AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: **Krzysztof Bartosz**

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:

   - **dyplom magistra matematyki** otrzymany w 2003r. po ukończeniu z wyróżnieniem studiów na kierunku *matematyka* o specjalności *matematyka obliczeniowa i komputerowa* na Wydziale Matematyki Stosowanej Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie
   - **dyplom/stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki** otrzymany w 2007r. po ukończeniu studiów doktoranckich na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Tytuł rozprawy :	*Hemivariational Inequalities Modeling Dynamic Contact Problems in Mechanics*
Opiekun naukowy:	*prof. dr hab. Stanisław Migórski*

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

   Od 2007r. jestem zatrudniony w Katedrze Teorii Optymalizacji i Sterowania na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie na stanowiskach:

   - asystenta - w latach 2007-2010
   - adiunkta - od 2010r.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki:

   Osiągnięciem, które pragnę zaprezentować w toku postępowania habilitacyjnego, jest cykl 10-ciu powiązanych ze sobą tematycznie publikacji zatytułowany

   „**Ewolucyjne inkluzje typu Clarke'a oraz aproksymacja ich rozwiązań w oparciu o metody dyskretyzacji czasowej i przestrzennej**".

   W skład ww. cyklu wchodzą następujące publikacje:

   [A1] K. Bartosz, Numerical methods for evolution hemivariational inequalities, Rozdział 5-ty w książce *Advances in Variational and Hemivariational Inequalities, Advances in Mechanics and Mathematics*, vol. 33, edytorzy: W. Han, S. Migórski, M. Sofonea, Springer, 2015, 109-142

[A2] K. Bartosz, Variable time-step theta-scheme for nonlinear second order evolution inclusion, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, vol. 14, no. 6 (2017), 842-868,
http://www.math.ualberta.ca/ijnam/Volume-14-2017/No-6-17/2017-06-03.pdf

[A3] K. Bartosz, M. Sofonea, Modeling and analysis of a contact problem for a viscoelastic rod, Zeitschrift für angewandte Mathematics und Physics, vol. 67, no. 127 (2016), 21 stron, DOI: 10.1007/s00033-016-0718-z

[A4] K. Bartosz, L. Gasiński, Z. Liu, P. Szafraniec, Convergence of a time discretization for nonlinear second order inclusion, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2017), DOI: 10.1017/S0013091516000560

[A5] K. Bartosz, M. Sofonea, The Rothe method for variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 48, no. 22 (2016), 861-883, DOI:10.1137/151005610

[A6] K. Bartosz, Convergence of Rothe scheme for a class of dynamic variational inequalities involving Clarke subdifferential, Applicable Analysis (2017), 1-21, DOI: 10.1080/00036811.2017.1359562

[A7] M. Barboteu, K. Bartosz, T. Janiczko, W. Han, Numerical analysis of a hyperbolic hemivariational inequality arising in dynamic contact, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 53, no. 1 (2015), 527-550, DOI: 10.1137/140969737

[A8] K. Bartosz, D. Danan, P. Szafraniec, Numerical analysis of a dynamic bilateral thermoviscoelastic contact problem with nonmonotone friction law, Computers and Mathematics with Applications, vol. 73 (2017), 727-746, DOI: 10.1016/j.camwa.2016.12.026

[A9] M. Barboteu, K. Bartosz, W. Han, Numerical analysis of an evolutionary variational-hemivariational inequality with application in contact mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 318 (2017), 882-897, DOI: 10.1016/j.cma.2017.02.003

[A10] M. Barboteu, K. Bartosz, D. Danan, Analysis of a dynamic contact problem with nonmonotone friction and non-clamped boundary conditions, Applied Numerical Mathematics, vol. 126 (2018), 53-77, DOI: 10.1016/j.apnum.2017.12.005

Praca [A1] jest samodzielną publikacją stanowiącą Rozdział 5-ty książki

Advances in Variational and Hemivariational Inequalities, Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 33, Springer, 2015, edytorzy: W. Han, S. Migórski, M. Sofonea.

Informacje bibliograficzne nt. książki dostępne są pod adresem

http://www.springer.com/la/book/9783319144894.

Prace [A2]-[A10] są artykułami opublikowanymi w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports.

Ewolucyjne inkluzje typu Clarke'a oraz aproksymacja ich rozwiązań w oparciu o metody dyskretyzacji czasowej i przestrzennej

2 stycznia 2018

Spis treści

1 Wstęp

Wszystkie prace wchodzące w skład prezentowanego cyklu poświęcone są inkluzjom ewolucyjnym, w których wyrażenie wielowartościowe zawiera subróżniczkę typu Clarke'a funkcji lokalnie lipszycowskiej. Inkluzje tego typu stanowią alternatywne sformułowanie zagadnień określanych jako nierówności hemiwariacyjne. Co więcej, inkluzje opisane w pracach [A5], [A6] i [A9] uwzględniają (oprócz subróżniczki Clarke'a) również subróżniczkę funkcji wypukłej rozumianą w sensie analizy wypukłej. Tego typu inkluzje są z kolei blisko związane z nierównościami określanymi jako wariacyjno–hemiwariacyjne. We wszystkich ww. pracach mamy do czynienia z problemami, w których niewiadomą jest pewna funkcja zależna od czasu, i w których występują jej pochodne czasowe, pierwszego lub drugiego rzędu, co stanowi o ewolucyjnym charakterze badanych zagadnień. Inkluzje badane w pracach [A1]-[A10] stanowią abstrakcyjne sformułowanie pewnych konkretnych zagadnień fizycznych pochodzących z mechaniki kontaktowej. Obecność subróżniczki Clarke'a w tych sformułowaniach wynika z niemonotonicznego charakteru opisywanych zjawisk.

Prace [A1]-[A6] poświęcone są zastosowaniu metody dyskretyzacji czasowej (metody Rothe) do wykazania istnienia rozwiązania omawianych inkluzji. Wyniki prac [A7]-[A9] dotyczą natomiast oszacowania błędu przybliżenia numerycznego opartego na dyskretyzacji przestrzennej lub czasowo-przestrzennej bez rozstrzygania kwestii istnienia rozwiązania zagadnienia wyjściowego. Dotyczą one bowiem zagadnień, dla których istnienie rozwiązania jest już znane ([A7], [A8]), bądź też pozostaje wciąż problemem otwartym ([A9]). Wreszcie w pracy [A10] przeprowadzony został zarówno dowód istnienia rozwiązania problemu wyjściowego oparty na rezultacie z pracy [A2] jak również wyprowadzone zostały oszacowania błędu dla obu schematów dyskretnych.

Metoda dyskretyzacji czasowej jest bardzo często stosowana w badaniu problemów ewolucyjnych, w szczególności abstrakcyjnych równań różniczkowych, w których szukana jest funkcja zmiennej czasowej o wartościach w abstrakcyjnej przestrzeni Banacha. Spośród wielu opracowań dotyczących tej metody, na szczególną uwagę zasługuje monografia [20], poświęcona problemom nieliniowym. Natomiast w pracach [12] i [13] metoda Rothe została po raz pierwszy użyta do badania ewolucyjnych inkluzji Clarke'a typu parabolicznego modelujących zjawisko przepływu ciepła. Wprowadzone tam rozwiązania, pozwalające na wykonanie przejścia granicznego z wykorzystaniem przestrzeni funkcji o wahaniu ograniczonym (por. Wnioski 37 i 40), udało mi się skutecznie zastosować do innych typów inkluzji ewolucyjnych.

W szczególności rezultaty uzyskane w [12] i [13] zostały uogólnione odpowiednio w pracach [A1] i [A2] na przypadek inkluzji hiperbolicznych (inkluzji rzędu drugiego) modelujących dynamiczne problemy mechaniki kontaktowej z niemonotonicznym prawem tarcia. Udało mi się przy tym nieco osłabić założenia używane w [12] i [13] poprzez rezygnację z pewnych ograniczeń takich jak warunek H_{aux} w [12] i częściowo warunek B) w [13]. Było to możliwe dzięki założeniu, które w pracy [A1] oraz w Podrozdziale 2.4.1 oznaczone jest symbolem H_{aux}, a w pracy [A2] symbolem $H(U)$, o którym wiadomo, że jest spełnione w badanych przeze mnie modelach (por. Wniosek 43 i Uwaga 47). Argumentacja, która na to pozwoliła została opisana w Podrozdziale 2.4.3 przed Wnioskiem 48. To samo założenie zastosowane w pracy [A2] pozwoliło na uogólnienie rezultatu pracy [15]. Udało mi się mianowicie zrezygnować z ograniczeń zawartych w założeniach (H_1) i $(\tilde{H}_1)$ w [15] (por. Wniosek 48). Ponadto używane tam założenie $H(A)$(iii) o koercytywności operatora lepkościowego udało mi się zastąpić słabszym założeniem $H(A)$(iii) wprowadzonym w Podrozdziale 2.2 mojej prezentacji (por. [A2], Remark 32). Dzięki temu ostatniemu uogólnieniu możliwe było zastosowanie otrzymanego wyniku do modelu ciała swobodnego, a nie, jak w [15], tylko do modelu ciała przymocowanego (por. Wniosek 45 i [A2], Rozdział 7). W szczególności rezultat z pracy [A2] został pomocniczo wykorzystany do udowodnienia słabego rozwiązania problemu badanego w pracy [A10].

W pracach [A3] i [A4] metoda Rothe została zastosowana dla ewolucyjnej inkluzji rzędu drugiego zawierającej dodatkowy składnik nieliniowy, który nie występuje w inkluzjiach badanych w [A1] i [A2]. Inkluzja badana w [A3] została użyta do modelowania dynamicznego zjawiska kontaktowego pręta jednowymiarowego z nieliniowym prawem konstytutywnym. Natomiast w pracy [A4] podobna inkluzja posłużyła jako słabe sformułowanie dwóch problemów brzegowych rzędu drugiego względem czasu uwzględniających p-laplasjan. Rezultat uzyskany w pracy [A4] stanowi istotne uogólnienie wyników pracy [9], gdyż inkluzja badana w [A4] zawiera składnik wielowartościowy, którego nie ma w problemie badanym w [9]. Ponadto w [9] występuje operator, który jest z założenia monotoniczny i hemiciągły, zaś w [A4] zamiast niego rozpatrujemy operator pseudomonotoniczny, co jest własnością bardziej ogólną (por. Uwaga 3).

W pracach [A5] i [A6] metoda Rothe została zastosowana do badania inkluzji typu Clarke'a zawierających dodatkowo subróżniczkę funkcji wypukłej. Inkluzja badana w pracy [A5] stanowi uogólnienie inkluzji badanej w [B6] i modeluje quasistatyczny problem kontaktowy bez tarcia z niemonotonicznym warunkiem normalnym i ograniczeniami jednostronnymi. Inkluzja w pracy [A6] modeluje podobny problem kontaktowy, lecz w przypadku dynamicznym. Zaletą pracy [A6] jest to, że użyty w niej schemat dyskretyzacji czasowej nie wymaga stosowania przestrzenii funkcji o wahaniu skończonym, która pełni kluczową rolę zarówno w pracach [12], [13], jak również w pracach [A1]-[A5]. Dzięki temu technika dowodowa jest prostsza, a praca jest bardziej czytelna. Jest to wszak możliwe dzięki stosunkowo silnym założeniom o operatorze lepkości. Ponadto praca [A6] częściowo uogólnia rezultat uzyskany w [10], który dotyczy zjawiska kontaktowego ciała przymocowanego oraz wymaga zastosowania założenia narzucającego pewne ograniczenie na stałe występujące w problemie (zob. [16], (4.2)). Tymczasem rezultat otrzymany w [A6] dotyczy trudniejszego modelu ciała swobodnego (por. Wniosek 45), a ponadto nie wymaga żadnych ograniczeń na stałe.

W pracy [A7] przeprowadzona została analiza numeryczna problemu mechaniki kontaktowej badanego w pracy [A1] obejmująca oszacowanie błędu dla schematów semidyskretnego i w pełni dyskretnego oraz symulacje komputerowe. Praca [A7] stanowi częściowe uogólnienie wyników uzyskanych w [3] na przypadek problemu kontaktowego z niemonotonicznym prawem tarcia. Ponadto wyniki uzyskane w [A7] stanowią uogólnienie na przypadek dynamiczny wyników uzyskanych w pracy [B9] dotyczącej zjawiska statycznego. Oszacowanie błędu wyprowadzone w [A7] jest przy tym lepsze niż w pracy [B9] (zob. Podrozdział 3.7).

Praca [A8] stanowi uogólnienie wyników uzyskanych w pracy [A7] na przypadek modelu uwzględniającego zjawisko termalne. Praca [A9] poświęcona jest analizie numerycznej problemu badanego w pracy [A5]. Obejmuje ona oszacowanie błędu dla schematu w pełni dyskretnego oraz symulacje komputerowe. Praca [A10] poświęcona jest analizie ewolucyjnej inkluzji typu Clarke'a modelującej dynamiczny proces kontaktowy ciała swobodnego z niemonotonicznym prawem tarcia i z niemonotonicznym prawem kontaktowym normalnym.

W Rozdziale 2 opiszę matematyczne i fizyczne aspekty badanej przeze mnie tematyki, zwracając uwagę na najistotniejsze problemy z nią związane. W Rozdziale 3 opiszę szczegółowo rezultaty uzyskane w pracach [A1]-[A10].

2 Ogólne omówienie badanej tematyki

W rozdziale tym wprowadzę pojęcia matematyczne konieczne do sformułowania prezentowanych przeze mnie zagadnień oraz podam najważniejsze twierdzenia, z których korzystałem w moich pracach. Postaram się również nakreślić podstawowe idee, na których opierają się uzyskane przeze mnie rezultaty.

W Podrozdziale 2.1 omówię stacjonarne inkluzje typu Clarke'a. Pojęcia i twierdzenia w nim zawarte będą następnie wykorzystane w Podrozdziale 2.2 poświęconym inkluzjom niestacjonarnym (ewolucyjnym).

W celu ustalenia terminologii obowiązującej w całej prezentacji, oznaczmy przez X dowolną rzeczywistą przestrzeń unormowaną z normą $\|\cdot\|_X$ a przez X^* przestrzeń do niej dualną. Symbolem $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*\times X}$ oznaczać będziemy dualność między przestrzeniami X i X^*. Silną i słabą zbieżność w X oznaczać będziemy odpowiednio symbolami $\to$ i $\rightharpoonup$. A zatem oznaczenia: $u_n \to u$ oraz $u_n \rightharpoonup u$ onaczają odpowiednio, że ciąg u_n jest zbieżny do u silnie ($\|u_n - u\|_X \to 0$ przy $n \to \infty$) oraz ciąg u_n jest zbieżny do u słabo ($\langle f, u_n - u\rangle_{X^*\times X} \to 0$ przy $n \to \infty$ dla każdego $f \in X^*$).

2.1 Stacjonarne inkluzje typu Clarke'a

Materiał prezentowany w tym podrozdziale dotyczy stacjonarnych inkluzji typu Clarke'a, tj. takich, w których składnik wielowartościowy zawiera w sobie *subróżniczkę Clarke'a* pewnej funkcji lokalnie lipszycowskiej (pojęcie to zostanie zdefiniowane w Podrozdziale 2.1.3). Przykładem zagadnienia opisanego taką inkluzją jest następujący problem.

Problem $(P)_S$. *Znaleźć $u \in X$ spełniające warunek*

$$Au + \iota^* \partial_{Cl} \varphi(\iota u) \ni f, \tag{1}$$

gdzie $f \in X^*$ jest dane. W ogólnym przypadku operator A może być jedno lub wielowartościowym operatorem prowadzącym z X do X^*, tj. $A \colon X \to X^*$ albo $A \colon X \to 2^{X^*}$. Ponadto U jest pewną przestrzenią unormowaną, $\iota \colon X \to U$ jest danym operatorem, a $\iota^* \colon U^* \to X^*$ operatorem do niego sprzężonym. Symbol $\partial_{Cl}\varphi$ oznacza wspomnianą już wyżej subróżniczkę Clarke'a funkcji φ (zob. [6]).

W prezentowanych przeze mnie pracach pojawia się często konieczność wykazania istnienia rozwiązania problemu mającego postać analogiczną do Problemu $(P)_S$, zaś głównym celem tego podrozdziału jest omówienie służących temu technik dowodowych. Prezentowane poniżej rozważania zmierzać będą do sformułowania wniosków dotyczących możliwych metod dowodzenia istnienia rozwiązania Problemu $(P)_S$ w pewnych szczególnych przypadkach. Wcześniej jednak konieczne będzie omówienie pojęć dotyczących poszczególnych składowych inkluzji (1). W szczególności w Podrozdziałach 2.1.1 i 2.1.2 przedstawię te własności operatora A (w przypadku jedno i wielowartościowym), które mają znaczenie dla istnienia rozwiązania Problemu $(P)_S$. Podrozdział 2.1.3 poświęcony jest natomiast zagadnieniom, w których występuje subróżniczka Clarke'a.

2.1.1 Własności operatorów jednowartościowych

Rozważmy operator $A \colon X \to X^*$ i zdefiniujmy jego niektóre własności wykorzystywane w analizie nieliniowej, w szczególności takie, które okażą się mieć znaczenie w badaniu inkluzji (1).

Definicja 1 *Mówimy, że operator A jest*

a) *ograniczony, jeżeli przekształca zbiory ograniczone w X na zbiory ograniczone w X^*, czyli dla dowolnego zbioru $B \subset X$ z warunku $\sup_{u \in B} \|u\|_X < \infty$ wynika warunek $\sup_{u \in B} \|Au\|_{X^*} < \infty$;*

b) *koercytywny, jeżeli $\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_{X^* \times X}}{\|u\|_X} = +\infty$;*

c) *pseudomonotoniczny, jeżeli dla każdego ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, spełniającego warunki $u_n \rightharpoonup u$ oraz $\limsup_{n \to \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} \leq 0$ zachodzi warunek $\langle Au, u - v \rangle_{X^* \times X} \leq \liminf_{n \to \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle_{X^* \times X}$ dla każdego $v \in X$.*

Spośród warunków wprowadzonych w Definicji 1 na szczególną uwagę zasługuje ostatni z nich, czyli pseudomonotoniczność operatora A. Aby zrozumieć jego sens warto przytoczyć pochodzące od Brézis'a twierdzenie (por. [22], Theorem 27.A) dotyczące istnienia rozwiązania równania operatorowego

$$Au = b. \tag{2}$$

TWIERDZENIE 2 *Niech X będzie rzeczywistą, ośrodkową, refleksywną przestrzenią Banacha i niech $A\colon X \to X^*$ będzie operatorem pseudomonotonicznym, ograniczonym i koercytywnym. Wówczas dla dowolnego $b \in X^*$ równanie (2) ma co najmniej jedno rozwiązanie.*

Mimo iż Twierdzenie 2 nie jest bezpośrednio wykorzystane w prezentowanym przeze mnie cyklu publikacji, chciałbym przytoczyć szkic jego dowodu, koncentrując się na fragmencie korzystającym z pseudomonotoniczności operatora A. Przedstawione tam rozumowanie tłumaczy bowiem istotę pseudomonotoniczności i pozwala lepiej zrozumieć technikę posługiwania się tą własnością w bardziej skomplikowanych przypadkach, np. gdy operator pseudomonotoniczny jest dodatkowo zależny od zmiennej czasowej, lub gdy oprócz niego w równaniu lub inkluzji występują inne operatory. Taka sytuacja ma bowiem miejsce w problemach badanych przeze mnie.

