, Appl. Math. Model. 49 (2017), 531–553. MR3661928.
[71] P. Kopacz, *A note on time-optimal paths on perturbated spheroid*, J. Geom. Mech. 10 (2), 2018, 139–172. MR3808245.

Współautorką publikacji [9] i [10] jest Pani profesor Nicoleta Aldea (Transilvania University, Braşov). Dodajmy także, że publikacje: [9], [10], [68], [69], [70] i [71], wspólnie z pracą P. Kopacz, *Complex indicatrix based generalized Zermelo navigation*, 2016, złożoną do druku w European J. Math., stanowiły rozliczenie projektu NCN 2013/09/N/ST10/02537, którego kierownikiem był Pan mgr Piotr Kopacz. Prace [9] i [67] rekomendował do druku Pan profesor Zhongmin Shen, jeden ze współautorów [22], autor dwóch i współautor kolejnych dwóch monografii poświęconych geometrii finslerowskiej. Natomiast pracę [71] rekomendował do druku Pan profesor James Montaldi, wybitny specjalista z zakresu systemów dynamicznych i teorii ergodycznej oraz analizy globalnej i analizy na rozmaitościach.

Rozprawa doktorska Pana mgr. Piotra Kopacza liczy 200 stron. Pięć rozdziałów głównych Rozprawy jest poprzedzonych 10 stronicowym rozdziałem wstępnym (*Introduction*). Rozdział ten jest podzielony tematycznie na sześć części stanowiących bardzo dobre merytoryczne wprowadzenie w tematykę Rozprawy: *A few words on motivation*, *Genesis of Zermelo navigation problem*, *Developing debate on navigation problem*, *Revisiting Zermelo navigation with purely geometric approach in Finsler geometry*, *Overview of dissertation* oraz *Dissemination of research*. W tej ostatniej części wymienione są konferencje i seminaria, zarówno krajowe jak i zagraniczne, w trakcie których Pan mgr Kopacz prezentował wyniki swoich badań.

Rozdział pierwszy rozprawy dotyczy uogólnionego problemu nawigacji Zermelo w rzeczywistej geometrii Finslera na dowolnej rozmaitości riemannowskiej (rozdział 1.1) oraz w zespolonej geometrii Finslera na dowolnej rozmaitości hermitowskiej (rozdział 1.2). Część wyników przedstawionych w rozdziale 1.1 jest zawarta w pracach [9] i [10], a przedstawionych w rozdziale 1.2 - w pracach [68] i [69].

We wstępie rozdziału 1.1 m.in. podana jest definicja metryki Finslera oraz omówione są jej podstawowe własności. Podane są tu również definicje specjalnych typów tej klasy metryk: metryki Randersa, Kropiny i Matsumoto. Główny wynik, w przypadku rzeczywistym, jest przedstawiony w Twierdzeniu 1.1.10 - mocno wypukła metryka Finslera F jest typu Randersa wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązuje ona uogólniony problem nawigacji Zermelo na rozmaitości Riemanna (M, h), z zależną od położenia prędkością statku $|\, u(x)\,|_h \leqslant 1$ i pod wpływem wiatru $W(x)$, przy czym $|\, W(x)\,|_h < |\, u(x)\,|_h$, $x \in M$. Twierdzenie to jest uogólnieniem wyniku z pracy [22] (Proposition 1.1), w którym warunek $|\, u(x)\,|_h \leqslant 1$ jest zastąpiony przez $|\, u(x)\,|_h = 1$. W Przykładzie 1.1.12 jest omówiony problem nawigacji Zermelo i uogólniony problem nawigacji Zermelo w specjalnym przypadku, gdy $M = \mathbb{R}^2$, a h jest standardową metryką euklidesową, $h_{ij} = \delta_{ij}$. Natomiast w kolejnym przykładzie (Przykład 1.1.20) podano konstrukcje 2-wymiarowych metryk Kropiny, przy czym, tak jak w Przykładzie 1.1.12, mamy $M = \mathbb{R}^2$ i tu także h jest standardową metryką euklidesową.