Szkic dowodu Twierdzenia 2. Dowód twierdzenia opiera się na galerkinowskiej aproksymacji równania (2). Mianowicie, dzięki ośrodkowości przestrzeni X istnieje ciąg jej skończenie wymiarowych podprzestrzeni $X_1, X_2, ... \subset X$ których suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbiorem gęstym w X. Rozważmy teraz ciąg równań

$$\langle Au_n, v\rangle_{X^*\times X} = \langle b, v\rangle_{X^*\times X} \quad \forall\, v \in X_n, \;\; n = 1, 2, ... \tag{3}$$

gdzie szukanym jest element $u_n \in X_n$. Ponieważ przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$, równanie (3) jest problemem skończenie wymiarowym, można wykazać istnienie jego rozwiązania w oparciu o twierdzenie Brouwera o punkcie stałym. Korzystając z koercytywności operatora A można udowodnić ograniczoność ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, a następnie, z refleksywności przestrzeni X, jego słabą zbieżność, przynajmniej dla podciągu, do pewnego elementu $u \in X$, a zatem można przyjąć

$$u_n \rightharpoonup u \text{ w } X. \tag{4}$$

Następnie, dzięki gęstości zbioru $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ w X można pokazać, że

$$Au_n \rightharpoonup b \text{ w } X^*. \tag{5}$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned}&\langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*\times X} = \langle Au_n - b, u_n\rangle_{X^*\times X} + \langle b, u_n - u\rangle_{X^*\times X}\\ &+ \langle b - Au_n, u\rangle_{X^*\times X}\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Korzystając po kolei z (3)-(5) otrzymujemy odpowiednio $\langle Au_n - b, u_n\rangle_{X^*\times X} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \langle b, u_n - u\rangle_{X^*\times X} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} \langle b - Au_n, u\rangle_{X^*\times X} = 0$, a zatem, wracając do (6), mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*\times X} \leq 0. \tag{7}$$

Wykażemy teraz, że u jest rozwiązaniem równania (2), czyli spełnia warunek

$$\langle Au - b, w \rangle_{X^* \times X} = 0 \quad \forall w \in X,$$

lub równoważny mu warunek

$$\langle Au - b, u - v \rangle_{X^* \times X} \leq 0 \quad \forall v \in X. \tag{8}$$

Najpierw, korzystając z (7) i (5), otrzymujemy dla dowolnego $v \in X$

$$\begin{aligned}
0 &\geq \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} \geq \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v + v - u \rangle_{X^* \times X} = \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle_{X^* \times X} \\
&+ \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, v - u \rangle_{X^* \times X} = \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle_{X^* \times X} \\
&+ \langle b, v - u \rangle_{X^* \times X} .
\end{aligned} \tag{9}$$

Zauważmy teraz, że gdyby spełniona była nierówność

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle_{X^* \times X} \geq \langle Au, u - v \rangle_{X^* \times X} . \tag{10}$$

moglibyśmy kontynuować oszacowanie (9) otrzymując ostatecznie

$$0 \geq \langle Au, u - v \rangle_{X^* \times X} + \langle b, v - u \rangle_{X^* \times X} = \langle Au - b, u - v \rangle_{X^* \times X} ,$$

czyli nierówność (8). Pozostaje pytanie, w jaki sposób możemy uzyskać brakującą nierówność (10). Odpowiedzi na nie dostarcza sama definicja operatora pseudomonotonicznego. Mówi ona dokładnie tyle, że z warunków (4) i (7), którymi już dysponujemy, wynika warunek (10), który jest nam w tym momencie potrzebny. Tak więc zakładając pseudomonotoniczność operatora A jesteśmy w stanie uzyskać warunek (8), który oznacza, że u jest rozwiązaniem (2), co kończy dowód. $\square$

UWAGA 3 *W sytuacji gdy zamiast pseudomonotoniczności operatora A zakładamy, że jest on monotoniczny i hemiciągły, nierówność (8) można uzyskać z warunków (4), (5) i (7) znacznie łatwiej (por. [22], str. 474). Można więc powiedzieć, że operator pseudomonotoniczny pozwala na uzyskanie takiego samego efektu jak operator monotoniczny w sytuacji, gdy ten ostatni jest dodatkowo hemiciągły. W tym sensie operatory pseudomonotoniczne stanowią uogólnienie operatorów monotonicznych. W szczególności każdy operatormonotoniczny i hemiciągły jest pseudomonotoniczny (por. [22], Proposition 27.6 (a)).*

Podsumowując, pseudomonotoniczność operatora jest własnością zdefiniowaną w taki sposób, aby umożliwić przejście graniczne z pewnego problemu przybliżonego (np. galerkinowskiego) do problemu właściwego. Jeszcze lepiej ilustruje to następujące twierdzenie (zob. Uwagi 8 i 10 i por. [17], Proposition 3.66)

TWIERDZENIE 4 *Operator $A \colon X \to X^*$ jest pseudomonotoniczny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ spełniającego warunki $u_n \rightharpoonup u$ oraz $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} \leq 0$ zachodzą warunki*

$$Au_n \rightharpoonup Au \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle_{X^* \times X} = 0.$$

Pseudomonotoniczność pozwala nam więc na uzyskanie słabej zbieżności $Au_n \rightharpoonup Au$ pod warunkiem, że zagwarantujemy warunki (4) i (7). Technikę taką stosuję wielokrotnie w omawianym przeze mnie cyklu prac. W tym miejscu wspomnę tylko, że w konkretnych problemach warunek (4) uzyskuje się pokazując ograniczoność ciągu u_n (oszacowanie a-priori) i korzystając z refleksywności przestrzeni, w której ten ciąg się znajduje. Najwięcej wysiłku wymaga natomiast sprawdzenie warunku (7).

Podstawowe informacje dotyczące klasy operatorów pseudomonotonicznych można znaleźć w [22] (por. Proposition 27.6 i 27.7).

Na zakończenie, zdefiniujemy własność operatora, która z warunków (4) i (7) pozwala uzyskać silną zbieżność $u_n \to u$.

Definicja 5 *Mówimy, że oprator* $A\colon X \to X^*$ *jest typu* $(S)_+$*, jeżeli dla każdego ciągu* $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$*, spełniającego warunki* $u_n \rightharpoonup u$ *oraz* $\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_{X^*\times X} \leq 0$ *zachodzi warunek* $u_n \to u$ *w* X*.*

2.1.2 Własności operatorów wielowartościowych

Podamy teraz definicje dotyczące własności operatora wielowartościowego $A\colon X \to 2^{X^*}$. Podobnie jak w Podrozdziale 2.1.1 ograniczymy się do tych własności, które mogą mieć znaczenia dla istnienia rozwiązania inkluzji (1).
Efektywną dziedziną operatora A nazywamy zbiór

$$D(A) = \{u \in X \mid Au \neq \emptyset\}.$$

Definicja 6 *Mówimy, że operator* $A\colon X \to 2^{X^*}$ *jest*

a) *ograniczony, jeżeli dla każdego zbioru ograniczonego* $B \subset X$*, zbiór* $\bigcup_{u\in B} Au$ *jest ograniczony w* X^**;*

b) *koercytywny, jeżeli albo jego dziedzina* $D(A)$ *jest ograniczona albo* $D(A)$ *jest nieograniczona i zachodzi warunek*

$$\lim_{\|u\|_X\to\infty, u\in D(A)} \frac{\inf\{\langle u^*, u\rangle_{X^*\times X} \mid u^* \in Au\}}{\|u\|_X} = +\infty.$$

Wprowadźmy teraz definicję wielowartościowego operatora pseudomonotonicznego.

Definicja 7 *Mówimy, że operator* $A\colon X \to 2^{X^*}$ *jest pseudomonotoniczny, jeżeli spełnia następujące warunki*

1) *Wartości operatora* A *są zbiorami niepustymi, słabo zwartymi i wypukłymi.*

2) A *jest górnie półciągłym operatorem z każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni przestrzeni* X *do przestrzeni* X^* *ze słabą topologią.*

3) *Dla każdego ciągu* $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ *i każdego* $v_n^* \in A(v_n)$*, jeżeli* $v_n \rightharpoonup v$ *i* $\limsup_{n\to\infty} \langle v_n^*, v_n - v\rangle_{X^*\times X} \leq 0$ *to dla każdego* $y \in X$ *istnieje* $u(y) \in A(v)$ *takie, że* $\langle u(y), v - y\rangle_{X^*\times X} \leq \liminf_{n\to\infty} \langle v_n^*, v_n - y\rangle_{X^*\times X}$.

Uwaga 8 *W niektórych źródłach (np. [17]) definicja operatora pseudomonotonicznego zawiera w sobie warunek ograniczoności operatora A, tzn. operator $A\colon X \to 2^{X^*}$ nazywany jest pseudomonotonicznym, jeżeli spełnia Definicję 7 i dodatkowo jest operatorem ograniczonym.*

Sprawdzenie warunków zawartych w Definicji 7 jest w praktyce skomplikowane. Dlatego podamy twierdzenie (por. [17], Proposition 3.58 (ii)), które nieco ułatwia sprawdzenie, że operator wielowartościowy jest pseudomonotoniczny w sytuacji, gdy jest on ograniczony i przestrzeń X jest refleksywna.

Twierdzenie 9 *Niech X będzie rzeczywistą, refleksywną przestrzenią Banacha i niech operator $A\colon X \to 2^{X^*}$ spełnia następujące warunki*

1) *Dla każdego $v \in X$ zbiór $A(v)$ jest niepusty, domknięty i wypukły.*

2) *A jest ograniczony.*

3) *Jeżeli $v_n \rightharpoonup v$ w X, $v_n^* \rightharpoonup v^*$ w X^*, $v_n^* \in A(v_n)$ oraz $\limsup_{n\to\infty} \langle v_n^*, v_n - v\rangle_{X^*\times X} \le 0$, to $v^* \in A(v)$ i $\langle v_n^*, v_n\rangle_{X^*\times X} \to \langle v^*, v\rangle_{X^*\times X}$.*

Wtedy operator A jest pseudomonotoniczny.

Uwaga 10 *Każdy operator jednowartościowy $A\colon X \to X^*$ można utożsamić z operatorem wielowartościowym zastępując jego wartość Au zbiorem jednoelementowym $\{Au\}$. Wówczas definicje ograniczoności, koercytywności i pseudomonotoniczności zastosowane do operatora A w wersji jednowartościowej (Definicja 1) są równoważne ich odpowiednikom wielowartościowym (Definicje 6 i 7).*

Twierdzenie 2 pokazuje, że ograniczoność, koercytywność i pseudomonotoniczność operatora jednowartościowego $A\colon X \to X^*$ mają kluczowe znaczenie dla istnienia rozwiązania równania (2). Okazuje się, że analogiczne własności operatora wielowartościowego $A\colon X \to 2^{X^*}$ decydują o istnieniu rozwiązania następującej inkluzji

$$Au \ni b, \tag{11}$$

w której dany jest element $b \in X^*$, a szukanym jest element $u \in X$. Mówi o tym następujące twierdzenie (por. Uwaga 8 i [17], Theorem 3.61).

Twierdzenie 11 *Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha i niech operator $A\colon X \to 2^{X^*}$ będzie ograniczony, koercytywny i pseudomonotoniczny. Wówczas dla każdego $b \in X^*$ inkluzja (11) ma co najmniej jedno rozwiązanie.*

Wniosek 12 *Przy założeniach Twierdzenia 11 A jest operatorem surjektywnym, tzn. $R(A) = X^*$, gdzie $R(A) := \bigcup_{u\in X} Au$ oznacza zakres operatora A.*

Wprowadzimy teraz definicję wielowartościowego operatora monotonicznego i maksymalnie monotonicznego oraz podamy twierdzenie (por. [14], Theorem 2.2.) dotyczące surjektywności operatora będącego pseudomonotoniczną perturbacją operatora maksymalnie monotonicznego.

Definicja 13 *Mówimy, że operator* $A\colon X \to 2^{X^*}$ *jest*

a) monotoniczny, jeżeli dla dowolnych $u, v \in X$, $u^* \in Au$, $v^* \in Av$ *zachodzi warunek*
$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle_{X^* \times X} \geq 0;$$

b) maksymalnie monotoniczny, jeżeli jest monotoniczny oraz dla dowolnych $u \in X$, $u^* \in X^*$ *spełniony jest następujący warunek: jeżeli*
$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle_{X^* \times X} \geq 0 \quad \forall\, v \in X, v^* \in Av,$$
to $u^* \in Au$.

Twierdzenie 14 *Niech* X *będzie rzeczywistą, refleksywną przestrzenią Banacha. Niech* $F\colon D(F) \subset X \to 2^{X^*}$ *będzie operatorem maksymalnie monotonicznym,* $G : D(G) = X \to 2^{X^*}$ *operatorem pseudomonotonicznym i niech* $L \in X^*$. *Jeżeli istnieją* $u_0 \in X$ *i* $R \geq \|u_0\|_X$, *takie, że* $D(F) \cap B_R(0_X) \neq \emptyset$ *i*
$$\langle \xi + \eta - L, u - u_0\rangle_{X^* \times X} > 0,$$
dla wszystkich $u \in D(F)$ *spełniających warunek* $\|u\|_X = R$ *i dla wszystkich* $\xi \in F(u)$, $\eta \in G(u)$, *to istnieje co najmniej jeden element* $u \in D(F)$ *taki, że*
$$F(u) + G(u) \ni L.$$

Symbol 0_X w Twierdzeniu 14 oznacza element zerowy przestrzeni X, a symbol $B_R(0_X)$ kulę o środku w 0_X i promieniu R.

Ostatnie dwa twierdzenia pokazują, jak ważną rolę pełni pseudomonotoniczność w rozwiązywaniu inkluzji. Dlatego w dalszym ciągu interesować nas będą warunki wystarczające na to, aby używany przez nas operator tę własność posiadał. Zaczniemy od dwóch twierdzeń z których wynika, że klasa operatorów pseudomonotonicznych jest zamknięta ze względu na dodawanie (por. [17], Proposition 3.59 (ii)) oraz na składanie z transformacją afiniczną (por. [A1], Proposition 5.7).

Twierdzenie 15 *Jeżeli operatory* $A, B\colon X \to 2^{X^*}$ *są pseudomonotoniczne, to operator* $A + B\colon X \to 2^{X^*}$ *określony wzorem* $(A+B)u = Au + Bu$ *dla każdego* $u \in X$ *jest pseudomonotoniczny.*

Twierdzenie 16 *Niech* X *będzie refleksywną przestrzenią Banacha i niech* $A\colon X \to 2^{X^*}$ *będzie operatorem pseudomonotonicznym. Wtedy dla danych* $v_0 \in X$ *i* $\lambda > 0$ *operator* $\tilde{A}\colon X \to 2^{X^*}$ *zdefiniowany jako* $\tilde{A}(v) = A(v_0 + \lambda v)$ *dla każdego* $v \in X$ *jest również operatorem pseudomonotonicznym.*

2.1.3 Nierówności wariacyjne i hemiwariacyjne

Podamy teraz klasyczną definicję subróżniczki funkcji wypukłej oraz, będące jej uogólnieniem, pojęcie subróżniczki w sensie Clarke'a funkcji lokalnie lipszycowskiej.

DEFINICJA 17 *Niech* $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *będzie funkcją wypukłą. Subróżniczką funkcji* φ *w punkcie* $x \in X$ *nazywamy zbiór* $\partial\varphi(x) \subset X^*$ *określony jako*

$$\partial\varphi(x) = \{\eta \in X^* \mid \langle \eta, v - x\rangle_{X^* \times X} \leq \varphi(v) - \varphi(x) \quad \forall\, v \in X\}.$$

WNIOSEK 18 *Bezpośrednio z Definicji 17 wynika, że operator wielowartościowy określony jako* $\partial\varphi\colon X \ni u \to \partial\varphi(u) \in 2^{X^*}$ *jest monotoniczny.*

DEFINICJA 19 *Niech* $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją lokalnie lipszycowską. Uogólnioną pochodną kierunkową w sensie Clarke'a funkcji* φ *w punkcie* $x \in X$ *w kierunku* $v \in X$ *nazywamy wielkość*

$$\varphi^0(x; v) = \limsup_{y \to x, \lambda \downarrow 0} \frac{\varphi(y + \lambda v) - \varphi(y)}{\lambda}.$$

DEFINICJA 20 *Subróżniczką w sensie Clarke'a lokalnie lipszycowskiej funkcji* $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ *w punkcie* x *nazywamy zbiór* $\partial_{Cl}\varphi(x) \subset X^*$ *określony jako*

$$\partial_{Cl}\varphi(x) = \{\, \xi \in X^* \mid \varphi^0(x; v) \geq \langle \xi, v\rangle_{X^* \times X} \quad \forall\, v \in X\,\}.$$

Podamy teraz najważniejsze własności subróżniczki Clarke'a (por. [17], Proposition 3.23 (iv)-(vi)).

TWIERDZENIE 21 *Niech* $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją lokalnie lipszycowską. Wtedy*

a) *Dla każdego* $x \in X$*, subróżniczka* $\varphi_{Cl}(x)$ *jest niepustym, wypukłym i słabo* zwartym podzbiorem* X^**.*

b) *Odwzorowanie wielowartościowe* $\partial_{Cl}\varphi\colon X \ni x \to \partial_{Cl}\varphi(x) \in 2^{X^*}$ *ma wykres domknięty w topologii* $X \times (\omega^*\text{-}X^*)$*, tj. jeżeli* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ *i* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ *są ciągami takimi, że* $x_n \to x$ *w* X*,* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *w* X^* *oraz* $\xi_n \in \partial_{Cl}\varphi(x_n)$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$*, wtedy* $\xi \in \partial_{Cl}\varphi(x)$*.*

c) *Odwzorowanie wielowartościowe* $\partial_{Cl}\varphi\colon X \ni x \to \partial_{Cl}\varphi(x) \in 2^{X^*}$ *jest górnie półciągłe w topologii* $X \times (\omega^*\text{-}X^*)$*.*

Związek między subróżniczkami wprowadzonymi odpowiednio w Definicjach 17 i 20 polega na tym, iż w przypadku skończonej funkcji φ, która jest zarówno wypukła jak i lokalnie lipszycowska, obie subróżniczki są sobie równe (por. [7], Proposition 5.6.18).
Należy podkreślić, iż dwie zaproponowane powyżej koncepcje subróżniczki leżą u podstaw dwóch różnych wariacyjnych sformułowań inkluzji różniczkowych, w których składnikiem wielowartościowym jest jedna z powyższych subróżniczek. Aby się o tym przekonać, rozważmy inkluzję

$$Au + Tu \ni f, \tag{12}$$

gdzie $A\colon X \to X^*$ jest danym operatorem, $T\colon X \to 2^{X^*}$ jest danym operatorem wielowartościowym oraz $f \in X^*$ jest danym elementem. Szukanym jest element $u \in X$ spełniający (12). Jeżeli T jest subróżniczką w sensie Definicji 17 pewnej funkcji wypukłej $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (zwanej także potencjałem), a zatem $Tu = \partial\varphi(u)$, wówczas łatwo zauważyć, że inkluzja (12) jest równoważna następującej *nierówności wariacyjnej*

$$\langle f - Au, v - u\rangle_{X^* \times X} \leq \varphi(v) - \varphi(u) \quad \forall\, v \in X. \tag{13}$$

Powyższe rozumowanie zawodzi jednak w przypadku, gdy operator wielowartościowy T nie jest monotoniczny. Oznacza to bowiem, że nie może on być subróżniczką w sensie Definicji 17 żadnej funkcji wypukłej (por. Wniosek 18). Nie wyklucza to jednak sytuacji, w której T jest subróżniczką w sensie Clarke'a pewnej funkcji lokalnie lipszycowskiej $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, tzn. $Tu = \partial_{Cl}\varphi(u)$. Wówczas inkluzja (12) jest równoważna następującej nierówności

$$\langle f - Au, v - u\rangle_{X^* \times X} \leq \varphi^0(u; v - u) \quad \forall\, v \in X. \tag{14}$$

Nierówność (14) nazywana jest *nierównością hemiwariacyjną* i stanowi uogólnienie nierówności wariacyjnej (13) na przypadek z niewypukłym potencjałem φ. Rozważmy wreszcie przypadek, w którym operator T jest sumą dwóch różnych typów subróżniczek, mianowicie $Tu = \partial\psi(u) + \partial_{Cl}\varphi(u)$, gdzie $\psi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest funkcją wypukłą a $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ funkcją lokalnie lipszycowską. Wówczas inkluzja (12) jest równoważna następującej nierówności

$$\begin{cases} \langle f - Au - \eta, v - u\rangle_{X^* \times X} \leq \psi(v) - \psi(u) \quad \forall\, v \in X, \\ \eta \in \partial_{Cl}\varphi(u). \end{cases} \tag{15}$$

Korzystając z Definicji 20 łatwo zauważyć, że każde rozwiązanie Problemu (15) jest również rozwiązaniem nierówności

$$\langle f - Au, v - u\rangle_{X^* \times X} \leq \psi(v) - \psi(u) + \varphi^0(u; v - u) \quad \forall\, v \in X. \tag{16}$$

Uwaga 22 *Ze względu na swoje podobieństwo do nierówności wariacyjnej (13) jak również do nierówności hemiwariacyjnej (14) Problem (16) nazywany jest nierównością wariacyjno-hemiwariacyjną. Określenie to jest również używane w odniesieniu do bardziej ogólnego Problemu (15).*

Na podstawie powyższych rozważań można spodziewać się, że nierówności hemiwariacyjne dobrze „nadają się" do opisu problemów wielowartościowych zawierających pewien składnik niemonotoniczny, podczas gdy nierówności wariacyjne zarezerwowane są do opisu problemów monotonicznych. W pracach wchodzących w skład omawianego przeze mnie cyklu, nierówności typu (13)-(16), lub ogólniej inkluzje typu (12) używane są do opisu zjawisk kontaktowych mechaniki. W tym przypadku monotoniczność lub jej brak, o których mowa powyżej, jest konsekwencją zastosowania monotonicznego lub niemonotonicznego prawa kontaktowego w rozważanym modelu mechanicznym. Przykładem mogą tu być różne wersje prawa tarcia, które opiszę bardziej szczegółowo w Podrozdziale 2.3.2.

Twierdzenia 11 i 14 można stosować w odniesieniu do inkluzji, w których składnik wielowartościowy pochodzi od jednej z omawianych wyżej subróżniczek. Aby się o tym przekonać podamy ich pewne własności. Zacznijmy od twierdzenia będącego uogólnieniem Wniosku 18.

TWIERDZENIE 23 *(Rockafeller (1966), por. [22], str. 845) Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha i niech $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ będzie funkcją wypukłą, właściwą i dolnie półciągłą. Wtedy operator $\partial\varphi\colon X \ni u \to \partial\varphi(u) \in 2^{X^*}$ jest operatorem maksymalnie monotonicznym.*

Następne twierdzenie dotyczy pseudomonotoniczności pewnego operatora wielowartościowego pochodzącego od subróżniczki Clarke'a (por. [A1], Proposition 5.6).

TWIERDZENIE 24 *Niech X i U będą refleksywnymi przestrzeniami Banacha, $\iota\colon X \to U$ operatorem liniowym, ciągłym i zwartym, a $\iota^*\colon U^* \to X^*$ operatorem sprzężonym do ι. Niech $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją lokalnie lipszycowską taką, że operator $\partial_{Cl}\varphi\colon X \ni u \to \partial_{Cl}\varphi(u) \in 2^{X^*}$ jest ograniczony. Wtedy operator $M\colon X \to X^*$ określony wzorem*

$$Mu = \iota^*\partial_{Cl}\varphi(\iota u) \quad \forall\, u \in X$$

jest pseudomonotoniczny.

Na koniec wróćmy do Problemu $(P)_S$ wprowadzonego na początku Podrozdziału 2.1. Omówione powyżej rezultaty pozwalają już na sformułowanie wniosków dotyczących możliwych metod wykazania istnienia rozwiązania tego problemu w pewnych szczególnych przypadkach. Nie są to precyzyjne twierdzenia, gdyż te wymagałyby sprecyzowania założeń dotyczących operatora A i funkcji φ, lecz raczej ogólne wskazówki mające na celu nakreślenie metod dowodowych.