We wstępie rozdziału 1.2 przedstawione są podstawowe pojęcia geometrii hermitowskiej oraz zespolonej geometrii Finslera, a także definicje zespolonych metryk Randersa i Kropiny. W tej części rozdziału 1 badany jest uogólniony problem nawigacji Zermelo na rozmaitościach hermitowskich (M, h), zarówno przy słabych zaburzeniach metryki h jak i krytycznych zaburzeniach metryki h. Główne wyniki tego rozdziału przedstawione są w Twierdzeniach 1.2.10 i 1.2.15:

- zespolona metryka Finslera F jest zespolonego typu Randersa wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązuje ona uogólniony problem nawigacji Zermelo na rozmaitości hermitowskiej (M, h), ze zmienną prędkością statku $\|\, u\,\|_h$ i pod wpływem wiatru W, przy czym

$$0 < \|\, W\,\|_h < \|\, u\,\|_h \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \cos(\arg(h(u + W, \overline{W}))) = -1;$$

- zespolona metryka Finslera F jest zespolonego typu Kropiny wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązuje ona uogólniony problem nawigacji Zermelo na rozmaitości hermitowskiej (M, h), z zależną od położenia prędkością statku $\|\, u(z)\,\|_h$ i pod wpływem wiatru $W(z)$, przy czym

$$0 < \|\, W(z)\,\|_h < \|\, u(z)\,\|_h \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \cos(\arg(h(u + W, \overline{W}))) = -1, \quad z \in M.$$

W rozdziale drugim przedstawione jest wariacyjne podejście do rozwiązania uogólnionego problemu nawigacji Zermelo. Ściślej, przy wykorzystaniu równań Eulera-Lagrange'a (równania (2.10)) badany jest uogólniony problem nawigacji Zermelo na rozmaitościach konforemnie płaskich (M, h) wymiaru $n \geqslant 2$. Rozwiązanie tego problemu przedstawione jest w Twierdzeniu 2.1.10 (układ równań różniczkowych cząstkowych (2.58)). W drugiej części tego rozdziału szczegółowo rozważane są przypadki, gdy $n = 2$ lub $n = 3$. W szczególności, w Przykładzie 2.1.16 analizowane są specjalne przypadki rozwiązania tego problemu na spłaszczonej elipsoidzie obrotowej z metryką indukowaną przez 3-wymiarową metrykę euklidesową.

W pierwszej części rozdziału trzeciego badane są związki między podejściem geometrycznym a wariacyjnym do rozwiązania uogólnionego problemu nawigacyjnego Zermelo. Wykazano, że w przypadku, gdy metryka h rozważanej rozmaitości M, $n \geqslant 2$, jest konforemna z metryką euklidesową, $h_{ij} = S^{-2}\delta_{ij}$, gdzie S jest czynnikiem konforemnym, oraz spełnione są pewne dodatkowe założenia, to podejście geometryczne do rozwiązania uogólnionego problemu nawigacyjnego Zermelo prowadzi do tego samego rozwiązania, co podejście wariacyjne (Propozycja 3.2.3). Podobnie jest w przypadku odwrotnym. Wykorzystuje się tu Twierdzenie 5.3.1 z monografii Bucutaru i Mirona *Finsler-Lagrange geometry. Applications to dynamical systems* [31] (str. 87 monografii, a nie str. 89, jak to jest podane w rozprawie).

W drugiej części rozdziału trzeciego (rozdział 3.3) badane są czasowo optymalne trajektorie na rozmaitościach 2-wymiarowych, ściślej na sferoidach, a w szczególności na spłaszczonych elipsoidach obrotowych. Badania zawarte w tej części rozprawy zostały opublikowane w tym roku pracy [71].