WNIOSEK 25 *Załóżmy, że operator A w inkluzji (1) jest pseudomonotoniczny. Wtedy istnienie rozwiązania inkluzji (1) można wykazać w oparciu o Twierdzenie 11, przy czym kluczowe jego założenie, którym jest pseudomonotoniczność lewej strony inkluzji, jest konsekwencją Twierdzeń 15 i 24.*

WNIOSEK 26 *Załóżmy, że operator A w inkluzji (1) ma postać sumy $A = F + G_1$, gdzie F jest subróżniczką określoną w Definicji 17 pewnej funkcji wypukłej, właściwej i dolnie półciągłej, a G_1 jest operatorem pseudomonotonicznym. Wtedy istnienie rozwiązania inkluzji (1) można wykazać w oparciu o Twierdzenie 14 określając występujący w nim operator G jako $Gu = G_1u + \iota^*\partial_{Cl}\varphi(\iota u)$. Pseudomonotoniczność operatora G jest wtedy konsekwencją Twierdzeń 15 i 24, a maksymalna monotoniczność operatora F wynika z Twierdzenia 23.*

2.2 Ewolucyjne inkluzje typu Clarke'a

Materiał prezentowany w Podrozdziale 2.1 dotyczy inkluzji stacjonarnych, a więc takich, w których szukany element $u \in X$ nie zależy od zmiennej czasowej. Tymczasem w pracach [A1]-[A10] omawiane są inkluzje ewolucyjne, w których szukanym elementem jest funkcja czasu $u\colon [0,T] \to X$. Niemniej jednak rezultaty opisane w Podrozdziale 2.1 mają zastosowanie również w badaniu inkluzji ewolucyjnych. Wynika to ze specyfiki metody dyskretyzacji czasowej używanej w analizie inkluzji ewolucyjnych w pracach [A1]-[A6]. Opiera się ona na podziale odcinka $[0,T]$ na skończoną liczbę podprzedziałów i na rozwiązaniu, przy każdym ustalonym kroku czasowym, pomocniczej inkluzji stacjonarnej typu (1). Korzystamy przy tym z Twierdzeń 11 lub 14, co tłumaczy konieczność ich wprowadzenia w poprzedniej części referatu oraz uzasadnia sformułowanie Wniosków 25 i 26. Z drugiej strony, z uwagi na wspomniany wyżej ewolucyjny charakter badanych zagadnień, potrzebne będzie teraz wprowadzenie terminologii i przytoczenie rezultatów dotyczących funkcji zmiennej czasowej o wartościach w przestrzeni Banacha.

Niech $1 \le p \le \infty$ i niech $L^p(0,T;X)$ oznacza klasyczną przestrzeń Bochnera. Przypomnimy teraz pojęcie uogólnionej pochodnej czasowej (pochodnej w sensie dystrybucyjnym) (por. [21], Definicja 23.15)

Definicja 27 *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha takimi, że $X \subset Y$. Mówimy, że funkcja $w \in L^1(0,T;Y)$ jest n-tą pochodną dystrybucyjną funkcji $u \in L^1(0,T;X)$ i piszemy*

$$w = u^{(n)}, \tag{17}$$

jeżeli

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)\,dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)\,dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

W przypadku $n = 1$ lub $n = 2$ zamiast (17) piszemy odpowiednio $w = u'$ lub $w = u''$.

Uwaga 28 *Aby zachować zgodność oznaczeń z oryginalnymi pracami, oprócz oznaczeń u', u'' będę niekiedy używał symboli $\dot{u}$, $\ddot{u}$ albo u_t, u_{tt} na oznaczenie odpowiednio pierwszej i drugiej pochodnej czasowej funkcji u.*

Wprowadźmy teraz oznaczenia zgodne z tymi, których używam w swoich pracach do opisu problemów ewolucyjnych.

Niech V będzie rzeczywistą, refleksywną, ośrodkową przestrzenią Banacha, V^* przestrzenią do niej dualną, a H rzeczywistą, ośrodkową przestrzenią Hilberta. Identyfikując przestrzeń H z przestrzenią do niej dualną, rozważmy trójkę ewolucyjną $V \subset H \subset V^*$ ze wszystkimi włożeniami gęstymi, ciągłymi i zwartymi. Symbolem $(\cdot,\cdot)_H$ oznaczać będziemy iloczyn skalarny w H. Niech $i\colon V \to H$ oznacza odwzorowanie identycznościowe (dla $v \in V$ element $iv \in H$ będziemy dla uproszczenia oznaczali symbolem v pomijając symbol i). Dla $T > 0$ i $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, definiujemy przestrzenie $\mathcal{V} = L^p(0,T;V)$, $\mathcal{V}^* = L^q(0,T;V^*)$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ i $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} \mid v' \in \mathcal{V}^*\}$, gdzie v' oznacza pochodną czasową funkcji v w sensie dystrybucyjnym (por. Definicja 27). Dla powyższych przestrzeni używamy oznaczeń $\langle u,v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_{V^*\times V}\,dt$ dla $u,v \in \mathcal{V}$, $(u,v)_{\mathcal{H}} = \int_0^T (u(t),v(t))_H dt$ dla $u,v \in \mathcal{H}$. Rozważmy kolejną refleksywną przestrzeń Banacha U i oznaczmy $\mathcal{U} = L^p(0,T;U)$. W dalszym ciągu będziemy też oznaczać $\langle u,v\rangle_{\mathcal{U}^*\times\mathcal{U}} = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_{U^*\times U}\,dt$ dla $u,v \in \mathcal{U}$. Rozważmy też (podobnie jak w Twierdzeniu 24) liniowy, ciągły i zwarty operator $\iota\colon V \to U$ i oznaczmy przez $\iota^*\colon U^* \to V^*$ operator do niego sprzężony. Niech $\bar{\iota}\colon \mathcal{V} \ni v \to \bar{\iota}v \in \mathcal{U}$ i

$\bar{\iota}^* \colon \mathcal{U}^* \ni u \to \bar{\iota}^* u \in \mathcal{V}$ oznaczają operatory Niemyckiego odpowiadające operatorom ι i ι^* zdefiniowane odpowiednio $(\bar{\iota}v)(t) = \bar{\iota}v(t)$, $(\bar{\iota}^* u)(t) = \bar{\iota}^* u(t)$ dla każdego $v \in \mathcal{V}$, $u \in \mathcal{U}^*$, $t \in [0, T]$.

Rozważmy teraz przykładową ewolucyjną inkluzję typu Clarke'a badaną przeze mnie w pracy [A1]. Zachowując wprowadzone wcześniej oznaczenia przyjmujemy $p = q = 2$ i stawiamy następujący problem.

$$
(P)_E \quad \begin{cases} \text{Znaleźć } u \in \mathcal{V} \text{ takie, że } u' \in \mathcal{W} \text{ oraz} \\ u''(t) + Au'(t) + Bu(t) + \iota^* \partial_{Cl} J(\iota u(t)) \ni f(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T), \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \end{cases}
$$

gdzie $A, B \colon V \to V^*$ są danymi operatorami, a $f \colon [0, T] \to V^*$ i $J \colon U \to \mathbb{R}$ są danymi funkcjami.

W pracy [A1] badana jest też alternatywna wersja Problemu $(P)_E$ w sytuacji, gdy wyrażenie $\partial_{Cl} J$ zależy od pochodnej szukanej funkcji, tzn. zamiast $\iota^* \partial_{Cl} J(\iota u(t))$ występuje $\iota^* \partial_{Cl} J(\iota u'(t))$. Problem taki oznaczać będziemy symbolem $(P')_E$. W dalszej części tego podrozdziału przytoczę najważniejsze rezultaty wykorzystywane przeze mnie w analizie ewolucyjnych inkluzji typu Clarke'a podobnych do Problemów $(P)_E$ i $(P')_E$. Zwrócę też uwagę na główne problemy z jakimi można się spotkać badając tego typu zagadnienia.
Zacznę od podania dwóch ważnych rezultatów. Pierwszy z nich to Lemat Ehrlinga (por. [8], Lemmat 8.4.12), drugi to twierdzenie Lionsa-Aubina (por. [8], Theorem 8.4.13).

Lemat 29 *Niech V_0, V, V_1 będą przestrzeniami Banacha, takimi, że $V_0 \subset V \subset V_1$, przy czym włożenie $V_0 \subset V$ jest zwarte, a włożenie $V \subset V_1$ jest ciągłe. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $c(\varepsilon) > 0$, takie, że dla każdego $u \in V_0$ zachodzi*

$$
\|u\|_V \leq \varepsilon \|u\|_{V_0} + c(\varepsilon) \|u\|_{V_1}.
$$

Uwaga 30 *Znaczenie Lematu 29 w tym miejscu jest podwójne. Po pierwsze korzysta się z niego w dowodzie Twierdzenia 31 poniżej. Po drugie jest on bezpośrednio wykorzystywany w omawianym przeze mnie cyklu artykułów do niektórych oszacowań a-priori.*

Twierdzenie 31 *Jeżeli zachodzą założenia Lematu 29 i dodatkowo V_0 i V_1 są refleksywne, to dla wszystkich $1 < p, r < \infty$ włożenie*

$$
\{u \in L^p(0, T; V_0) \mid u' \in L^r(0, T; V_1)\} \subset L^p(0, T; V)
$$

jest zwarte.

Wniosek 32 *Teza Twierdzenia 31 oznacza, że z każdego ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ograniczonego w $L^p(0, T; V_0)$, którego ciąg pochodnych $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ jest ograniczony w $L^r(0, T; V_1)$, można wybrać podciąg $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ silnie zbieżny w $L^p(0, T; V)$.*

Powyższy wniosek pozwala nam uzyskać silną zbieżność - przynajmniej dla podciągu - pewnego ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(0,T;V_0)$, jeżeli tylko uda nam się uzyskać odpowiednie oszacowania a-priori na sam ciąg, jak i na jego pochodne. Problem pojawia się jednak, gdy mamy do czynienia z ciągiem funkcji kawałkami stałych w czasie (funkcji schodkowych) - a taka sytuacja ma miejsce gdy stosujemy metodę dyskretyzacji czasowej dla inkluzji ewolucyjnych. Funkcja kawałkami stała nie ma bowiem odpowiednio regularnej pochodnej czasowej (jej pochodna dystrybucyjna jest kombinacją delt Diraca). Aby więc uzyskać silną zbieżność takiego ciągu (ewentualnie jego podciągu) Twierdzenie 31 jest niewystarczające i musimy skorzystać z innego podejścia. Aby je omówić potrzebna nam będzie przestrzeń $BV(0,T;X)$ funkcji o wahaniu ograniczonym na odcinku $[0,T]$, którą zdefiniuję poniżej.
Niech π oznacza dowolny skończony podział odcinka $[0,T]$ na sumę skończonych, rozłącznych podprzedziałów $\{\sigma_i = (a_i, b_i)\}$ takich, że $[0,T] = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{\sigma}_i$. Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich takich podziałów. Wtedy dla dowolnej funkcji $x\colon [0,T] \to X$ i dla $1 \le r < \infty$, definiujemy seminormę

$$\|x\|_{BV^r(0,T;X)}^r = \sup_{\pi \in \mathcal{F}} \left\{ \sum_{\sigma_i \in \pi} \|x(b_i) - x(a_i)\|_X^r \right\}$$

i przestrzeń

$$BV^r(0,T;X) = \{x\colon [0,T] \to X \mid \|x\|_{BV^r(0,T;X)} < \infty\}.$$

Dla $1 \le p \le \infty$, $1 \le r < \infty$ oraz przestrzeni Banacha X, Y takich, że $X \subset Y$, wprowadźmy przestrzeń wektorową

$$M^{p,r}(0,T;X,Y) = L^p(0,T;X) \cap BV^r(0,T;Y).$$

Wtedy $M^{p,r}(0,T;X,Y)$ jest również przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_{M^{p,r}(0,T;X,Y)} = \|\cdot\|_{L^p(0,T;X)} + \|\cdot\|_{BV^r(0,T;Y)}$.

Podamy teraz twierdzenie będące uogólnieniem Twierdzenia 31 na przypadek funkcji o wahaniu skończonym. Pochodzi ono z pracy [12].

Twierdzenie 33 *Jeżeli zachodzą założenia Twierdzenia 31, to dla każdego* $1 < p, r < \infty$ *włożenie*

$$M^{p,r}(0,T;V_0,V_1) \subset L^p(0,T;V)$$

jest zwarte.

Wniosek 34 *Teza Twierdzenia 33 oznacza, że z każdego ciągu* $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ograniczonego w* $L^p(0,T;V_0)$ *i mającego ograniczone wahanie (seminormę* $BV^r(0,T;V_1)$*), można wybrać podciąg* $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *silnie zbieżny w* $L^p(0,T;V)$*. Twierdzenie można zatem stosować do funkcji nie posiadających całkowalnej pochodnej czasowej, które nie muszą być nawet ciągłe. W szczególności mogą to być funkcje kawałkami stałe.*

W dalszej części referatu przytoczę rezultaty, dzięki którym możliwe jest przejście graniczne w inkluzjach ewolucyjnych. Dotyczy to sytuacji, gdy mamy dany pewien ciąg rozwiązań inkluzji przybliżonych, o którym wiemy, że jest on w jakimś sensie zbieżny do pewnego elementu granicznego. Przez przejście graniczne rozumiemy wykazanie, że ów element graniczny jest w istocie rozwiązaniem inkluzji wyjściowej. W praktyce przejście graniczne od inkluzji przybliżonej do inkluzji wyjściowej musimy wykonać w odniesieniu do każdego z jej składników osobno, używając do tego technik o różnym stopniu trudności. W inkluzjach badanych przeze mnie najwięcej trudności z przejściem granicznym wynika z obecności następujących składników:

1. operatora pseudomonotonicznego,
2. składnika wielowartościowego pochodzącego od subróżniczki Clarke'a.

W związku z tym omówię te dwa problemy bardziej szczegółowo.
W odniesieniu do operatora pseudomonotonicznego można powiedzieć, że już sama jego definicja przewiduje możliwość wykonania odpowiedniego przejścia granicznego, o czym świadczy szkic dowodu Twierdzenia 2 oraz komentarz tuż po nim. Jeśli chodzi natomiast o przejście graniczne w subróżniczce Clarke'a, to decydujące znaczenie ma tutaj własność, o której mowa w pkt. b) Twierdzenia 21. Chodzi mianowicie o fakt, że z inkluzji $\xi_n \in \partial_{Cl}\varphi(x_n)$ jesteśmy w stanie uzyskać inkluzję graniczną $\xi \in \partial_{Cl}\varphi(x)$ pod warunkiem, że zagwarantujemy słabą zbieżność ciągu ξ_n do ξ i silną zbieżność ciągu x_n do x. Problem pojawia się, gdy mamy do czynienia z inkluzją ewolucyjną, w której zarówno szukana funkcja, jak i występujące w niej operatory zależą od zmiennej czasowej. Sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej, gdy w wyniku zastosowania metody dyskretyzacji czasowej, otrzymujemy jako rozwiązania inkluzji przybliżonych, ciąg funkcji kawałkami stałych. Pojawia się wtedy problem, o którym była już mowa wcześniej, a mianowicie brak regularności ich dystrybucyjnych pochodnych czasowych. Jednak i w tym przypadku pomocne okazuje się wykorzystanie przestrzeni $M^{p,r}(0,T;X,Y)$. Pozostaje jeszcze wskazać odpowiednie narzędzia, które pozwoliłyby nam rozstrzygnąć następujące kwestie:

(∗) Uzyskanie odpowiedniej wersji pseudomonotoniczności dla operatora, który pochodzi od pewnego prostszego opertora pseudomonotonicznego działającego na przestrzeni X, lecz sam działa na przestrzeni typu $M^{p,r}(0,T;X,Y)$.

(∗∗) Uzyskanie przejścia granicznego analogicznego do pkt. b) Twierdzenia 21 w przypadku gdy zmienne x_n i ξ_n są kawałkami stałymi funkcjami zmiennej czasowej.

W dalszej części przytoczę odpowiednie twierdzenia odnoszące się do powyższych punktów. Aby odnieść się do konkretnej sytuacji, weźmy pod uwagę operator A występujący przykładowo w inkluzji $(P)_E$ i przyjmijmy założenia takie jak w pracy [A1].

$H(A)$: Operator $A : [0,T] \times V \to V^*$ spełnia następujące warunki

(i) $A(\cdot, v)$ jest mierzalny na $[0,T]$ dla każdego $v \in V$.

(ii) $A(t, \cdot)$ jest pseudomonotoniczny dla p.w. $t \in (0,T)$.

(iii) $\langle A(t,v),v\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha\|v\|_V^p - \beta\|v\|_H^2$ dla p.w. $t \in (0,T)$, dla każdego $v \in V$, gdzie $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$.

(iv) $\|A(t,v)\|_{V^*}^q \leq c_A(1 + \|v\|_V^p)$ dla p.w. $t \in (0,T)$, dla każdego $v \in V$, gdzie $c_A > 0$.

Niech $\mathcal{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ będzie operatorem Niemyckiego odpowiadającym operatorowi A zdefiniowanym jako $(\mathcal{A}v)(t) = A(t, v(t))$ dla każdego $v \in \mathcal{V}$, $t \in [0,T]$. Podamy teraz dwa lematy, z których pierwszy zapewnia odpowiednią wersję pseudomonotoniczności operatora $\mathcal{A}$, drugi zaś odpowiednią wersję własności $(S)_+$ operatora $\mathcal{A}$.

Lemma 35 *Niech operator A spełnia założenia $H(A)$ i niech ciąg $\{v_n\} \subset \mathcal{V}$ spełnia warunki: $\{v_n\}$ jest ograniczony w $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$, $v_n \rightharpoonup v$ w $\mathcal{V}$ oraz* $\limsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}v_n, v_n - v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \leq 0$. *Wtedy $\mathcal{A}v_n \rightharpoonup \mathcal{A}v$ w $\mathcal{V}^*$.*

Lemma 36 *Niech operator A spełnia założenia $H(A)$ oraz niech $A(t,\cdot)$ będzie typu $(S)_+$ dla p.w. $t \in (0,T)$. Niech ciąg $\{v_n\} \subset \mathcal{V}$ spełnia następujące warunki: $\{v_n\}$ jest ograniczony w $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$, $v_n \rightharpoonup v$ w $\mathcal{V}$ i* $\limsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}v_n, v_n - v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \leq 0$. *Wtedy $v_n \to v$ w $\mathcal{V}^*$.*

Lematy 35 i 36 pochodzą z pracy [13].

Wniosek 37 *Lemat 35 rozstrzyga kwestię sformułowaną w punkcie $(*)$ powyżej. Pokazuje on bowiem, w jaki sposób można przejść do słabej granicy z wyrażeniem $\mathcal{A}v_n$ pochodzącym od pewnego operatora pseudomonotonicznego A. Aby ten efekt uzyskać, należy, zgodnie z założeniami lematu, zagwarantować ograniczoność ciągu $\{v_n\}$ w przestrzeni $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$, słabą zbieżność v_n do elementu v oraz sprawdzić warunek* $\limsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}v_n, v_n - v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \leq 0$. *Zagwarantowanie pierwszego z tych warunków polega na wyprowadzeniu odpowiednich oszacowań a-priori. Drugi jest konsekwencją refleksywności przestrzeni $\mathcal{V}$, natomiast sprawdzenie ostatniego warunku w praktyce skupia na sobie najwięcej wysiłku, gdyż wymaga skorzystania z własności granicznych wszystkich pozostałych składników występujących w inkluzji oprócz operatora A.*

Zajmijmy się teraz wyrażeniem wielowartościowym pochodzącym od subróżniczki Clarke'a, które występuje w badanych przeze mnie inkluzjach ewolucyjnych, między innymi w Problemie $(P)_E$. Typowy problem polega na przejściu do granicy w następującej inkluzji

$$\xi_n(t) \in \iota^* \partial_{Cl} J(\iota u_n(t)) \text{ dla p.w. } t \in (0,T), \tag{18}$$

gdzie $J\colon U \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją lokalnie lipszycowską. Inkluzja (18) oznacza, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla p.w. $t \in (0,T)$ istnieje element $\eta_n(t)$, taki, że $\xi_n(t) = \iota^*\eta_n(t)$ oraz

$$\eta_n(t) \in \partial_{Cl} J(\iota u_n(t)) \text{ dla p.w. } t \in (0,T). \tag{19}$$

Możemy zatem skupić się na wykonaniu przejścia granicznego tylko w ostatniej inkluzji. O tym, czy jest ono możliwe, decyduje oczywiście rodzaj zbieżności funkcji

η_n i u_n do odpowiednich elementów granicznych η i u. Na początek zauważmy, że gdybyśmy dysponowali słabą zbieżnością punktową η_n do η i słabą zbieżnością punktową u_n do u dla p.w. $t \in (0,T)$, to biorąc pod uwagę zwartość operatora ι i wynikającą z niej silną zbieżność punktową ιu_n do ιu dla p.w. $t \in (0,T)$, moglibyśmy wykonać przejście graniczne w (19) punktowo dla p.w. $t \in (0,T)$ korzystając z Twierdzenia 21 b). Niestety w badanych przeze mnie problemach jesteśmy w stanie uzyskać tylko następujące zbieżności

$$u_n \rightharpoonup u \text{ w } \mathcal{V}, \tag{20}$$

$$\eta_n \rightharpoonup \eta \text{ w } \mathcal{U}^*, \tag{21}$$

oraz oszacowanie a-priori

$$\|u_n\|_{M^{p,q}(0,T;V,V^*)} \le c, \tag{22}$$

ze stałą $c > 0$ niezależną od n, co jednak nie gwarantuje potrzebnych zbieżności punktowych. Z pomocą może nam jednak przyjść następujące twierdzenie Aubina-Celliny (por. [2]).