W ostatniej części tego podrozdziału, moim zdaniem, warto by było przedstawić definicje einsteinowskich oraz Ricci-stałych metryk Randersa.

Rozdział czwarty rozprawy poświęcony jest uogólnieniom pewnych strategii nawigacyjnych oraz specjalnym przypadkom nawigacji Zermelo na rozmaitościach konforemnie płaskich wymiaru $\geqslant 2$. W podrozdziale 4.1 wyznaczono układ równań różniczkowych zwyczajnych (układ równań (4.9)) będący rozwiązaniem problemu nawigacji na rozmaitościach konforemnie płaskich ze stałym kierunkiem prędkości własnej statku u (Propozycja 4.1.4). W podrozdziale tym wyznaczono także układ równań różniczkowych cząstkowych (układ równań (4.14)) będący rozwiązaniem problemu nawigacji na rozmaitościach Riemanna ze stałym kierunkiem prędkości własnej statku u (Propozycja 4.1.5).

W kolejnym podrozdziale jest zdefiniowana uogólniona loksodromiczna nawigacja Zermelo na rozmaitości Riemanna (M, h), tj. nawigacja przy założeniu stałego kierunku prędkości wypadkowej v. Trajektorie wyznaczone przez tego typu nawigację są nazywane uogólnionymi loksodromami. Wyznaczono układy równań różniczkowych cząstkowych (układy (4.34) oraz (4.40)), których rozwiązaniami są uogólnione loksodromy na rozmaitościach konforemnie płaskich (Propozycje 4.2.4 oraz 4.2.5). Rozwiązanie problemu uogólnionej loksodromicznej nawigacji Zermelo na rozmaitościach konforemnie płaskich (M, h) przedstawiono w Propozycjach 4.2.7 oraz 4.2.8.

W dalszej części tego rozdziału przedstawione są wyniki dotyczące pewnych innych typów nawigacji: *goal oriented (Zermelo) navigation* na przestrzeniach euklidesowych (Propozycje 4.3.1, 4.3.2, 4.3.4 i 4.3.5) oraz *navigation in neutral wind* na rozmaitościach konformenie płaskich (Propozycja 4.5.4).

Można zastanowić się nad następującym zagadnieniem (do ewentualnego rozważenia w przyszłości) - jaki wpłw na rozwiązania problemu nawigacji na rozmaitościach konforemnie płaskich (M, h), wymiaru $n \geqslant 3$, $h_{ij} = S^{-2}\,\delta_{ij}$, badanych choćby w tym rozdziale, miałoby założenie, że operator Ricciego rozważanej rozmaitości (M, h) posiada w każdym punkcie co najwyżej dwie różne wartości własne, tj. czy rozmaitość (M, h) jest rozmaitością quasi-einsteinowską, czy też ogólniej częściowo einsteinowską, w sensie definicji przedstawionych np. w monografii Bang-Yen Chena *Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds*, World Scientific, 2017. Dane założenie, tj. założenie o liczbie różnych wartości własnych operatora Ricciego rozmaitości (M, h), $n \geqslant 3$, ogranicza wybór funkcji S. Z drugiej strony, biorąc pod uwagę funkcję S otrzymaną np. przy rozwiązywaniu równań (4.34), można wyznaczyć wartości własne operatora Ricciego metryki h.

Główne wyniki rozdziału 5 dotyczą uogólnionej nawigacji Zermelo na 2-wymiarowych przestrzeniach euklidesowych $(M = \mathbb{R}^2, h)$, $h_{ij} = \delta_{ij}$, z polem wektorowym $W = [W^1, W^2]$, gdzie W^1 jest pewną funkcją jednej zmiennej, a $W^2 = 0$ (*river-type perturbations*). Badane są tu zaburzenia liniowe, zaburzenia wyznaczone przez kwartyki oraz zaburzenia gaussowkie. Część wyników przedstawionych w tym rozdziale jest zawarta w pracach: [66], [67] i [70].