Twierdzenie 38 *Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha i niech $F\colon X \to 2^Y$ będzie multifunkcją (odwzorowaniem wielowartościowym) spełniającą następujące warunki*

(a) *wartości funkcji F są zbiorami niepustymi, domkniętymi i wypukłymi;*

(b) *funkcja F jest górnie półciągła w topologii $X \times (\omega$ - $Y)$.*

Niech $x_n\colon (0,T) \to X$, $y_n\colon (0,T) \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami mierzalnymi takimi, że ciąg x_n jest zbieżny punktowo dla p.w. $t \in (0,T)$ do funkcji $x\colon (0,T) \to X$, a ciąg y_n jest zbieżny słabo w $L^1(0,T;Y)$ do funkcji $y\colon (0,T) \to Y$. Jeżeli $y_n(t) \in F(x_n(t))$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i dla p.w. $t \in (0,T)$, wtedy $y(t) \in F(x(t))$ dla p.w. $t \in (0,T)$.

Z Twierdzenia 21 oraz z ciągłości operatora ι łatwo można wywnioskować, że multifunkcja $\partial_{Cl} J(\iota(\cdot))\colon V \ni u \to \partial_{Cl} J(\iota u) \in 2^{U^*}$ spełnia założenia (a) i (b) Twierdzenia 38. Poza tym z (21) wynika, że założenia tego twierdzenia dotyczące funkcji η_n, $n \in \mathbb{N}$ oraz η są również spełnione. Aby więc można było zastosować ostatnie twierdzenie do inkluzji (19) wystarczy zagwarantować zbieżność

$$\iota u_n(t) \to \iota u(t) \text{ w } U \text{ dla p.w. } t \in (0,T). \tag{23}$$

W tym celu przyjmiemy następujące założenie

$H(\iota)$. Operator $\iota\colon V \to U$ jest liniowy, ciągły i zwarty. Poza tym istnieje przestrzeń Banacha Z taka, że $V \subset Z \subset H$, przy czym włożenie $V \subset Z$ jest zwarte, a włożenie $Z \subset H$ jest ciągłe, natomiast operator ι daje się przedstawić jako $\iota = \iota_2 \circ \iota_1$, gdzie $\iota_1\colon V \to Z$ oznacza (zwarty) operator włożenia, zaś $\iota_2 \in \mathcal{L}(Z,U)$.

Podamy teraz prosty lemat.

Lemat 39 *Jeżeli operator ι spełnia warunek $H(\iota)$, to odpowiadający mu operator Niemyckiego $\bar{\iota}$ zdefiniowany jako $(\bar{\iota}v)(t) = \iota(v(t))$ dla każdego $v \in \mathcal{V}$, $t \in [0,T]$ spełnia warunek*

$H(\bar{\iota})$: operator $\bar{\iota}\colon M^{p,q}(0,T;V,V^*) \to \mathcal{U}$ jest zwarty.

Dowód. Niech $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem ograniczonym w $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$. Z założenia $H(\iota)$ wynika, że istnieje przestrzeń Z, taka, że $V \subset Z \subset V^*$, przy czym pierwsze włożenie jest zwarte, a drugie ciągłe. Wobec tego z Twierdzenia 33 wynika, że włożenie $M^{p,q}(0,T;V,V^*) \subset L^p(0,T;Z)$ jest zwarte. Oznacza to, że z ciągu $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ możemy wybrać podciąg (oznaczony dla uproszczenia nadal przez $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$) silnie zbieżny w $L^p(0,T;Z)$ do pewnego elementu z, czyli

$$\int_0^T \|\iota_1 v_n(t) - z(t)\|_Z^p dt \to 0 \text{ przy } n \to \infty. \tag{24}$$

Niech $u \in \mathcal{U}$ oznacza funkcję zdefiniowaną jako $u(t) = \iota_2 z(t)$ dla $t \in [0,T]$. Wtedy

$$\begin{aligned}\|\bar{\iota} v_n - u\|_{\mathcal{U}}^p &= \int_0^T \|\iota v_n(t) - u(t)\|_Z^p dt = \int_0^T \|\iota_2 \circ \iota_1 v_n(t) - \iota_2 z(t)\|_Z^p dt \\ &\leq \|\iota_2\|_{\mathcal{L}(Z,U)} \int_0^T \|\iota_1 v_n(t) - z(t)\|_Z^p dt. \end{aligned} \tag{25}$$

Z (24) i (25) wynika, że $\bar{\iota} v_n \to u$ w $\mathcal{U}$, co oznacza, że operator Niemyckiego $\bar{\iota}$ jest zwarty. $\square$

Zauważmy, że ze zbieżności (20), oszacowania (22) i warunku $H(\iota)$ wynika (na mocy Lematu 39), że (przynajmniej dla podciągu) zachodzi zbieżność $\bar{\iota} u_n \to \bar{\iota} u$ w $\mathcal{U}$, z której z kolei (znowu przynajmniej dla podciągu) wynika zbieżność (23). Nic zatem nie stoi na przeszkodzie, aby skorzystać z Twierdzenia 38 i wykonać przejście graniczne w inkluzji (19).

WNIOSEK 40 *Przy założeniu $H(\iota)$ (jak również przy założeniu $H(\bar{\iota})$), warunki (20)-(22) są wystarczające do wykonania przejścia granicznego w inkluzji (19) i uzyskania inkluzji*

$$\eta(t) \in \partial_{Cl} J(\iota u(t)) \ \text{ dla p.w. } t \in (0,T).$$

Jak widać Wniosek 40 rozstrzyga kwestię zawartą w punkcie $(**)$ powyżej.

W moich pracach warunek $H(\iota)$ ma jeszcze jedno zastosowanie. Mianowicie z Lematu 29 natychmiast wynika następujący wniosek.

WNIOSEK 41 *Jeżeli zachodzi warunek $H(\iota)$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $c(\varepsilon) > 0$, takie, że dla każdego $u \in V$ mamy*

$$\|\iota u\|_U \leq \varepsilon \|u\|_V + c(\varepsilon)\|u\|_H. \tag{26}$$

Poza tym, dzięki prostym przekształceniom, warunek (26) można zastąpić warunkiem

$$\|\iota u\|_U^2 \leq \varepsilon \|u\|_V^2 + \bar{c}(\varepsilon)\|u\|_H^2, \tag{27}$$

gdzie $\bar{c}(\varepsilon) > 0$.

Ze względu na znaczenie warunku $H(\iota)$ pojawia się naturalne pytanie: w jakiej sytuacji jest on spełniony? Odpowiem na nie w dalszej części referatu, podając przykład konkretnego operatora i konkretnych przestrzeni, występujących w opisie zjawisk kontaktowych mechaniki, które spełniają warunkek $H(\iota)$ (zob. Wniosek 43).

Uwagi i spostrzeżenia poczynione w tym podrozdziale będą miały kluczowe znaczenie dla wyjaśnienia zasad działania metody dysykretyzacji czasowej dla inkluzji ewolucyjnych (Podrozdział 2.4). Zanim jednak opiszę tę metodę szczegółowo, wytłumaczę znaczenie ewolucyjnych inkluzji typu Clarke'a w modelowaniu problemów fizycznych.

2.3 Zagadnienia mechaniki kontaktowej

Badane przeze mnie inkluzje ewolucyjne, które krótko opisałem w Podrozdziale 2.2, same w sobie stanowią niezwykle interesujący dział analizy nieliniowej, a ich badanie może być cennym źródłem inspiracji. Nie można jednak pominąć ich praktycznego zastosowania, jakim jest matematyczne modelowanie konkretnych problemów fizycznych. W szczególności inkluzje, którymi się zajmuję, stanowią abstrakcyjny opis pewnej klasy problemów mechaniki kontaktowej. W tym podrozdziale wprowadzę oznaczenia charakterystyczne dla tego obszaru nauki oraz opiszę zjawiska, stanowiące fizyczną motywację dla badanych przeze mnie ewolucyjnych inkluzji typu Clarke'a (por. Wniosek 44). Szczegółowe informacje na temat matematycznego modelowania zjawisk kontaktowych mechaniki można znaleźć np w [11] i [19].

2.3.1 Oznaczenia matematyczne

Niech $\mathbb{R}^d$ oznacza d-wymiarową przestrzeń euklidesową ($d = 2, 3$) z iloczynem skalarnym i normą określonymi jako

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i v_i, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{R}^d} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})^{1/2} \quad \forall\, \boldsymbol{u} = (u_i),\, \boldsymbol{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d.$$

Symbolem $\mathbb{S}^d$ oznaczamy przestrzeń symetrycznych tensorów drugiego stopnia na $\mathbb{R}^d$, lub prościej symetrycznych macierzy o wymiarach $d \times d$. Iloczyn skalarny i norma w $\mathbb{S}^d$ określone są wzorami

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij}\tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbb{S}^d} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{1/2} \quad \forall\, \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}),\, \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d.$$

Wszystkie używane w tym podrozdziale indeksy i, j, k, l przyjmują wartości z zakresu od 1 do d. Przyjmujemy przy tym tzw. konwencję sumacyjną względem powtarzających się indeksów, czyli np. $a_{ij}b_{ij}$ oznacza $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}b_{ij}$.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem otwartym, ograniczonym i spójnym z brzegiem lipszycowski $\Gamma = \partial\Omega$. Dla dowolnej funkcji $\boldsymbol{w} \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, takiej, że $\boldsymbol{w} = (w_i)$, $w_i \colon \Omega \to \mathbb{R}$, symbolem $w_{i,j}$ oznaczać będziemy pochodną cząstkową $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$, zakładając, że ta pochodna istnieje. Używać będziemy następujących przestrzeni funkcji określonych na Ω.

$$H = L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) = \{\, \boldsymbol{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \,\}, \quad Q = \{\, \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \mid \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \,\},$$
$$H_1 = \{\, \boldsymbol{u} = (u_i) \mid \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in Q \,\}, \qquad Q_1 = \{\, \boldsymbol{\sigma} \in Q \mid \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \in H \,\}.$$

Symbole $\boldsymbol{\varepsilon}$ i Div w powyższych definicjach oznaczają odpowiednio operator deformacji i dywergencji określone wzorami

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j}).$$

Przestrzenie H, Q, H_1 i Q_1 są rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta z iloczynami skalarnymi określonymi jako

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H = \int_\Omega u_i v_i\,dx, \qquad (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})_Q = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}\,dx,$$

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{H_1} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q, \quad (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})_{Q_1} = (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau})_Q + (\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma},\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\tau})_H.$$

Normy indukowane przez powyższe iloczyny skalarne oznaczamy odpowiednio przez $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_{H_1}$ i $\|\cdot\|_{Q_1}$.

Niech $\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)$ oznacza wersor normalny zewnętrzny do brzegu $\partial\Omega$. Symbolami v_ν i $\boldsymbol{v}_\tau$ oznaczamy odpowiednio część normalną i część styczną pola wektorowego $\boldsymbol{v}\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$, zdefiniowane jako $v_\nu = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - v_\nu\boldsymbol{\nu}$. Podobnie, σ_ν i $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ oznaczają odpowiednio część normalną i część styczną pola tensorowego $\boldsymbol{\sigma}\colon \partial\Omega \to \mathbb{S}^d$ i są zdefiniowane wzorami $\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\nu}$ i $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu\boldsymbol{\nu}$.

2.3.2 Motywacja fizyczna

W modelowym problemie mechaniki kontaktowej rozpatrywane jest ciało fizyczne zajmujące obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Powierzchnia ciała odpowiadająca brzegowi $\partial\Omega$ podzielona jest na trzy wzajemnie rozłączne części Γ_D, Γ_N i Γ_C. Nazywane są one odpowiednio *brzegiem Dirichleta*, *brzegiem Neumanna* i *brzegiem kontaktowym*. Standardowo zakłada się, że na fragmencie brzegu Γ_D ciało jest sztywno przymocowane, dzięki czemu fragment ten nie ulega przemieszczeniu. Z matematycznego punktu widzenia warunek ten jest pewnym ułatwieniem (por. Wniosek 45), natomiast w moich pracach zajmuję się również problemami, w których ciało nie jest przymocowane, tzn. $\Gamma_D = \emptyset$. Zakłada się również, że powierzchniowe siły zewnętrzne o zadanej gęstości $\boldsymbol{f}_N$ działają na fragment brzegu Γ_N. Wreszcie Γ_C jest fragmentem brzegu, który pozostaje w kontakcie z innym ciałem (np. podłożem). Całe ciało podlega działaniu siły objętościowej, np. grawitacji, o zadanej gęstości $\boldsymbol{f}_0$. W omawianym modelu szukanymi są dwie wielkości opisujące stan fizyczny ciała. Są to: pole wektorowe przemieszczeń $\boldsymbol{u}\colon \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^d$ oraz pole tensorowe naprężeń $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega\times[0,T] \to \mathbb{S}^d$. Obie wielkości są więc funkcjami zmiennej przestrzennej $\boldsymbol{x}\in\Omega$ i zmiennej czasowej $t\in[0,T]$. Jednak dla uproszczenia zapisu będziemy niekiedy pomijać nazwy zmiennych pisząc np. $\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ albo $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ zamiast $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)$. Dla dowolnej funkcji $\boldsymbol{w}$ zależnej od zmiennej czasowej $t\in[0,T]$, symbolami $\boldsymbol{w}'$ i $\boldsymbol{w}''$ oznaczać będziemy odpowiednio pierwszą i drugą pochodną funkcji $\boldsymbol{w}$ względem t, zakładając, że te pochodne istnieją. W niektórych przypadkach, aby zachować zgodność oznaczeń z oryginalnymi pracami, będziemy używać alternatywnych oznaczeń $\dot{\boldsymbol{w}}$ i $\ddot{\boldsymbol{w}}$ albo $\boldsymbol{w}_t$ i $\boldsymbol{w}_{tt}$ (por. Uwaga 28).

W matematycznym modelu dynamicznego zjawiska kontaktowego uwzględnia się cztery rodzaje relacji wiążących ze sobą dane z niewiadomymi: równanie zachowania sił, prawo konstytutywne, warunki brzegowe i warunki początkowe. Omówię teraz bliżej każdy z nich.

1. Równanie zachowania sił ma postać

$$\rho\boldsymbol{u}'' - \mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_0 \quad \text{w } \Omega\times[0,T]. \tag{28}$$

W równaniu (28) parametr ρ oznacza gęstość materiału, z którego zbudowane jest ciało w punkcie $\boldsymbol{x} \in \Omega$. A zatem składnik $\rho\boldsymbol{u}''$ oznacza udział siły powodującej przyspieszenie $\boldsymbol{u}''$ na jednostkę objętości (gęstość siły dynamicznej). Dla uproszczenia przyjmuje się często $\rho \equiv 1$. Drugi składnik lewej strony równania oznacza gęstość sił wynikających z wewnętrznych naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$. Równanie (28) oznacza więc, że te dwa rodzaje sił równoważą siłę zewnętrzną o gęstości $\boldsymbol{f}_0$ działającą na całą objętość ciała. Postać tego równania wynika więc tylko z fizycznego prawa równowagi sił i nie zależy od rodzaju materiału, z którego wykonane jest ciało. W przypadku, gdy dynamika ciała jest na tyle mała, że jego przyspieszenie $\boldsymbol{u}''$ można pominąć, równanie (28) redukuje się do postaci

$$-\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}_0 \quad \text{ w } \Omega \times [0,T], \tag{29}$$

a zjawisko opisane takim równaniem nazywamy *zjawiskiem statycznym* (stacjonarnym). Zjawiska opisane równaniem (28) nazywamy natomiast *procesami dynamicznymi.*

2. Prawo konstytutywne jest to relacja opisująca w jaki sposób naprężenie $\boldsymbol{\sigma}$ zależy od odkształcenia $\boldsymbol{u}$, a dokładnie rzecz biorąc od tensora deformacji $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$. Najprostszym przykładem takiej relacji jest tzw. *sprężyste prawo konstytutywne*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \quad \text{ w } \Omega \times [0,T], \tag{30}$$

gdzie odwzorowanie $\mathcal{G} \colon \Omega\times[0,T]\times\mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ nazywamy *operatorem sprężystości.* Problemy modelowane prawem (30) nazywamy *problemami sprężystymi.* W przypadku, gdy $\mathcal{G}$, jest tensorem liniowym, czyli $\mathcal{G} = (G_{ijkl})$, $G_{ijkl} \colon \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}$ dla $1 \le i,j,k,l \le d$, prawo konstytutywne (30) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = G_{ijkl}\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\boldsymbol{u}) \quad \text{ w } \Omega \times [0,T]$$

i nazywane jest *prawem Hooke'a.* Oprócz zjawisk sprężystych rozpatrujemy *zjawiska lepko-sprężyste* w których naprężenie zależy nie tylko od przemieszczenia $\boldsymbol{u}$, ale również od prędkości $\boldsymbol{u}'$. Prawo konstytutywne opisujące takie zjawisko ma postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}') + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \quad \text{ w } \Omega \times [0,T], \tag{31}$$

gdzie odwzorowanie $\mathcal{C} \colon \Omega\times[0,T]\times\mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ nazywamy *operatorem lepkości*, a $\mathcal{G}$, podobnie jak poprzednio operatorem sprężystości. W przypadku, gdy $\mathcal{C}$ i $\mathcal{G}$, są tensorami liniowym, czyli $\mathcal{C} = (C_{ijkl})$, $\mathcal{G} = (G_{ijkl})$, $C_{ijkl}, G_{ijkl} \colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ dla $1 \le i,j,k,l \le d$, prawo konstytutywne (31) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\boldsymbol{u}') + G_{ijkl}\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}(\boldsymbol{u}) \quad \text{ w } \Omega \times [0,T]$$

i nazywane jest *prawem Kelvina-Voigta.* Jeżeli w opisie zjawiska mechanicznego oprócz równania (29), charakterystycznego dla zjawisk statycznych, używamy lepko-sprężystego prawa kontaktowego, wówczas zjawisko takie nazywamy *quasistatycznym.* W procesie fizycznym opisanym w pracy [A8] uwzględniamy dodatkowo wpływ temperatury $\theta \colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ na odkształcenie i naprężenie ciała. Prawo konstytutywne opisujące takie zjawisko ma postać

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + C\theta \qquad \text{w } \Omega \times [0, T], \tag{32}$$

gdzie $C = (c_{ij})$ jest tensorem rozszerzalności cieplnej.

3. Warunki brzegowe dzielimy na trzy rodzaje w zależności od tego, na którym fragmencie brzegu są one zadane. Na fragmencie Γ_D zakładamy, że ciało się nie przemieszcza, a więc

$$\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{na } \Gamma_D \times [0, T]. \tag{33}$$

Warunek (33) nazywamy *warunkiem brzegowym Dirichleta.* Na fragmencie brzegu Γ_N naprężenie brzegowe zadane jest przez siłę o gęstości $\boldsymbol{f}_N$, a zatem

$$\boldsymbol{\sigma\nu} = \boldsymbol{f}_N \quad \text{na } \Gamma_N \times [0, T]. \tag{34}$$

Warunek (34) nazywamy *warunkiem brzegowym Neumanna.*
Przejdę teraz do opisu *warunków kontaktowych* skupiając się tylko na kilku przykładach umożliwiających dokonanie ich najbardziej ogólnej klasyfikacji. Jak już wspomniałem we wstępie, ciało zajmujące obszar Ω może pozostawać w kontakcie z podłożem, natomiast Γ_C jest fragmentem brzegu, na którym ten kontakt może się pojawić. Warunek kontaktowy jest to warunek określający relację między naprężeniem $\boldsymbol{\sigma}$, a wywołującym go przemieszczeniem $\boldsymbol{u}$ w obrębie brzegu Γ_C. Ze względu na brzegowy charakter tych relacji, osobno rozpatrujemy związek między częścią normalną naprężenia σ_ν, a odpowiadającym mu przemieszczeniem normalnym u_ν oraz związek między częściami stycznymi tych wielkości $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ i $\boldsymbol{u}_\tau$. Pierwszy z tych związków nazywamy *warunkiem kontaktowym normalnym*, drugi zaś *warunkiem kontaktowym stycznym.* Pełny warunek kontaktowy stanowi zawsze koniunkcję warunku normalnego i stycznego. W najprostszych przypadkach jeden z dwóch powyższych warunków redukuje się do postaci trywialnej. Tak jest w przypadku kontaktu *bilateralnego* opisanego warunkiem

$$u_\nu = 0 \quad \text{na } \Gamma_C \times [0, T] \tag{35}$$

oraz w przypadku kontaktu *bez tarcia* opisanego warunkiem

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = 0 \quad \text{na } \Gamma_C \times [0, T]. \tag{36}$$

Równanie (35) oznacza, że na brzegu kontaktowym ciało nie przemieszcza się w kierunku normalnym do podłoża, a więc pozostaje z nim w stałym kontakcie. Równanie (36) oznacza, że na brzegu kontaktowym nie pojawia się naprężenie styczne, które w przeciwnym przypadku byłoby reakcją podłoża na przemieszczenie styczne. Świadczy to o braku tarcia, które by taką reakcję wywołało. Należy pamiętać, że każdy z warunków (35) i (36) musi być uzupełniony nietrywialnym warunkiem na pozostałą część składową naprężenia i przemieszczenia.

Podam teraz przykłady takich nietrywialnych warunków kontaktowych pojawiających się w moich publikacjach. Jednym z nich jest następujący warunek na części styczne naprężenia i przemieszczenia

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} \le \mu(0)S & \text{dla} \quad \boldsymbol{u}'_\tau = 0 \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu(\|\boldsymbol{u}'_\tau\|_{\mathbb{R}^d})S\, \boldsymbol{u}'_\tau/\|\boldsymbol{u}'_\tau\|_{\mathbb{R}^d} & \text{dla} \quad \boldsymbol{u}'_\tau \neq 0 \end{cases} \quad \text{na } \Gamma_C \times (0,T). \tag{37}$$

Interpretacja warunku (37) jest następująca. Na ciało będące w kontakcie z podłożem działa siła "dążąca" do przesunięcia go w kierunku stycznym do podłoża. W przypadku gdy $\boldsymbol{u}'_\tau = 0$, a więc ciało pozostaje nieruchome względem podłoża (co jest spowodowane tarciem), naprężenie styczne $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ może rosnąć aż do osiągnięcia wartości granicznej $\mu(0)S$, gdzie $\mu(0)$ odpowiada współczynnikowi tarcia statycznego, a S jest naprężeniem normalnym. W momencie, gdy wartość graniczna zostanie przekroczona, ciało zaczyna się poruszać, a więc $\boldsymbol{u}'_\tau \neq 0$. Wówczas naprężenie styczne wywołane tarciem dynamicznym zaczyna działać w tym samym kierunku co przemieszczenie choć, jako siła reakcji, ma przeciwny zwrot. Natomiast jego wartość podyktowana jest zależnością $\|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} = \mu(\|\boldsymbol{u}'_\tau\|_{\mathbb{R}^d})S$ wynikającą z warunku (37), w którym μ jest współczynnikiem tarcia dynamicznego zależnym od prędkości ciała względem podłoża. Charakter rozpatrywanego prawa kontaktowego zależy więc od doboru konkretnej funkcji $\mu\colon \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ w warunku (37). Aby się o tym przekonać, porównajmy dwa modele.

- Monotoniczne prawo tarcia. Przyjmijmy $\mu \equiv \alpha$, gdzie $\alpha > 0$ jest stałą. Oznacza to, że tarcie kinetyczne jest równe tarciu statycznemu. Wprowadźmy teraz funkcję $j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $j(\boldsymbol{\xi}) = \alpha S\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}$ dla każdego $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Jest to funkcja wypukła a jej subróżniczka (por. Definicja 17) $\partial j\colon \mathbb{R}^d \to 2^{\mathbb{R}^d}$ określona jest wzorem

$$\partial j(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} B_{\alpha S}(0) & \text{dla } \boldsymbol{\xi} = 0 \\ \{\boldsymbol{\xi}\alpha S/\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}\} & \text{dla } \boldsymbol{\xi} \neq 0, \end{cases}$$

  gdzie $B_{\alpha S}(0)$ oznacza kulę o środku w punkcie 0 i promieniu αS. Warunek (37) można wtedy zapisać jako

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau \in \partial j(\boldsymbol{u}'_\tau) \quad \text{na } \Gamma_C \times (0,T). \tag{38}$$

  Ponieważ subróżniczka ∂j jest monotonicznym odwzorowaniem wielowartościowym (por. Wniosek 18), warunek (38) jest monotonicznym prawem tarcia.

- Niemonotoniczne prawo tarcia. Poprzedni przykład opiera się na założeniu, że współczynnik tarcia statycznego jest równy współczynnikowi tarcia kinetycznego. W praktyce jednak tarcie kinetyczne jest nieco mniejsze od tarcia statycznego. Istotnie, gdy ciało zaczyna się poruszać pokonawszy opór wynikający z tarcia statycznego, naprężenie styczne spada, a tarcie (kinetyczne) stabilizuje się na poziomie nieco niższym, niż jego graniczna wartość powstrzymująca ciało przed poruszaniem się. Dlatego też bardziej realny model to taki, w którym funkcja μ jest malejąca. Jako przykład rozważmy funkcję μ określoną wzorem

$$\mu(s) = \exp(-as) + b \quad \forall\, s \geq 0, \tag{39}$$

gdzie $0 < a < b$. Wprowadźmy teraz funkcję $j\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$j(\boldsymbol{\xi}) = S\int_0^{\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}} \mu(s)\, ds, \quad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{40}$$

Wówczas subróżniczka $\partial_{Cl} j\colon \mathbb{R}^d \to 2^{\mathbb{R}^d}$ w sensie Clarke'a funkcji j (por. Definicja 20) określona jest następująco

$$\partial_{Cl} j(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} B_S(0) & \text{dla } \boldsymbol{\xi} = 0 \\ \{\boldsymbol{\xi} S\mu(\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d})/\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbb{R}^d}\} & \text{dla } \boldsymbol{\xi} \neq 0. \end{cases}$$

Warunek (37) można wtedy zapisać w postaci

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau \in \partial_{Cl} j(\boldsymbol{u}'_\tau) \ \text{ na } \Gamma_C \times (0,T). \tag{41}$$

W tym przypadku subróżniczka (w sensie Clarke'a) funkcji j jest niemonotonicznym odwzorowaniem wielowartościowym. W związku z tym prawo tarcia (38) ma charakter niemonotoniczny.

Omówię teraz przykład normalnego prawa kontaktowego wykorzystany w pracy [A6]. Ma on postać

$$\begin{cases} u'_\nu(t) \leq g, \ \ \sigma_\nu(t) + \xi(t) \leq 0 \\ (u'_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + \xi(t)) = 0 \qquad \text{na } \Gamma_C \times (0,T), \\ \xi(t) \in \partial_{Cl} j(u'_\nu(t)) \end{cases} \tag{42}$$

gdzie $g > 0$ jest stałą. Pierwsza nierówność w warunku (42) oznacza, że prędkość w kierunku normalnym jest ograniczona przez wielkość g. Warunek taki określany jest w literaturze jako warunek *unilateralny* (jednostronny). Poza tym, gdy $u'_\nu(t) < g$, wówczas z równania w warunku (42) wynika, że reakcja podłoża $-\sigma_\nu$ zależy od prędkości w kierunku normalnym, co w literaturze określa się jako *warunek normalnej tłumionej odpowiedzi (ang. normal dumped response condition)*, a zależność ta wyrażona jest relacją wielowartościową $\sigma_\nu(t) + \xi(t) = 0$, $\xi(t) \in \partial_{Cl} j(u'_\nu(t))$, czyli $-\sigma_\nu \in \partial_{Cl} j(u'_\nu(t))$. Jeżeli natomiast $u'_\nu(t) = g$, to reakcja podłoża opisana jest nierównością $-\sigma_\nu(t) \geq \xi(t)$, gdzie $\xi(t) \in \partial_{Cl} j(g)$, a więc jest ona ograniczona tylko z jednej strony (warunek unilateralny). Ogólnie zależność (42) określana jest jako warunek *normalnej tłumionej odpowiedzi z ograniczeniem jednostronnym.* W literaturze warunek ten jest używany do opisu zjawisk kontaktowych z lubrykantem (por. [11]).
Używając Definicji 17, łatwo zauważyć, że warunek (42) jest równoważny z inkluzją

$$-\sigma_\nu(t) \in \partial_{Cl} j(u'_\nu(t)) + \partial I_{(-\infty,g]}(u'_\nu(t)) \quad \text{na } \Gamma_C \times (0,T), \tag{43}$$

gdzie $I_{(-\infty,g]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest funkcją wskaźnikową przedziału $(-\infty, g]$ określoną jako

$$I_{(-\infty,g]}(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \in (-\infty, g] \\ +\infty & \text{dla } s \in (g, +\infty]. \end{cases} \tag{44}$$

Biorąc pod uwagę komentarz umieszczony przed Twierdzeniem 23 w Podrozdziale 2.1.3 można się spodziewać, że sformułowanie wariacyjne problemu kontaktowego opisanego inkluzją (38), przybierze formę nierówności wariacyjnej. Z kolei problem, w którym prawo tarcia ma postać (41) prowadzi do nierówności hemiwariacyjnej. Wreszcie inkluzja (43), uwzględniająca w swoim sformułowaniu wariacyjnym dwa różne typy subróżniczek, wypukłą i Clarke'a, przyjmie postać nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnej.

4. Warunki początkowe. W problemach ewolucyjnych pierwszego rzędu (uwzględniających tylko pierwszą pochodną czasową szukanej funkcji) przyjmujemy jeden warunek początkowy

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \ \text{ w } \Omega, \tag{45}$$

gdzie $\boldsymbol{u}_0\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ jest daną funkcją. W problemach dynamicznych (uwzględniających również drugą pochodną czasową) przyjmujemy dwa warunki początkowe

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \ \ \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}_1 \ \text{ w } \Omega, \tag{46}$$

gdzie $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ są danymi funkcjami, przemieszczeniem początkowym i prędkością początkową.

Na koniec sformułuję przykładowy problem mechaniki kontaktowej badany przeze mnie w pracach [A1] i [A7].

Problem $\mathcal{P}$. *Znaleźć $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ i $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ spełniające równanie (28) z warunkami (31), (33), (34), (35), (37) oraz (46).*

Uwaga 42 *W wymienionych wyżej pracach [A1] i [A7] prawo tarcia opisane warunkiem (37) w Problemie $\mathcal{P}$ ma z założenia charakter niemonotoniczny, tzn. funkcja μ występująca we wzorze (37) może być niemonotoniczna, w szczególności może być opisana wzorem (39).*

2.3.3 Sformułowanie wariacyjne problemu mechaniki kontaktowej

W tym podrozdziale pokażę, że sformułowanie wariacyjne problemów mechaniki kontaktowej opisanych w Podrozdziale 2.3.2 prowadzi do badanych przeze mnie inkluzji ewolucyjnych typu Clarke'a, której przykładem jest Problem $(P)_E$ wprowadzony na początku Podrozdziału 2.2. W tym celu wprowadzę przestrzenie niezbędne do uzyskania sformułowania wariacyjnego.
Zachowując oznaczenia wprowadzone w Podrozdziale 2.3.2 rozważać będziemy zbiór WK, którego definicja zależy od rodzaju warunku kontaktowego na część normalną przemieszczenia. W związku z tym rozpatrzmy dwa przypadki.

1. Jeżeli kontakt jest bilateralny, tzn. spełniony jest warunek (35), wtedy definiujemy
$$WK = \{\boldsymbol{v} \in H_1 \mid v_\nu = 0 \text{ na } \Gamma_C\}. \tag{47}$$

2. Jeżeli kontakt nie jest bilateralny, przyjmujemy
$$WK = H_1. \tag{48}$$

Wprowadzimy teraz przestrzeń V, której definicja zależy od tego, czy ciało rozpatrywane w modelu jest przymocowane, czy swobodne.

1. Zakładamy, że ciało jest przymocowane na fragmencie brzegu Γ_D, takim, że $\text{meas}(\Gamma_D) > 0$, gdzie meas oznacza brzegową miarę Lebesgue'a. Wówczas definiujemy
$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_1 \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ na } \Gamma_D\} \cap WK. \tag{49}$$
Ponieważ meas $(\Gamma_D) > 0$, możemy skorzystać z następującej nierówności Korna ([18], str. 79):
$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_Q \geq C_K \|\boldsymbol{v}\|_{H_1} \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \tag{50}$$
gdzie stała C_K zależy tylko od Ω i Γ_D. Na przestrzeni V, wprowadzamy iloczyn skalarny określony jako
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \quad \forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in V,$$
oraz odpowiadającą mu normę $\|\cdot\|_V$ określoną jako
$$\|\boldsymbol{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_Q \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V. \tag{51}$$
Z nierówności (50) i z definicji (51) wynika, że normy $\|\cdot\|_{H_1}$ i $\|\cdot\|_V$ są równoważne na V i $(V, \|\cdot\|_V)$ jest rzeczywistą przestrzenią Hilberta.

2. Zakładamy, że ciało jest swobodne. Wtedy w modelu nie występuje brzeg Γ_D ($\Gamma_D = \emptyset$), gdyż ciało nie jest przymocowane i przyjmujemy
$$V = H_1 \cap WK. \tag{52}$$
Na przestrzeni V przyjmujemy iloczyn skalarny i normę przestrzeni H_1, a zatem
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{H_1} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_H + (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \quad \forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in V,$$
oraz
$$\|\boldsymbol{u}\|_V^2 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_V \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in V. \tag{53}$$

W każdym z powyższych przypadków przestrzeń V jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni H_1. Identyfikując przestrzeń H z przestrzenią do niej dualną otrzymujemy trójkę ewolucyjną $V \subset H \subset V^*$ z włożeniami gęstymi, ciągłymi i zwartymi. Niech $U = L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d)$. Wówczas zachodzi nierówność
$$\|\boldsymbol{v}\|_U \leq C_0 \|\boldsymbol{v}\|_V \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \tag{54}$$

gdzie $C_0 > 0$ jest stałą. W sytuacji, gdy przestrzeń V zdefiniowana jest wzorem (49), nierówność (54) wynika z twierdzenia Soboleva o śladzie oraz z nierówności (50), a stała C_0 zależy od Ω, Γ_D i Γ_C. W przypadku, gdy V jest określona wzorem (52), nierówność (54) wynika z samego twierdzenia Soboleva o śladzie, a stała C_0 zależy tylko od Ω i Γ_C. Z nierówności (54) wynika, że istnieje ciągły operator śladu $\gamma\colon V \to U$. Dla uproszczenia ślad $\gamma\boldsymbol{v}$ funkcji $\boldsymbol{v} \in V$ oznaczać będziemy nadal symbolem $\boldsymbol{v}$.

WNIOSEK 43 *Trójka przestrzeni V, H i U wraz z operatorem $\iota = \gamma$ spełniają warunek $H(\iota)$ z Podrozdziału 2.2.*

Dowód. Niech $Z = H^{1-\varepsilon}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, gdzie $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ jest ustalone. Zdefiniujmy operator włożenia $\iota_1\colon V \to Z$, operator śladu $\gamma_1\colon Z \to H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$, operator włożenia $\pi\colon H^{\frac{1}{2}-\varepsilon}(\Gamma_C;\mathbb{R}^d) \to U$ oraz złożenie $\iota_2 = \pi \circ \gamma_1\colon Z \to U$. Wtedy ι_1 jest zwarty, $\iota_2 \in \mathcal{L}(Z, U)$, oraz $\iota = \gamma = \iota_2 \circ \iota_1$, a więc warunek $H(\iota)$ jest spełniony. □

Podam teraz wzór Greena (por. [17], (2.7)) potrzebny do uzyskania sformułowania wariacyjnego problemu mechaniki kontaktowej

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q + (\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{v})_H = \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{v}\,d\Gamma \quad \forall\,\boldsymbol{v} \in H_1,\ \boldsymbol{\sigma} \in C^1(\Omega;\mathbb{S}^d). \tag{55}$$

Aby wyjaśnić zasadę sprowadzania problemu mechaniki kontaktowej do postaci słabej (wariacyjnej) weźmy pod uwagę Problem $\mathcal{P}$ sformułowany na końcu Podrozdziału 2.3.2. Wtedy przestrzeń V definiujemy wzorem (49), w którym zbiór WK określony jest wzorem (47). Następnie wprowadzamy operatory $A, B\colon V \times V \to V^*$ zdefiniowane wzorami

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = (\mathcal{C}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \quad \forall\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v} \in V, \tag{56}$$

$$\langle B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = (\mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))_Q \quad \forall\,\boldsymbol{u},\,\boldsymbol{v} \in V, \tag{57}$$

oraz funkcję $\boldsymbol{f}\colon (0,T) \to V^*$ określoną wzorem

$$\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} = \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot\boldsymbol{v}\,dx + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{f}_N(t)\cdot\boldsymbol{v}\,d\Gamma \quad \forall\,\boldsymbol{v} \in V,\ \text{p.w. } t \in (0,T). \tag{58}$$

Słabym (wariacyjnym) sformułowaniem Problemu $\mathcal{P}$ nazywamy następujący problem.

Problem $\mathcal{P}_V$. *Znaleźć $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, takie, że $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{W}$ oraz $\boldsymbol{\xi}_\tau \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d))$ takie, że*

$$\begin{aligned}
&\langle \rho\boldsymbol{u}''(t) + A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}\rangle_{V^*\times V} \\
&\qquad\qquad = \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\xi}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau\,d\Gamma \quad \forall\,\boldsymbol{v} \in V,\ \textit{p.w. } t \in (0,T), \\
&\qquad\qquad -\boldsymbol{\xi}_\tau \in \partial_{Cl} j(\boldsymbol{u}'_\tau) \qquad \textit{p.w. na } \Gamma_C \times (0,T), \\
&\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}_1.
\end{aligned}$$

Powyższe sformułowanie wariacyjne otrzymujemy mnożąc obustronnie równanie (28) przez funkcję testową $\boldsymbol{v} \in V$, całkując po zbiorze Ω, stosując wzór Greena (55) (przy założeniu, że $\boldsymbol{\sigma}$ jest odpowiednio regularne), równanie konstytutywne (31), warunki brzegowe (33), (34), (35), (37), inkluzję (41) oraz uwzględniając warunki początkowe (46).
Każde rozwiązanie Problemu $\mathcal{P}_V$ nazywamy słabym rozwiązaniem Problemu $\mathcal{P}$.

Korzystając z Definicji 20, Problem $\mathcal{P}_V$ można zapisać w następującej, równoważnej formie.

Problem $\mathcal{P}_{V,1}$. *Znaleźć $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, takie, że $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{W}$ oraz*

$$\begin{aligned} &\langle \rho\, \boldsymbol{u}''(t) + A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle_{V^* \times V} \\ &\qquad + \int_{\Gamma_C} j^0(\boldsymbol{u}'_\tau(t); \boldsymbol{v}_\tau)\, d\Gamma \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \textit{p.w.}\, t \in (0,T), \\ &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

Problem $\mathcal{P}_{V,1}$ nazywamy brzegową nierównością hemiwariacyjną.
Wprowadźmy teraz funkcjonał $J\colon L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ określony wzorem

$$J(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_C} j(\boldsymbol{v})\, d\Gamma \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d),$$

gdzie j jest zdefiniowane wzorem (40) i sformułujmy pomocniczy problem.
Problem $\mathcal{P}_{V,2}$. *Znaleźć $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, takie, że $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{W}$ i*

$$\begin{aligned} &\rho\, \boldsymbol{u}''(t) + A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t) + \gamma_\tau^* \partial_{Cl} J(\gamma_\tau \boldsymbol{u}'(t)) \ni \boldsymbol{f}(t) \quad \textit{dla p.w. } t \in (0,T), \\ &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}_1, \end{aligned}$$

gdzie γ_τ jest operatorem śladu złożonym z operatorem brania części stycznej wektora, a γ_τ^* operatorem do niego sprzężonym.

Funkcja $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ jest rozwiązaniem Problemu $\mathcal{P}_{V,2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{W}$ i istnieje $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d))$, takie, że

$$\begin{aligned} &\rho\, \boldsymbol{u}''(t) + A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{f}(t) && \text{dla p.w. } t \in (0,T), \\ &\boldsymbol{\eta}(t) \in \gamma_\tau^* \partial_{Cl} J(t, \gamma_\tau \boldsymbol{u}'(t)) && \text{dla p.w. } t \in (0,T), \\ &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

Sformułowanie Problemu $\mathcal{P}_{V,2}$ w postaci nierówności hemiwariacyjnej wygląda następująco.

Problem $\mathcal{P}_{V,3}$. *Znaleźć $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$, takie, że $\boldsymbol{u}' \in \mathcal{W}$ oraz*

$$\begin{aligned} &\langle \rho\, \boldsymbol{u}''(t) + A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} \rangle_{V^* \times V} \\ &\qquad + J^0(\gamma {\boldsymbol{u}'}_\tau(t); \gamma \boldsymbol{v}_\tau) \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \ \textit{p.w. } t \in (0,T), \\ &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

Związek między Problemami $\mathcal{P}_{V,2}$ a $\mathcal{P}_V$ polega na tym, że każde rozwiązanie Problemu $\mathcal{P}_{V,2}$ jest rozwiązaniem Problemu $\mathcal{P}_V$. Wynika to z Twierdzenia 3.47 (v) w [17] i tłumaczy zasadność rozważania Problemu $\mathcal{P}_{V,2}$ w kontekście zagadnienia kontaktowego mechaniki, jakim jest Problem $\mathcal{P}$.

Wniosek 44 *Dla $\rho = 1$ sformułowanie wariacyjne $\mathcal{P}_{V,2}$ problemu mechaniki kontaktowej $\mathcal{P}$ odpowiada inkluzji ewolucyjnej $(P')_E$ wprowadzonej na początku Podrozdziału 2.2, przy czym rolę operatora ι pełni tu operator γ_τ.*

Należy jeszcze zwrócić uwagę na różnicę między dwoma modelami: ciała przymocowanego i ciała swobodnego, wynikającą z różnych definicji przestrzeni V i normy $\|\cdot\|_V$ w obu przypadkach. Otóż często zakłada się, że jeden z operatorów występujących w prawie konstytutywnym (najczęściej operator lepkości) jest koercytywny. Przykładowy warunek gwarantujący koercytywność wygląda następująco

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\tau}) : \boldsymbol{\tau} \geq \alpha \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{\mathbb{S}^d} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d, \tag{59}$$

gdzie $\alpha > 0$. Wtedy operator A zdefiniowany wzorem (56) spełnia warunek

$$\begin{aligned}\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_{V^*\times V} &= (\mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_{\mathcal{Q}} = \int_\Omega \mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\|^2_{\mathbb{S}}\, dx = \alpha \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\, dx = \alpha \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\|^2_{\mathcal{Q}}.\end{aligned} \tag{60}$$

Zatem w modelu ciała przymocowanego, w którym przestrzeń V zdefiniowana jest wzorem (49), a jej norma wzorem (51), z nierówności (60) otrzymujemy warunek

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha \|\boldsymbol{u}\|^2_V. \tag{61}$$

Natomiast w modelu ciała swobodnego, w którym w którym przestrzeń V zdefiniowana jest wzorem (52), a jej norma wzorem (53), z nierówności (60) otrzymujemy warunek

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha \|\boldsymbol{u}\|^2_V - \alpha \|\boldsymbol{u}\|^2_H. \tag{62}$$

Wniosek 45 *Załóżmy, że operator $\mathcal{C}$ spełnia warunek (59). Wtedy w wariacyjnym sformułowaniu modelu ciała przymocowanego operator A określony wzorem (56) jest koercytywny w normie przestrzeni V (spełnia warunek (61)). Jeżeli natomiast ciało jest swobodne, operator A nie jest koercytywny w normie przestrzeni V, gdyż zamiast warunku (61) spełnia słabszy od niego warunek (62). W związku z tym analiza modelu ciała swobodnego jest trudniejsza niż w przypadku ciała przymocowanego, gdyż opiera się na słabszym założeniu o operatorze A.*

2.4 Metoda dyskretyzacji czasowej dla inkluzji ewolucyjnych

Omówię teraz schemat postępowania w rozwiązywaniu abstrakcyjnej inkluzji ewolucyjnej typu Clarke'a metodą dyskretyzacji czasowej. W tym celu posłużę się pochodzącym z pracy [A1] Problemem $(P)_E$ wprowadzonym w Podrozdziale 2.2. Moim celem jest skrótowe opisanie poszczególnych etapów procedury zmierzającej do wykazania istnienia rozwiązania tego problemu. Ogólny schemat, który przedstawię poniżej jest typowy dla wszystkich prac [A1]-[A6], choć ze względu na specyfikę badanych problemów, każdy z jego etapów wygląda nieco inaczej w każdej z omawianych prac. Detale techniczne, z których te różnice wynikają omówię w części poświęconej szczegółowemu omówieniu poszczególnych rezultatów (Rozdział 3).