Dla metryki Randersa F otrzymanej w jednym z rozważanych w tym rozdziale przykładów (zaburzenia liniowe), wyznaczona jest jej finslerowska krzywizna Gaussa K (*the flag curvature*). Wykazano również, że metryka F nie jest metryką o stałej krzywiźnie w sensie finslerowskim, tj. metryka ta nie jest metryką *of constant flag curvature*. Wzór opisujący w tym przykładzie krzywiznę K zajmuje kilkanaście linijek tekstu. Sądzę, że w pozostałych przykładach jest podobnie i chyba z tego to właśnie powodu pominięto przedstawienia analityczne krzywizn Gaussa K metryk Randersa otrzymanych w pozostałych przypadkach. Szkoda, że w Rozprawie nie są przedstawione definicje wspomnianych tu pojęć - bardzo ważnych pojęć w geometrii rozmaitości Finslera, a w szczególności w geometrii rozmaitości Randersa.

Dodajmy, że badanie rozmaitości 4-wymiarowych z metrykami $\overline{g}$ powstałymi przez zaburzenia rzędu jeden metryki Minkowskiego η, tj. $\overline{g} = \eta + A$, przy czym A jest tensorem symetrycznym typu $(0, 2)$ i $\operatorname{rank} A = 1$, zostały zainicjowane przez profesora Andrzeja Trautmana w 1962 roku. W kolejnych latach kontynuowano badania zaburzeń rzędu jeden, m.in. metryk czasoprzestrzennych będących rozwiązaniami równań pola Einsteina.

Podsumowanie.

Stwierdzam, że recenzowana Rozprawa doktorska spełnia wymogi stawiane rozprawom doktorskim przez Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym i wnioskuję o jej przyjęcie oraz dopuszczenie Pana mgr. Piotra Kopacza do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto wnioskuję o wyróżnienie Rozprawy doktorskiej Pana mgr. Piotra Kopacza.

Ryszard Deszcz

UWAGI

str. 1 - linia 1_{11} - powinno być: Riemannian manifolds

str. 9 - linia 9^4 - powinno być: (Section 4.1)

str. 9 - linia 9^7 - powinno być: (Section 4.4)

str. 11 - linia 11_6 - należy dopisać: $u, v \in T_x M$

str. 19 - linia 19_{14} - powinno być: but they

str. 22 - fragment tekstu na stronie 22 (linie 22_4-22_2) wymaga korekty - jeśli rzeczywiście powołujemy się w rozdziale pierwszym Rozprawy na wzory podane w rozdziale piątym Rozprawy, to należy to stosownie skomentować. Analogiczna uwaga dotyczy tekstu na następnej stronie (linie 22_4-22_2) - tu z kolei powołujemy się na wzór z rozdziału trzeciego.

str. 35 - linia 35_7 - powinno być: structures [33].

str. 48 - linie 15-16; Mamy

"In particular, in this case, if $\tilde{h}$ is conformally flat Einstein metric then $\tilde{h}$ has constant curvature."

- proponuję

"It is well-known that any 3-dimensional Einstein metric has constant curvature."

str. 118 - wyrażenie opisujące definicję rozmaitości (M, h) wymaga korekty

str. 118 - wyrażenie "*das einfachste nicht-triviale* ... " (linia 118_{18}) zostało w rozprawie przetłumaczone na język angielski - szkoda, że w innych miejscach rozprawy (np. na stronie 3 czy też 73) nie dokonano również stosownych tłumaczeń na język angielski.

str. 143 - linia 9 - powinno być: ... and flyers (Section 5.4).

str. 183 - poz. [56] - powinno być: P. (zamiast T.)

str. 183 - poz. [63] wymaga istotnych uzupełnień bibliograficznych.

str. 186 - poz. [113] - powinno być: 2014. (zamiast 2013.)

Ryszard Deszcz