Wszystkie omówione poniżej etapy analizy oraz rezultaty dotyczące Problemu $(P)_E$ wyglądają analogicznie w przypadku Problemu $(P')_E$ zdefiniowanego w Podrozdziale 2.2 tuż po sformułowaniu Problemu $(P)_E$. Tak więc dla uproszczenia skupię się tylko na omówieniu pierwszego przypadku, natomiast do Problemu $(P')_E$ będę się odwoływał tylko w tych momentach, w których różnice między dwoma problemami będą istotne.
Wykonując podstawienie $w = u'$, formułujemy Problem $(P)_E$ w następującej wersji równoważnej

$$(P)_E^* \quad \begin{cases} \text{Znaleźć } (u, w, \eta) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{U} \text{ takie, że} & \\ u'(t) = w(t) & \text{dla p.w. } t \in (0,T) \\ w'(t) + Aw(t) + Bu(t) + \iota^*\eta(t) = f(t) & \text{dla p.w. } t \in (0,T) \\ \eta(t) \in \partial_{Cl} J(\iota u(t)) & \text{dla p.w. } t \in (0,T) \\ u(0) = u_0, \quad w(0) = u_1. & \end{cases}$$

2.4.1 Założenia

W badaniu Problemu $(P)_E^*$ korzystać będziemy z następujących założeń.

$H(A)$: Operator $A\colon V \to V^*$ spełnia warunki

(i) A jest pseudomonotoniczny.

(ii) $\|Av\|_{V^*} \le a + b\|v\|_V \quad \forall\, v \in V$, gdzie $a \ge 0$, $b > 0$.

(iii) $\langle Av, v\rangle_{V^*\times V} \ge \alpha\|v\|_V^2 - \beta\|v\|_H^2 - \gamma \quad \forall\, v \in V$, gdzie $\alpha > 0$, $\beta, \gamma \ge 0$.

$H(B)$: Operator $B\colon V \to V^*$ jest liniowy, ograniczony, monotoniczny i symetryczny, tzn. $B \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $\langle Bv, v\rangle_{V^*\times V} \ge 0 \quad \forall\, v \in V$, $\langle Bv, w\rangle_{V^*\times V} = \langle Bw, v\rangle_{V^*\times V}$ $\forall\, v, w \in V$.

$H(J)$: Funkcja $J\colon U \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

(i) J jest lokalnie lipszycowska.

(ii) $\|\eta\|_{U^*} \le c(1 + \|w\|_U) \quad \forall\, \eta \in \partial_{Cl} J(w)$, $w \in U$, gdzie $c > 0$.

H_0: $f \in \mathcal{V}^*$, $u_0 \in V$, $u_1 \in H$.

$H(\iota)$: Operator $\iota \in \mathcal{L}(V, U)$ jest zwarty, a odpowiadający mu operator Niemyckiego $\bar{\iota} : M^{2,2}(0,T; V, V^*) \to \mathcal{U}$ zdefiniowany jako $(\bar{\iota}v)(t) = \iota(v(t))$ dla każdego $v \in M^{2,2}(0,T; V, V^*)$, p.w. $t \in (0,T)$ jest również zwarty.

H_{aux}: Przestrzenie V, H, U i operator ι spełniają warunek: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $C(\varepsilon) > 0$ takie, że

$$\|\iota u\|_U \le \varepsilon\|u\|_V + C(\varepsilon)\|u\|_H \quad \forall\, u \in V.$$

UWAGA 46 *Pochodzące z pracy [A1] założenie $H(\iota)$ powyżej odpowiada warunkowi $H(\bar{\iota})$ z Lematu 39.*

UWAGA 47 *Biorąc pod uwagę Lemat 39 i Wniosek 41 widać, że oba powyższe założenia $H(\iota)$ i H_{aux} pochodzące z pracy [A1] można zastąpić jednym założeniem określanym jako $H(\iota)$ w Podrozdziale 2.2. Inaczej mówiąc warunek $H(\iota)$ z Podrozdziału 2.2 jest warunkiem wystarczającym dla warunków $H(\iota)$ i H_{aux} wprowadzonych powyżej.*

2.4.2 Dyskretyzacja czasowa

Omówię teraz technikę dyskretyzacji czasowej dla Problemu $(P)_E$. Na początku dzielimy przedział $[0,T]$ za pomocą ciągu punktów $\{t_k\}_{k=0}^{N_n} \subset [0,T]$ zdefiniowanych następująco:

$$t_k = k\tau_n \text{ gdzie } \tau_n = T/N_n \text{ dla } k = 0, ..., N_n. \tag{63}$$

W powyższych oznaczeniach n oznacza numer podziału, zaś N_n i τ_n oznaczają odpowiednio liczbę kroków czasowych i długość kroku czasowego w n-tym podziale. Mamy więc $N_n \to \infty$ oraz $\tau_n \to 0$ przy $n \to \infty$. W dalszym ciągu dla uproszczenia pomijamy indeks n i piszemy N, τ zamiast N_n, τ_n. Elementy u_0 i u_1 występujące w warunkach początkowych przybliżamy ciągami $\{u_\tau^0\}, \{u_\tau^1\} \subset V$, takimi, że $u_\tau^0 \rightharpoonup u_0$ w V, $u_\tau^1 \to u_1$ w H i $\|u_\tau^1\|_V \le C/\sqrt{\tau}$, gdzie $C > 0$.

Dla ustalonego $\tau > 0$ i dla $k = 1, ..., N$ formułujemy następujący problem.

Problem $(P_\tau)_E$**.** *Znaleźć ciąg $\{w_\tau^k\}_{k=0}^N \subset V$ taki, że $w_\tau^0 = u_\tau^1$ oraz*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau}(w_\tau^k - w_\tau^{k-1}, v)_H + \left\langle A w_\tau^k, v \right\rangle_{V^* \times V} + \left\langle B u_\tau^k, v \right\rangle_{V^* \times V} \\ + \left\langle \eta_\tau^k, \iota v \right\rangle_{U^* \times U} = \left\langle f_\tau^k, v \right\rangle_{V^* \times V} \end{aligned} \tag{64}$$

dla każdego $v \in V$ i $k = 1, ..., N$, gdzie

$$\eta_\tau^k \in \partial_{Cl} J(\iota u_\tau^k), \tag{65}$$

$$f_\tau^k = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(t)\, dt,$$

a ciąg $\{u_\tau^k\}_{k=1}^N$ jest określony wzorem

$$u_\tau^k = u_\tau^0 + \tau \sum_{i=1}^k w_\tau^i \;\; \textit{dla} \;\; k = 1, ..., N. \tag{66}$$

Problem $(P_\tau)_E$ otrzymujemy z Problemu $(P)_E^*$ zapisując go tylko dla punktów t_k, $k = 1, ..., N$ i używając przybliżeń

$$\begin{aligned} &u(t_k) \simeq u_\tau^k, \quad u'(t_k) \simeq \tfrac{1}{\tau}(u_\tau^k - u_\tau^{k-1}), \quad \eta(t_k) \simeq \eta_\tau^k, \\ &w(t_k) \simeq w_\tau^k, \quad w'(t_k) \simeq \tfrac{1}{\tau}(w_\tau^k - w_\tau^{k-1}), \quad f(t_k) \simeq f_\tau^k, \end{aligned} \tag{67}$$

dla $k = 1, ..., N$. Problem $(P_\tau)_E$ jest *niejawnym schematem Eulera* dla Problemu $(P)_E^*$.

2.4.3 Istnienie rozwiązania problemu semidyskretnego $(P_\tau)_E$

Aby wykazać, że Problem (P_τ) ma rozwiązanie $\{w_\tau^k\}_{k=0}^N$ musimy sprawdzić, że dla ustalonego $k = 1, ..., N$ i dla wszyskich ustalonych wartości $w_\tau^0, ..., w_\tau^{k-1}$, istnieje element w_τ^k spełniający równanie (64) z uwzględnieniem inkluzji (65) (wtedy zaczynając od warunku początkowego jesteśmy w stanie indukcyjnie skonstruować cały ciąg $\{w_\tau^k\}_{k=0}^N$). Biorąc pod uwagę (65), równanie (64) jest równoważne następującej inkluzji.

$$f_\tau^k \in Lw_\tau^k, \tag{68}$$

gdzie operator $L\colon V \to 2^{V^*}$ zdefiniowany jest wzorem

$$Lw := \frac{1}{\tau} i^* i w + Aw + \tau Bw + \iota^* \partial_{Cl} J(\iota(u_\tau^0 + \tau \sum_{i=1}^{k-1} w_\tau^i + \tau w))$$

dla $w \in V$. Aby wykazać, że inkluzja (68) ma rozwiązanie, korzystamy z Twierdzenia 11 (por. Wniosek 25). W tym celu pokazujemy, że operator L jest ograniczony, koercytywny i pseudomonotoniczny.
Dla uzyskania ograniczoności, kluczowe są warunki wzrostu $H(A)$(ii) i $H(J)$(ii) oraz ograniczoność operatora B.
Wykazanie koercytywności sprowadza się do sprawdzenia, że wyrażenie $\langle Lw, w\rangle_{V^* \times V}$ można oszacować z dołu przez wielkość typu $c_1\|w\|_V^2 + c_2\|w\|_H^2 \pm c_3$, ze stałymi $c_1, c_2, c_3 > 0$. Udaje się to osiągnąć dzięki warunkowi $H(A)$(iii), przy czym, ze względu na obecność ujemnego składnika $-\beta\|w\|_H^2$ w tym założeniu, koercytywność można wykazać tylko przy odpowiednio małym τ, tak, aby wyrażenie $\frac{1}{\tau}$ pochodzące od składnika $\frac{1}{\tau}\langle i^* i w, w\rangle_{V^*\times V} = \frac{1}{\tau}(w, w)_H = \frac{1}{\tau}\|w\|_H^2$ zrekompensowało wielkość $-\beta$.
Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w sytuacji, gdy zamiast Problemu $(P)_E$ badamy Problem $(P')_E$, w którym wyrażenie związane z subróżniczką Clarke' zależy od pochodnej funkcji u, pojawia się jeszcze jedna trudność związana z koercytywnością. Ostatni składnik operatora L ma wtedy postać $\iota^*\partial_{Cl} J(\iota w)$, czyli $\iota^*\eta$, gdzie $\eta \in \partial_{Cl} J(\iota w)$. Testując ten składnik przez w otrzymujemy $\langle \iota^*\eta, w\rangle_{V^*\times V} = \langle \eta, \iota w\rangle_{U^*\times U} \geq -\|\eta\|_{U^*}\|\iota w\|_U \geq -c(1 + \|\iota w\|_U)\|\iota w\|_U = -c\|\iota w\|_U - c\|\iota w\|_U^2 \geq -(c+\varepsilon)\|\iota w\|_U^2 + \frac{c^2}{4\varepsilon}$, gdzie $\varepsilon > 0$, przy czym przedostatnia nierówność wynika z założenia $H(J)$(ii), a ostatnia z nierówności Younga

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \tag{69}$$

dla każdego $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Pozostaje kwestia oszacowania z dołu składnika $-c\|\iota w\|_U^2$ (ponieważ ε może być dowolnie małe, wyrażenie $\varepsilon\|\iota w\|_U^2$ nie sprawia problemu w oszacowaniu). Można to zrobić na dwa sposoby. Pierwszy polega na skorzystaniu z ciągłości operatora ι, co prowadzi do nierówności $-c\|\iota w\|_U^2 \geq -c\|\iota\|_{\mathcal{L}(U,V)}^2\|w\|_V^2$. Ostatnie ujemne wyrażenie może być zrekompensowane tylko składnikiem $\alpha\|w\|_V^2$, co wymaga założenia

$$\alpha > c\|\iota\|_{\mathcal{L}(U,V)}^2. \tag{70}$$

Warunki analogiczne do (70) używane są przez wielu autorów we wcześniejszych pracach dotyczących inkluzji typu Clarke'a (por. np. warunki (H_1) i $(\tilde{H}_1)$ w [15]). Istnieje jednak drugi sposób na oszacowanie wielkości $-c\|\iota w\|_U^2$ bez zakładania nierówności (70). Opiera się on na założeniu H_{aux}, przy którym, korzystając z nierówności (27) we Wniosku 41, otrzymujemy $-c\|\iota w\|_U^2 \geq -c\varepsilon\|w\|_V^2 - c\bar{c}(\varepsilon)\|w\|_H^2$. Ponieważ $\varepsilon > 0$ może być dowolnie małe, pierwszy składnik po prawej stronie ostatniej nierówności można zrekompensować przez $\alpha\|w\|_V^2$ bez odwoływania się do (70). Natomiast drugi składnik, niezależnie od tego, jak duża jest wielkość $\bar{c}(\varepsilon)$, można zrekompensować przez $\frac{1}{\tau}\|w\|_H^2$ przy odpowiednio małym τ.

WNIOSEK 48 *Wprowadzenie warunku H_{aux}, pozwala na poprawienie wcześniejszych rezultatów poprzez rezygnację z ograniczeń analogicznych (70) na stałe występujące w założeniach. W szczególności zastosowanie go w pracy [A2] pozwoliło na uogólnienie wyników pracy [15] polegające na rezygnacji z założeń (H_1) i $(\tilde{H}_1)$ dla $p = 2$.*

Pseudomonotoniczność operatora L uzasadniamy następująco. Każdy ze składników $\frac{1}{\tau}i^*iw$ i τBw jest pseudomonotoniczny jako operator liniowy i monotoniczny (por. [22], str. 596). Operator A jest pseudomonotoniczny z założenia $H(A)$(i). Wreszcie ostatni składnik operatora L jest pseudomonotoniczny na mocy Twierdzeń 16 i 24. Zatem operator L jest pseudomonotoniczny jako suma operatorów pseudomonotonicznych (zob. Twierdzenie 15).

2.4.4 Oszacowania a-priori dla rozwiązania problemu semidyskretnego

Kolejnym krokiem w analizie Problemu $(P)_E$ jest uzyskanie oszacowań a-priori dla ciągu $\{w_\tau^k\}_{k=0}^N$ będącego rozwiązaniem Problemu $(P_\tau)_E$ oraz dla ciągu $\{u_\tau^k\}_{k=0}^N$ określonego wzorem (66). Punktem wyjścia do uzyskania tych oszacowań jest równanie powstałe z (64) po wstawieniu $v = w_\tau^k$. Lewa strona tak otrzymanego równania jest szacowana z dołu z wykorzystaniem warunku $H(A)$(iii), warunku wzrostu $H(J)$(ii) oraz założenia H_{aux}. Prawa strona jest szacowana z góry za pomocą nierówności $\langle f_\tau^k, w_\tau^k\rangle_{V^*\times V} \leq \|f_\tau^k\|_{V^*}\|w_\tau^k\|_V \leq \varepsilon\|w_\tau^k\|_V^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f_\tau^k\|_{V^*}^2$ (por. (69)). Otrzymana w ten sposób nierówność jest sumowana dla $k = 1, ..., N$, co pozwala ostatecznie otrzymać następujące oszacowania

$$\max_{k=1,\ldots,N} \|w_\tau^k\|_H \leq C, \tag{71}$$

$$\tau\sum_{k=1}^N \|w_\tau^k\|_V^2 \leq C, \tag{72}$$

$$\max_{k=1,\ldots,N} \|u_\tau^k\|_V \leq C, \tag{73}$$

gdzie $C > 0$ oznacza stałą niezależną od τ. W uzyskaniu oszacowań (71)-(73) kluczową rolę odgrywa nierówność Gronwalla.

2.4.5 Problem przybliżony do Problemu $(P)_E$

Niech $\{w_\tau^k\}_{k=0}^N \subset V$ będzie rozwiązaniem Problemu $(P_\tau)_E$, zaś $\{\eta_\tau^k\}_{k=0}^N \subset U^*$ i $\{u_\tau^k\}_{k=0}^N \subset V$ będą określone odpowiednio wzorami (65) i (66). Przyjmijmy oznaczenie $I_k = ((k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, ..., N$ i wprowadźmy funkcje kawałkami stałe

$\bar{w}_\tau$, $\bar{u}_\tau$, : $[0,T] \to V$, $\bar{\eta}_\tau \colon (0,T] \to U^*$, $\bar{f}_\tau \colon (0,T] \to V^*$ oraz kawałkami liniowe w_τ, $u_\tau \colon [0,T] \to V$, określone wzorami

$$
\begin{aligned}
&\bar{w}_\tau(t) = w_\tau^k \quad \text{dla } t \in I_k,\ k = 1,...,N,\ \bar{w}_\tau(0) = u_\tau^1,\\
&\bar{u}_\tau(t) = u_\tau^k \quad \text{dla } t \in I_k,\ k = 1,...,N,\ \bar{u}_\tau(0) = u_\tau^0,\\
&\bar{\eta}_\tau(t) = \eta_\tau^k \quad \text{dla } t \in I_k,\ k = 1,...,N,\\
&\bar{f}_\tau(t) = f_\tau^k \quad \text{dla } t \in I_k,\ k = 1,...,N,\\
&w_\tau(t) = w_\tau^k + (\frac{t}{\tau} - k)(w_\tau^k - w_\tau^{k-1}) \quad \text{dla } t \in I_k,\ k = 1,...,N,\ w_\tau(0) = u_\tau^1,\\
&u_\tau(t) = u_\tau^k + (\frac{t}{\tau} - k)(u_\tau^k - u_\tau^{k-1}) \quad \text{dla } t \in I_k,\ k = 1,...,N,\ u_\tau(0) = u_\tau^0.
\end{aligned}
$$

Łatwo zauważyć, że funkcja $\bar{w}_\tau$ jest pochodną dystrybucyjną funkcji u_τ, tzn. $u_\tau'(t) = \bar{w}_\tau(t)$ dla p.w. $t \in (0,T)$. Z kolei pochodna dystrybucyjna funkcji w_τ określona jest wzorem $w_\tau'(t) = \frac{w_\tau^k - w_\tau^{k-1}}{\tau}$ dla p.w. $t \in (0,T)$, $k = 1,...,N$. Wobec tego z równania (64) i inkluzji (65) otrzymujemy.

$$
\begin{aligned}
(w_\tau'(t), v)_H &+ \langle A\bar{w}_\tau(t), v\rangle_{V^*\times V} + \langle B\bar{u}_\tau(t), v\rangle_{V^*\times V} + \langle \bar{\eta}_\tau(t), \iota v\rangle_{U^*\times U}\\
&= \langle f_\tau(t), v\rangle_{V^*\times V} \quad \forall\, v \in V,\ \text{p.w.}\, t \in (0,T), \qquad (74)\\
\bar{\eta}_\tau(t) &\in \partial_{Cl} J(\iota \bar{u}_\tau(t)) \quad \forall\, t \in (0,T). \qquad (75)
\end{aligned}
$$

Następnie wprowadzamy operatory Niemyckiego $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ określone wzorami $(\mathcal{A}v)(t) = A(v(t))$, $(\mathcal{B}v)(t) = B(v(t))$ dla $v \in \mathcal{V}$, $t \in (0,T)$ i $\bar{\iota} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ określony wzorem $(\bar{\iota} v)(t) = \iota v(t)$ dla $v \in \mathcal{V}$, $t \in (0,T)$. Teraz problem (74)-(75) można zapisać w następującej równoważnej formie

$$
\begin{aligned}
(w_\tau', v)_{\mathcal{H}} &+ \langle \mathcal{A}\bar{w}_\tau, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} + \langle \mathcal{B}\bar{u}_\tau, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} + \langle \bar{\eta}_\tau, \bar{\iota} v\rangle_{\mathcal{U}^*\times\mathcal{U}}\\
&= \langle f_\tau, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \qquad \forall\, v \in \mathcal{V}, \qquad (76)\\
\bar{\eta}_\tau(t) &\in \partial_{Cl} J((\bar{\iota}\, \bar{u}_\tau)(t)) \quad \forall\, t \in (0,T). \qquad (77)
\end{aligned}
$$

Naszym celem jest przejście do granicy w równaniu (76) i inkluzji (77) tak, aby w efekcie otrzymać relacje występujące w definicji Problemu $(P)_E^*$. Wcześniej jednak musimy znaleźć funkcje u, w, η, które mogłyby być ,,kandydatami" na rozwiązanie Problemu $(P)_E^*$. Mogą to być słabe granice (przy $\tau \to 0$) zdefiniowanych powyżej funkcji kawałkami stałych i kawałkami liniowych odpowiednio w przestrzeniach $\mathcal{V}$ i

$\mathcal{U}^*$. Istnienie tych granic wynika z następujących oszacowań a-priori.

$$\|\bar{u}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \leq C, \tag{78}$$
$$\|u_\tau\|_{\mathcal{V}} \leq C, \tag{79}$$
$$\|\bar{w}_\tau\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C, \tag{80}$$
$$\|w_\tau\|_{C(0,T;H)} \leq C, \tag{81}$$
$$\|\bar{w}_\tau\|_{\mathcal{V}} \leq C, \tag{82}$$
$$\|w_\tau\|_{\mathcal{V}} \leq C, \tag{83}$$
$$\|\mathcal{A}\bar{w}_\tau\|_{\mathcal{V}^*} \leq C, \tag{84}$$
$$\|\bar{\eta}_\tau\|_{\mathcal{U}^*} \leq C, \tag{85}$$
$$\|w'_\tau\|_{\mathcal{V}^*} \leq C, \tag{86}$$
$$\|\bar{w}_\tau\|_{M^{2,2}(0,T;V,V^*)} \leq C, \tag{87}$$
$$\|\bar{u}_\tau\|_{M^{2,2}(0,T;V,V^*)} \leq C, \tag{88}$$

gdzie $C > 0$ jest sta niezależną od τ. Oszacowania (78)-(83) wynikają bezpośrednio z wcześniejszych oszacowań (71)-(73). Oszacowania (84)-(85) otrzymujemy z warunków wzrostu $H(A)$(ii) i $H(J)$(ii). Nierówność (86) jest konsekwencją zastosowania poprzednich oszacowań w równaniu (76). Wreszcie, biorąc pod uwagę (82), widać, że do uzyskania (87) wystarczy wykazanie, że seminorma $\|\bar{w}_\tau\|_{BV^q(0,T;V^*)}$ jest ograniczona przez stałą niezależną od τ. Kluczowym jest przy tym sprawdzenie, że seminorma ta szacuje się z góry przez wyrażenie zależne tylko od $\|w'_\tau\|_{\mathcal{V}^*}$, co wobec (86) pozwala nam oszacować $\|\bar{w}_\tau\|_{BV^q(0,T;V^*)}$ i w konsekwencji otrzymać (87). Analogiczna argumentacja prowadzi do oszacowania (88).

2.4.6 Przejście graniczne

Dysponując powyższymi oszacowaniami i biorąc pod uwagę refleksywność przestrzeni $\mathcal{V}$ i $\mathcal{U}$ otrzymujemy następujące zbieżności.

$$\bar{u}_\tau \to u \quad \text{słabo* w } L^\infty(0,T;V), \tag{89}$$
$$u_\tau \to u \quad \text{słabo w } \mathcal{V}, \tag{90}$$
$$\bar{w}_\tau \to w \quad \text{słabo w } \mathcal{V} \text{ i słabo* w } L^\infty(0,T;H), \tag{91}$$
$$w_\tau \to w \quad \text{słabo w } \mathcal{V} \text{ i słabo* w } L^\infty(0,T;H), \tag{92}$$
$$w'_\tau \to w' \quad \text{słabo w } \mathcal{V}^*, \tag{93}$$
$$\bar{\eta}_\tau \to \eta \quad \text{słabo w } \mathcal{U}^*. \tag{94}$$

Ze zbieżności (90) i (91) oraz z faktu, że $u'_\tau = \bar{w}_\tau$ wynika, że

$$u' = w. \tag{95}$$

Zajmiemy się teraz przejściem do granicy w równaniu (76) analizując wszystkie jego składniki osobno. Po pierwsze dla $v \in \mathcal{V}$, otrzymujemy, korzystając z (93)

$$(w'_\tau, v)_{\mathcal{H}} = \langle w'_\tau, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \to \langle w', v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} = (w', v)_{\mathcal{H}}. \tag{96}$$

Z założenia $H(B)$ wynika, że operator $\mathcal{B}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ jest liniowy i ciągły, więc jest również słabo ciągły (ciągły w topologii $(w\text{-}\mathcal{V})\times(w\text{-}\mathcal{V}^*)$). Wobec tego z (89) otrzymujemy $\mathcal{B}\bar{u}_\tau \to \mathcal{B}u$ słabo w $\mathcal{V}^*$, czyli

$$\langle \mathcal{B}\bar{u}_\tau, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \to \langle \mathcal{B}u, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}}\,. \tag{97}$$

Ze słabej zbieżności (94) otrzymujemy

$$\langle \bar{\eta}_\tau, \bar{\iota}v\rangle_{\mathcal{U}^*\times\mathcal{U}} \to \langle \eta, \bar{\iota}v\rangle_{\mathcal{U}^*\times\mathcal{U}}\,. \tag{98}$$

Wiadomo również (por. [20], Remark 8.15), że $\bar{f}_\tau \to f$ silnie w $\mathcal{V}^*$, więc tym bardziej

$$\langle f_\tau, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \to \langle f, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}}\,. \tag{99}$$

Pozostaje więc wykazać, że

$$\langle \mathcal{A}\bar{w}_\tau, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \to \langle \mathcal{A}w, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}}\,. \tag{100}$$

W tym celu wyprowadzamy oszacowanie

$$\limsup_{\tau\to 0}\, \langle \mathcal{A}\bar{w}_\tau, \bar{w}_\tau - w\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \le 0,$$

oraz korzystamy z (91), (87) i Wniosku 37. Używając (96)-(100), możemy przejść do granicy w (76) i otrzymać

$$(w', v)_{\mathcal{H}} + \langle \mathcal{A}w, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} + \langle \mathcal{B}u, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} + \langle \eta, \bar{\iota}v\rangle_{\mathcal{U}^*\times\mathcal{U}} = \langle f, v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \quad \forall\, v \in \mathcal{V}. \tag{101}$$

Podstawmy teraz $v = z\varphi$ w (101), gdzie $z \in V$ i $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle w'(t), z\rangle_{V^*\times V}\, \varphi(t)dt &= \int_0^T (w'(t), z)_H \varphi(t)dt \qquad (102)\\ = \int_0^T \langle Aw(t) + Bu(t) &+ \iota^*\eta(t) - f(t), z\rangle_{V^*\times V}\, \varphi(t)\, dt,\end{aligned}$$

czyli $w'(t) = Aw(t) + Bu(t) + \iota^*\eta(t) - f(t)$ p.w. $t \in (0,T)$. Biorąc dodatkowo pod uwagę (95) widzimy, że trójka (u, w, η) spełnia dwa pierwsze równania w Problemie $(P)_E^*$. Następnie, biorąc pod uwagę założenie $H(\iota)$, Uwagę 46, ograniczenie a-priori (88) oraz słabe zbieżności (89) i (94), możemy skorzystać z Wniosku 40 i wykonać przejście graniczne w inkluzji (77) otrzymując w rezultacie inkluzję $\eta(t) \in \partial_{Cl} J(\iota u(t))$ dla p.w. $t \in (0,T)$. Aby wykazać, że funkcja u jest rozwiązaniem Problemu $(P)_E^*$ wystarczy jeszcze sprawdzić, że spełnia ona warunki początkowe. W tym miejscu kluczową rolę odgrywa następujący lemat (por. [17], Proposition 2.46 (v) i Proposition 2.54 (ii)).

Lemat 49 *Następujące włożenia są ciągłe*

1. $\{v \in \mathcal{V} \,|\, v' \in \mathcal{V}\} \subset C(0,T;V)$,
2. $\mathcal{W} \subset C(0,T;H)$,

gdzie, przypomnijmy, $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} \mid v' \in \mathcal{V}^*\}$.

Punkt (a) Lematu 49 oznacza, że ze zbieżności $v_n \rightharpoonup v$ w $\mathcal{V}$ i $v_n' \rightharpoonup v'$ w $\mathcal{V}$ wynika zbieżność $v_n \rightharpoonup v$ w $C(0,T;V)$. Ta ostatnia z kolei implikuje zbieżność $v_n(t) \rightharpoonup v(t)$ w V dla każdego $t \in [0,T]$. Podobnie punkt (b) Lematu 49 oznacza, że ze zbieżności $v_n \rightharpoonup v$ w $\mathcal{V}$ i $v_n' \rightharpoonup v'$ w $\mathcal{V}^*$ wynika zbieżność $v_n \rightharpoonup v$ w $C(0,T;H)$, a ta ostatnia implikuje zbieżność $v_n(t) \rightharpoonup v(t)$ w H dla każdego $t \in [0,T]$. Wobec tego ze zbieżności (90) i (91) wynika w szczególności, że

$$u_\tau^0 = u_\tau(0) \rightharpoonup u(0) \;\text{ w } V.$$

Podobnie ze zbieżności (92) i (93) otrzymujemy

$$u_\tau^1 = w_\tau(0) \rightharpoonup w(0) \;\text{ w } H.$$

Porównując ostatnie dwie zbieżności z założeniami $u_\tau^0 \rightharpoonup u_0$ w V oraz $u_\tau^1 \to u_1$ w H oraz biorąc pod uwagę jednoznaczność słabej granicy otrzymujemy $u(0) = u_0$ i $u'(0) = w(0) = u_1$, co pokazuje, że funkcje u i w spełniają warunki początkowe zadane w Problemie $(P)_E^*$.

2.5 Metoda dyskretyzacji przestrzennej i czasowo-przestrzennej dla inkluzji ewolucyjnych

Metoda dyskretyzacji czasowej omówiona w poprzednim podrozdziale pozwala na przybliżanie rozwiązania u inkluzji ewolucyjnej za pomocą ciągu rozwiązań przybliżonych u_τ, o którym wiemy, że przynajmniej dla podciągu zachodzi słaba zbieżność $u_\tau \rightharpoonup u$ w $\mathcal{V}$. Za pomocą tej metody w każdej z prac [A1]-[A6] udowodnione zostało istnienie rozwiązania u ewolucyjnej inkluzji typu Clarke'a właśnie jako słabej granicy podciągu rozwiązań przybliżonych u_τ. Nie ma w nich natomiast rezultatów dotyczących błędu przybliżenia $u_\tau \simeq u$. Z kolei w pracach [A7]-[A10] przedstawione zostało nieco odmienne podejście. Po pierwsze, wykorzystane zostały inne metody dyskretyzacji, mianowicie dyskretyzacja przestrzenna oraz pełna dyskretyzacja czasowo-przestrzenna. Po drugie, prezentowane w tych pracach rezultaty koncentrują się właśnie na oszacowaniach błędu przybliżenia rozwiązania problemu dokładnego przez rozwiązania obu schematów przybliżonych. Samo istnienie tych rozwiązań jest natomiast uzasadniane w oparciu o znane już rezultaty lub też pozostaje problemem otwartym.

2.5.1 Podstawowe techniki związane z oszacowaniem błędu

Aby zilustrować sposób postępowania prowadzącego do oszacowania błędu w pracach [A7]-[A10], rozważmy na początek następujący prosty problem.

Problem (P)**.** *Znaleźć* $u \in V$*, takie, że*

$$Au = b, \tag{103}$$

gdzie $b \in V^*$. Przyjmujemy przy tym następujące założenia.

$H(A)$: Operator $A\colon V \to V^*$ spełnia warunki

(i) A jest lipszycowski, tzn. $\|Au-Av\|_{V^*} \leq M\|u-v\|_V \quad \forall\, u,v \in V$, gdzie $M > 0$.

(ii) A jest silnie monotoniczny, tzn. $\langle Au - Av, u - v\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha\|u-v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V$, gdzie $\alpha > 0$.

Rozważmy teraz problem przybliżony.

Problem (P^h). *Znaleźć $u^h \in V^h$, takie, że*

$$\left\langle Au^h, v^h\right\rangle_{V^*\times V} = \left\langle b, v^h\right\rangle_{V^*\times V} \quad \forall\, v^h \in V^h, \tag{104}$$

gdzie V^h jest pewną skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V, a $h > 0$ jest parametrem. Przyjmijmy teraz następujące założenie a-priori.

H_{ap} : Każdy z Problemów (P) i (P^h) ma rozwiązanie.

Interesować nas będzie oszacowanie błędu przybliżenia $u \simeq u_h$ wyrażonego przez normę $\|u - u^h\|_V$. Aby je uzyskać skorzystajmy najpierw z warunku $H(A)$(ii). Wynika z niego, że

$$\alpha\|u - u^h\|_V^2 \leq \left\langle Au - Au^h, u - u^h\right\rangle_{V^*\times V}. \tag{105}$$

Zauważmy teraz, że z (103) i (104) dla dowolnego $v^h \in V^h$ mamy $\left\langle Au, v^h\right\rangle_{V^*\times V} = \left\langle b, v^h\right\rangle_{V^*\times V}$ oraz $\left\langle Au^h, v^h\right\rangle_{V^*\times V} = \left\langle b, v^h\right\rangle_{V^*\times V}$, czyli

$$\left\langle Au - Au^h, v^h\right\rangle_{V^*\times V} = 0 \quad \forall\, v^h \in V^h. \tag{106}$$

Stosując (106) do prawej strony równania (105) otrzymujemy dla dowolnego $v^h \in V^h$

$$\left\langle Au - Au^h, u - u^h\right\rangle_{V^*\times V} = \left\langle Au - Au^h, u - v^h\right\rangle_{V^*\times V}. \tag{107}$$

Aby uzyskać (107), zastąpiliśmy wyrażenie $\left\langle Au - Au^h, u^h\right\rangle_{V^*\times V}$ wyrażeniem $\left\langle Au - Au^h, v^h\right\rangle_{V^*\times V}$. Oba te wyrażenia są sobie równe, gdyż są równe 0 na mocy (106). Porównując teraz (105) z (107) oraz korzystając z założenia $H(A)$(i) otrzymujemy

$$\alpha\|u - u^h\|_V^2 \leq \left\langle Au - Au^h, u - v^h\right\rangle_{V^*\times V} \leq M\|u - u^h\|_V\|u - v^h\|_V, \tag{108}$$

a stąd już wynika oszacowanie

$$\|u - u^h\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\|u - v^h\|_V. \tag{109}$$

Ponieważ $v^h \in V^h$ jest dowolne ostatecznie uzyskujemy

$$\|u - u^h\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\inf_{v^h\in V^h}\|u - v^h\|_V. \tag{110}$$

Uwaga 50 *Oszacowanie (110) stanowi tezę lematu Cea (por. [5], Twierdzenie 2.4.1), a rozumowanie przedstawione powyżej jest analogiczne do jego dowodu. Różnica polega na tym, że w lemacie Cea, V jest przestrzenią Hilberta a zamiast operatora $A\colon V \to V^*$ rozpatruje się formę dwuliniową $a(\cdot,\cdot)\colon V\times V \to \mathbb{R}$ oraz przyjmuje się założenia gwarantujące istnienie rozwiązania Problemów (P) i (P^h). W naszym przypadku przyjmujemy z góry założenie H_{ap}.*

Wniosek 51 *Nierówność (110) pokazuje, że oszacowanie interesującego nas błędu zależy od tego jak dobrze potrafimy aproksymować element u przestrzeni V elementami przestrzeni V^h. W Podrozdziale 2.5.3 opiszę bliżej sytuację, gdy V jest podprzestrzenią przestrzeni Sobolewa $H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, natomiast V^h jest przestrzenią funkcji zdefiniowanych w oparciu o metodę elementów skończonych. Wtedy prawą stronę nierówności (110) można wyrazić jako $O(h^\beta)$, gdzie h jest parametrem malejącym wraz z gęstością triangulacji zbioru Ω, a β jest tym większe im bardziej regularna jest funkcja u.*

2.5.2 Oszacowanie błędu dla stacjonarnej inkluzji typu Clarke'a

W tym podrozdziale zwrócę uwagę na problemy pojawiające się przy oszacowaniu błędu dla inkluzji typu Clarke'a. W tym celu przeanalizuję schemat postępowania dla inkluzji stacjonarnej podsumowując go wnioskiem, który pozostaje aktualny również dla inkluzji ewolucyjnych.
Rozważmy problem analogiczny do Problemu $(P)_S$ omawianego w Podrozdziale 2.1.

Problem (Q)**.** *Znaleźć $u \in V$, takie, że*

$$Au + \iota^* \partial_{Cl}\varphi(\iota u) \ni f. \tag{111}$$

Inkluzja (111) oznacza, że istnieje $\xi \in \partial_{Cl}\varphi(\iota u)$, takie, że

$$Au + \iota^* \xi = f. \tag{112}$$

Spróbujmy teraz powtórzyć rozumowanie przedstawione w Podrozdziale 2.5.1 dla Problemu (Q). Rozważmy więc problem przybliżony.

Problem (Q^h)**.** *Znaleźć $u^h \in V^h$, takie, że istnieje $\xi^h \in \partial_{Cl}\varphi(\iota u^h)$ oraz*

$$\left\langle Au^h, v^h \right\rangle_{V^* \times V} + \left\langle \xi^h, \iota v^h \right\rangle_{U^* \times U} = \left\langle f, v^h \right\rangle_{V^* \times V} \quad \forall\, v^h \in V^h, \tag{113}$$

gdzie V^h jest skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V. Niech operator A spełnia założenia $H(A)$ wprowadzone w Podrozdziale 2.5.1. Załóżmy również, że

$H(\varphi)$: funkcja $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ jest lokalnie lipszycowska oraz spełnia warunki

(i) $\|\xi\|_{U^*} \le c(1 + \|w\|_U)$ $\forall\, w \in U,\ \xi \in \partial_{Cl}\varphi(w)$, gdzie $c > 0$.

(ii) $\langle \xi_1 - \xi_2, w_1 - w_2 \rangle_{U^* \times U} \ge -d\|w_1 - w_2\|_U^2$ $\forall\, w_i \in U,\ \xi_i \in \partial_{Cl}\varphi(w_i),\ i = 1, 2$, gdzie $d > 0$.

Warunki $H(\varphi)$(i) i $H(\varphi)$(ii) nazywamy odpowiednio *warunkiem wzrostu* i *warunkiem zrelaksowanej monotoniczności*.

Ponadto przyjmijmy następujące założenie a-priori.

H_{ap} : Każdy z Problemów (Q) i $(Q)^h$ ma rozwiązanie odpowiednio u i u^h. Ponadto, istnieje stała $C > 0$ niezależna od h, taka, że $\|u\|_V < C$ i $\|u^h\|_V < C$ $\forall\, h > 0$.

Interesować nas będzie uzyskanie nierówności analogicznej do (105). Jednak w naszym przypadku musi ona zawierać elementy ξ i ξ^h występujące w równaniach (112) i (113) tak, aby możliwe było później rozumowanie odpowiadające wyprowadzeniu (107) z (106). Nierówność, która jest nam potrzebna ma postać

$$(\alpha - d\|\iota\|^2)\|u-u^h\|_V^2 \leq \left\langle Au - Au^h, u-u^h \right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi - \xi^h, \iota u - \iota u^h \right\rangle_{U^*\times U} \quad (114)$$

i wynika z $H(A)$(ii) oraz z $H(\varphi)$(ii). Możemy teraz, skorzystać z faktu, że dla każdego $v^h \in V^h$

$$\left\langle Au - Au^h, v^h \right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi - \xi^h, \iota v^h \right\rangle_{U^*\times U} = 0. \quad (115)$$

Równanie (115) otrzymujemy testując równość (112) elementem v^h i odejmując od niej stronami (113). Dzięki temu prawą stronę nierówności (114) możemy zapisać następująco

$$\begin{aligned} &\left\langle Au - Au^h, u-u^h \right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi - \xi^h, \iota u - \iota u^h \right\rangle_{U^*\times U} \\ &= \left\langle Au - Au^h, u-v^h \right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi - \xi^h, \iota u - \iota v^h \right\rangle_{U^*\times U}. \end{aligned} \quad (116)$$

Aby otrzymać (116) zastąpiliśmy wyrażenie $\left\langle Au - Au^h, u^h \right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi - \xi^h, \iota u^h \right\rangle_{U^*\times U}$ wyrażeniem $\left\langle Au - Au^h, v^h \right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi - \xi^h, \iota v^h \right\rangle_{U^*\times U}$. Oba wyrażenia są sobie równe, gdyż są równe 0 na mocy (115). Porównując (114) i (116) otrzymujemy

$$(\alpha - d\|\iota\|^2)\|u-u^h\|_V^2 \leq \left\langle Au - Au^h, u-v^h \right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi - \xi^h, \iota u - \iota v^h \right\rangle_{U^*\times U}. \quad (117)$$

Pierwszy składnik prawej strony można oszacować tak samo, jak w (108), natomiast w przypadku drugiego składnika możemy zastosować oszacowanie

$$\begin{aligned} &\left\langle \xi - \xi^h, \iota u - \iota v^h \right\rangle_{U^*\times U} \leq \|\xi - \xi^h\|_{U^*}\|\iota u - \iota v^h\|_U \leq (\|\xi\|_{U^*} + \|\xi^h\|_{U^*})\|\iota u - \iota v^h\|_U. \\ &\leq c(2 + \|\iota u\|_U + \|\iota u^h\|_U)\|\iota u - \iota v^h\|_U \leq c(2 + \|\iota\|(\|u\|_V + \|u^h\|_V))\|\iota u - \iota v^h\|_U \\ &\leq 2(c + \|\iota\| C)\|\iota u - \iota v^h\|_U := \bar{C}\|\iota u - \iota v^h\|_U. \end{aligned} \quad (118)$$

Nierówność (118) wynika z założeń $H(\varphi)$(i) oraz H_{ap}. Stosując drugą z nierówności (108) oraz nierówność (118) w (117), otrzymujemy

$$(\alpha - d\|\iota\|^2)\|u-u^h\|_V^2 \leq M\|u-u^h\|_V\|u-v^h\|_V + \bar{C}\|\iota u - \iota v^h\|_U. \quad (119)$$

Aby z nierówności (119) uzyskać oszacowanie błędu analogiczne do (110) musimy zacząć od założenia

$$\alpha > d\|\iota\|^2. \quad (120)$$

Zauważmy też, że w przeciwieństwie do (108), nierówności (119) nie możemy skrócić przez $\|u-u^h\|_V$. Zamiast tego możemy skorzystać z nierówności (69) i otrzymać

$$M\|u-u^h\|_V\|u-v^h\|_V \leq \varepsilon\|u-u^h\|_V^2 + \frac{M}{4\varepsilon}\|u-v^h\|_V^2. \quad (121)$$

Przyjmując w (121) $\varepsilon < \alpha - d\|\iota\|^2$ otrzymujemy z (119)

$$\|u-u^h\|_V^2 \leq O(\|u-v^h\|_V^2) + O(\|\iota u - \iota v^h\|_U), \quad (122)$$

lub równoważnie

$$\|u - u^h\|_V \leq O(\|u - v^h\|_V) + O(\sqrt{\|\iota u - \iota v^h\|_U}). \tag{123}$$

Widzimy, że obecność pochodzącego od subróżniczki Clarke'a składnika $\|\iota u - \iota v^h\|_U$ sprawia, że oszacowanie błędu w (123) może okazać się istotnie słabsze od oszacowania (109). Będzie tak na przykład w sytuacji, gdy (por. Wniosek 51)

$$\inf_{v^h \in V^h} \|u - v^h\|_V = O(h^\beta), \quad \inf_{v^h \in V^h} \|\iota u - \iota v^h\|_U = O(h^\gamma) \tag{124}$$

oraz $\gamma < 2\beta$.

Powyższe rozważania podsumujmy następującym wnioskiem.

WNIOSEK 52 *Oszacowaniu błędu dla inkluzji typu* (111) *towarzyszą następujące ograniczenia wynikające z obecności subróżniczki funkcji φ.*

(i) Konieczne jest uzyskanie oszacowań a-priori dla rozwiązań problemu dokładnego i przybliżonego przez stałą niezależną od parametru dyskretyzacji.

(ii) Subróżniczka $\partial_{Cl}\varphi$ funkcji φ musi spełniać warunek wzrostu i warunek zrelaksowanej monotoniczności.

(iii) Stałe występujące w warunku silnej monotoniczności operatora A i w warunku zrelaksowanej monotoniczności subróżniczki funkcji φ muszą spełniać pewną nierówność (por. (120)*).*

(iv) Aby obecność subróżniczki nie ,,popsuła" rzędu oszacowania, przestrzenie V, V^h i U muszą być tak dobrane, by aproksymacja elementu $\iota u \in U$ elementami ιv^h, $v_h \in V^h$ była co najmniej kwadratowo lepsza, niż aproksymacja elementu $u \in V$ elementami przestrzeni $v^h \in V^h$. Innymi słowy musi być $\gamma \geq 2\beta$, gdzie γ i β są wykładnikami we wzorach (124).

UWAGA 53 *Schemat postępowania prowadzący do oszacowania błędu dla inkluzji ewolucyjnej, mimo iż jest znacznie bardziej skomplikowany od schematu dla problemu stacjonarnego, opiera się na podobnym rozumowaniu jak ten opisany powyżej. W szczególności uwagi sformułowane we Wniosku 52 pozostają aktualne w przypadku ewolucyjnym.*

2.5.3 Oszacowanie błędu dla ewolucyjnej inkluzji typu Clarke'a

W tym podrozdziale zaprezentuję dwa podejścia do problemu przybliżania rozwiązań ewolucyjnej inkluzji typu Clarke'a. Pierwsze z nich to tzw. metoda Faedo-Galerkina, polegająca na przybliżaniu funkcji $u\colon [0,T] \to V$ będącej rozwiązaniem inkluzji wyjściowej funkcjami $u^h\colon [0,T] \to V^h$, będącymi rozwiązaniami tzw. schematu semidyskretnego odpowiadającego danej inkluzji. Nazwa ,,semidyskretny" uzasadniona jest sposobem dyskretyzacji polegającym na tym, że tylko przestrzeń V zostaje zdyskretyzowana (zastąpiona przestrzenią V^h), natomiast zmienna czasowa pozostaje ciągła. Drugi sposób opiera się na tzw. schemacie w pełni dyskretnym, w którym oprócz przestrzeni V zdyskretyzowany jest również przedział czasowy $[0,T]$.

W tym przypadku funkcja u przybliżana jest ciągiem $\{u_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$, będącym rozwiązaniem problemu w pełni dyskretnego odpowiadającego oryginalnej inkluzji ewolucyjnej. W powyższym oznaczeniu N jest liczbą kroków czasowych, na które podzielony jest przedział $[0,T]$.

Aby zilustrować obie metody dyskretyzacji, rozważmy jako przykład Problem $\mathcal{P}_V$ wprowadzony w Podrozdziale 2.3.3. Przypomnijmy, że w problemie tym przestrzeń V definiowana jest wzorem

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_1 \mid \boldsymbol{v} = 0 \text{ na } \Gamma_D,\ v_\nu = 0 \text{ na } \Gamma_C\}.$$

Niech V^h będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V i niech $\boldsymbol{u}_0^h$, $\boldsymbol{u}_1^h \in V^h$ będą przybliżeniami $\boldsymbol{u}_0$ i $\boldsymbol{u}_1$, spełniającymi warunki

$$\left\langle \boldsymbol{u}_0^h - \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}^h \right\rangle_{V^* \times V} = 0, \quad (\boldsymbol{u}_1^h - \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}^h)_H = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v}^h \in V^h. \tag{125}$$

Schematem semidyskretnym dla Problemu $\mathcal{P}_V$ nazywamy następujący problem.

Problem $\mathcal{P}_V^h$. *Znaleźć $\boldsymbol{u}^h \in L^2(0,T;V^h)$, $\boldsymbol{\xi}^h \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d))$ takie, że $\dot{\boldsymbol{u}}^h, \ddot{\boldsymbol{u}}^h \in L^2(0,T;V^h)$ oraz*

$$\begin{aligned} &\left\langle \rho\, \ddot{\boldsymbol{u}}^h(t) + A(t, \dot{\boldsymbol{u}}^h(t)) + B\boldsymbol{u}^h(t) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}^h \right\rangle_{V^* \times V} \\ &\qquad = \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\xi}_\tau^h(t) \cdot \boldsymbol{v}_\tau^h \, d\Gamma \quad \forall\, \boldsymbol{v}^h \in V^h,\ \textit{p.w. } t \in (0,T), \\ &-\boldsymbol{\xi}_\tau^h(t) \in \partial_{Cl} j(\dot{\boldsymbol{u}}_\tau^h(t)) \qquad \textit{p.w. na } \Gamma_C \times (0,T), \\ &\boldsymbol{u}^h(0) = \boldsymbol{u}_0^h, \quad \dot{\boldsymbol{u}}^h(0) = \boldsymbol{u}_1^h. \end{aligned}$$

Do oznaczenia pierwszej i drugiej pochodnej czasowej funkcji $\boldsymbol{u}^h$ w Problemie $\mathcal{P}_V^h$ używamy symboli $\dot{\boldsymbol{u}}^h$ i $\ddot{\boldsymbol{u}}^h$, gdyż oznaczenia $\boldsymbol{u}^{h'}$ i $\boldsymbol{u}^{h''}$ byłyby mniej czytelne. Aby zachować zgodność oznaczeń, w tym podrozdziale używać będziemy tej samej konwencji również dla innych funkcji zależnych od czasu.

Wprowadźmy teraz oznaczenia pozwalające na sformułowanie schematu w pełni dyskretnego dla Problemu $\mathcal{P}_V$. Oprócz dyskretyzacji przestrzennej polegającej na wprowadzeniu przestrzeni V^h, potrzebna nam będzie dyskretyzacja czasowa. Niech $N \in \mathbb{N}$ i niech $k = T/N$ będzie długością kroku czasowego. Rozważmy podział odcinka $[0,T]$ za pomocą równooddalonych punktów $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, gdzie $t_n = nk$ dla $n = 0,...,N$. Dla dowolnej funkcji ciągłej g określonej na przedziale $[0,T]$ oznaczmy $g_n = g(t_n)$ dla $n = 0,...,N$. Dla dowolnego ciągu $\{z_n\}_{n=0}^N$, oznaczmy $\delta z_n = (z_n - z_{n-1})/k$ dla $n = 1,\ldots,N$. Schematem w pełni dyskretnym dla Problemu $\mathcal{P}_V$ nazywamy następujący problem.

Problem $\mathcal{P}_V^{kh}$. *Znaleźć $\{\boldsymbol{w}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ i $\{\boldsymbol{\xi}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$, takie, że*

$$\begin{aligned} &\left\langle \rho\, \delta \boldsymbol{w}_n^{hk} + A(t_n, \boldsymbol{w}_n^{hk}) + B\boldsymbol{u}_n^{hk} - \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}^h \right\rangle_{V^* \times V} \\ &\qquad = \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\xi}_{n\,\tau}^{hk} \cdot \boldsymbol{v}_\tau^h \, d\,\Gamma \quad \forall\, \boldsymbol{v}^h \in V^h, \\ &-\boldsymbol{\xi}_{n\,\tau}^{hk} \in \partial_{Cl} j(\boldsymbol{w}_{n\,\tau}^{hk}) \qquad \textit{p.w. na } \Gamma_C,\ n = 0,\ldots,N, \\ &\boldsymbol{w}_0^{hk} = \boldsymbol{u}_1^h, \end{aligned}$$

gdzie ciąg $\{\boldsymbol{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ *zdefiniowany jest wzorem*

$$\boldsymbol{u}_n^{hk} = \boldsymbol{u}_0^h + \sum_{j=1}^{n} k\boldsymbol{w}_j^{hk}. \tag{126}$$

Aby sformułowanie Problemu $\mathcal{P}_V^{hk}$ było poprawne, przyjmujemy założenia

$$A(\cdot, \boldsymbol{v}) \in C(0,T;V^*) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \quad f \in C(0,T;V^*).$$

Wtedy wartości $A(t_n, \boldsymbol{w}_n^{hk})$ i $\boldsymbol{f}_n$ mają sens.

Niech $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}^h$ i $\{\boldsymbol{w}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ będą rozwiązaniami odpowiednio Problemów $\mathcal{P}_V$, $\mathcal{P}_V^h$ i $\mathcal{P}_V^{kh}$ oraz niech ciąg $\{\boldsymbol{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N$ będzie zdefiniowany wzorem (126). Błędami schematów semidyskretnego i w pełni dyskretnego będziemy nazywali odpowiednio wyrażenia

$$\boldsymbol{e}^h := \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h\|_{C(0,T;V)} + \|\dot{\boldsymbol{u}} - \dot{\boldsymbol{u}}^h\|_{C(0,T;H)} + \|\dot{\boldsymbol{u}} - \dot{\boldsymbol{u}}^h\|_{\mathcal{V}}. \tag{127}$$

$$\boldsymbol{e}^{hk} := \max_{1\le n\le N}\{\|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_n^{hk}\|_V + \|\dot{\boldsymbol{u}}_n - \boldsymbol{w}_n^{hk}\|_H\}. \tag{128}$$

Z Lematu 49 wynika, że wyrażenia $\boldsymbol{e}^h$ i $\boldsymbol{e}^{hk}$ są dobrze zdefiniowane.

W Rozdziale 3 omówię wyniki prac [A7]-[A10], poświęcone oszacowaniu błędów analogicznych do $\boldsymbol{e}^h$ i $\boldsymbol{e}^{hk}$. Procedura prowadząca do tych rezultatów składa się z dwóch etapów. Pierwszy z nich polega na wyprowadzeniu nierówności analogicznych do (122), w których błąd schematu oszacowany jest przez różnicę $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}^h$ między rozwiązaniem Problemu $\mathcal{P}_V$, a dowolnym elementem $\boldsymbol{v}^h \in L^2(0,T;V^h)$ w pewnej normie związanej z przestrzenią V oraz różnicę $\iota\boldsymbol{u} - \iota\boldsymbol{v}^h$ w pewnej normie związanej z przestrzenią $U := L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$. (W Problemie $\mathcal{P}_V$ rolę operatora ι pełni operator śladu $\gamma\colon V \to L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$ złożony z operatorem brania części stycznej wektora na brzegu Γ_C). Drugi etap polega na oszacowaniu różnic $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^h$ oraz $\iota\boldsymbol{u} - \iota\boldsymbol{v}^h$ przez wielkości zależne od parametru h, przy czym jakość tego oszacowania jest tym lepsza, im lepiej potrafimy przybliżać element $\boldsymbol{u}$ elementami $\boldsymbol{v}^h \in V^h$ w przestrzeni V oraz element $\iota\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_\tau$ elementami $\iota\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\tau$ w przestrzeni $L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$. Efektywność tych przybliżeń zależy oczywiście od dwóch rzeczy, mianowicie od tego, jak zdefiniowana jest przestrzeń V^h oraz jakie własności ma element $\boldsymbol{u}$. Rozważmy zatem konkretną sytuację w której V^h jest przestrzenią funkcji zdefiniowanych w oparciu o metodę elementów skończonych. Załóżmy, że Ω jest wielokątem w $\mathbb{R}^2$ albo wielościanem w $\mathbb{R}^3$. Wtedy każdy z fragmentów brzegu Γ_D, Γ_N, Γ_C jest sumą odcinków (w przypadku gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) lub wielokątów (gdy $\Omega \subset \mathbb{R}^3$), o wzajemnie rozłącznych wnętrzach, tj.

$$\bar{\Gamma}_j = \bigcup_{i=1}^{N_j} \Gamma_{j,i}, \quad j \in \{D,N,C\}.$$

Niech $\{\mathcal{T}^h\}$ będzie regularną rodziną triangulacji zbioru $\bar{\Omega}$ o średnicy h (por. [5], Rozdział 3, § 3.1), która dzieli $\bar{\Omega}$ na trójkąty/czworościany zgodnie z podziałem brzegu $\partial\Omega$ na fragmenty $\Gamma_{j,i}$, $1 \le i \le N_j$, $j \in \{D,N,C\}$, w tym sensie, że jeżeli krawędź trójkąta/ściana czworokąta należącego do $\mathcal{T}^h$ ma z którymś ze zbiorów $\Gamma_{j,i}$ przecięcie o dodatniej mierze brzegowej, to cała krawędź/ściana zawiera się w $\Gamma_{j,i}$.

Dla elementu $T \in \mathcal{T}^h$ niech $P_1(T)$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia 1 na T. Wtedy V^h definiujemy jako przestrzeń funkcji ciągłych, kawałkami afinicznych na elementach $T \in T^h$, czyli

$$V^h = \{\boldsymbol{v}^h \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d) \mid \boldsymbol{v}^h|_T \in [P_1(T)]^d \quad \forall T \in \mathcal{T}^h\} \cap V. \tag{129}$$

Niech $\boldsymbol{v}^h = \Pi^h \boldsymbol{u}$, gdzie $\Pi^h \colon V \to V^h$ jest operatorem interpolacji w metodzie elementów skończonych (zob. [5], (2.3.29)). Wtedy $\boldsymbol{v}^h_\tau = (\Pi^h \boldsymbol{u})_\tau$ jest ciągłym, kawałkami liniowym interpolantem elementu $\boldsymbol{u}_\tau$ na Γ_C oraz zachodzi następujące twierdzenie wynikające ze standardowych oszacowań błędu dla interpolacji w metodzie elementów skończonych ([1, 4, 5]).

TWIERDZENIE 54 *Jeżeli $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$ i $\boldsymbol{u}_\tau \in H^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d)$, to*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^h\|_V \le ch\|\boldsymbol{u}\|_{H^2(\Omega;\mathbb{R}^d)},$$
$$\|\boldsymbol{u}_\tau - \boldsymbol{v}^h_\tau\|_{L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)} \le ch^2\|\boldsymbol{u}_\tau\|_{H^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)}.$$

WNIOSEK 55 *Z Twierdzenia 54 wynika, że rząd przybliżenia $\boldsymbol{u}_\tau$ przez $\boldsymbol{v}^h_\tau$ w normie $L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d)$ jest „kwadratowo" lepszy od rzędu przybliżenia $\boldsymbol{u}$ przez $\boldsymbol{v}$ w normie V. Dzięki temu obecność subróżniczki w problemie nie wpływa negatywnie na rząd oszacowania (por. Wniosek 52 (iv)).*

3 Szczegółowe omówienie osiągniętych rezultatów

W tym rozdziale omówię osobno wyniki uzyskane w poszczególnych pracach wchodzących w skład prezentowanego cyklu. Oznaczenia wprowadzone w poprzednich rozdziałach pozostają aktualne, chyba że zostaną zmienione w opisie poszczególnych artykułów w celu zachowanie zgodności z oznaczeniami oryginalnymi.

3.1 [A1] Numerical methods for evolution hemivariational inequalities

W pracy tej rozważane są równolegle dwa problemy oznaczone symbolami (P^1) i (P^2). Pierwszy z nich jest tożsamy z Problem $(P)_E$ a drugi z Problemem $(P')_E$ wprowadzonymi w Podrozdziale 2.2. Różnica między Problemami (P^1) i (P^2) polega na tym, że w pierwszym z nich składnikiem wielowartościowym jest wyrażenie $\iota^*\partial_{Cl}J(\iota u(t))$ (subróżniczka zależy od szukanej funkcji u), natomiast w drugim występuje wyrażenie $\iota^*\partial_{Cl}J(\iota u'(t))$ (subróżniczka zależy od pochodnej szukanej funkcji u). W analizie obu problemów przyjęte są założenia $H(A)$, $H(B)$, $H(J)$, H_0, $H(\iota)$ i H_{aux} wprowadzone w Podrozdziale 2.4.1. Przy powyższych założeniach wykazane zostało istnienie rozwiązania obu problemów ([A1], Twierdzenie 5.19). Dowód przeprowadzony został metodą dyskretyzacji czasowej opisaną szczegółowo w Podrozdziale 2.4. Oprócz tego przy odpowiednio wzmocnionych założeniach wykazana została silna zbieżność ciągu rozwiązań przybliżonych u_τ do rozwiązania dokładnego u Problemu (P^i), $i = 1, 2$ w przestrzeni $C(0, T; V)$ ([A1], Twierdzenie 5.22). Ponadto, dla Problemu (P^2) wykazana została jednoznaczność rozwiązania ([A1], Twierdzenie 5.21).

Aby sformułować powyższe rezultaty, wprowadźmy następujące założenia.

$H(A)_1$: Spełnione są założenia $H(A)$ oraz zachodzi warunek $\langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2\rangle_{V^*\times V} \geq m_1\|v_1 - v_2\|_V^2 - m_2\|v_1 - v_2\|_H^2$ $\forall\, v_1, v_2 \in V$, gdzie $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$.

$H(A)_2$: Spełnione są założenia $H(A)$ i dodatkowo operator Niemyckiego $\mathcal{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ jest typu (S_+) względem przestrzeni $M^{2,2}(0,T;V,V^*)$, tzn. jeżeli $v_n \rightharpoonup v$ w $\mathcal{V}$, $\limsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}v_n, v_n - v\rangle_{\mathcal{V}^*\times\mathcal{V}} \leq 0$ oraz v_n jest ograniczony w $M^{2,2}(0,T;V,V^*)$, to $v_n \to v$ w $\mathcal{V}$.

$H(J)_1$: Spełnione są założenia $H(J)$ i dodatkowo $\langle \eta_1 - \eta_2, z_1 - z_2\rangle_{U^*\times U} \geq -m_3\|z_1 - z_2\|_U^2$ $\forall\, z_1, z_2 \in U$, $\eta_i \in \partial_{Cl} J(z_i)$, $i = 1, 2$, gdzie $m_3 \geq 0$.

H_{const} : Spełniony jest warunek H_{aux} lub warunek $m_1 \geq m_3\|\iota\|^2$.

Uwaga 56 *Stosując Twierdzenie 33 dla trójki przestrzeni $V \subset H \subset V^*$ oraz dla $p = q = 2$, łatwo zauważyć, że warunek $H(A)_1$ jest silniejszy od warunku $H(A)_2$, tzn. $H(A)_1$ implikuje $H(A)_2$.*

Podamy teraz wspomniane już twierdzenia o silnej zbieżności ciągu funkcji u_τ zdefiniowanego w Podrozdziale 2.4.5 do rozwiązania dokładnego u Problemu (P^i), $i = 1, 2$ oraz o jednoznaczności rozwiązania Problemu (P^2).

Twierdzenie 57 *Jeżeli spełnione są założenia $H(A)_2, H(B), H(J), H_0$ i H_{aux}, oraz $u_\tau^0 \to u_0$ w V przy $\tau \to 0$, to $u_\tau \to u$ w $C(0,T;V)$ przy $\tau \to 0$.*

Twierdzenie 58 *Jeżeli spełnione są założenia $H(A)_1, H(B), H(J)_1, H_0$ i H_{const}, to Problem (P^2) ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

W pracy [A1] podany został też wynik dotyczący oszacowań błędu między rozwiązaniem dokładnym Problemu (P^2), a jego rozwiązaniami przybliżonymi uzyskanymi w oparciu o schematy semidyskretny i w pełni dyskretny. Wynik ten udowodniony został w pracy [A7], a w pracy [A1] został jedynie zacytowany. Omówiony też został problem mechaniki kontaktowej P_M tożsamy z Problemem $\mathcal{P}$ sformułowanym pod koniec Podrozdziału 2.3.2, przy założeniu, że użyte w nim prawo tarcia może mieć charakter niemonotoniczny (por. Uwaga 42). Wskazane zostało, że wariacyjne sformułowanie Problemu $\mathcal{P}$ jest tożsame z Problemem (P^2), w związku z czym rezultat dotyczący istnienia i jednoznaczności jego rozwiązania implikuje istnienie i jednoznaczność słabego rozwiązania Problemu P_M.

3.2 [A2] Variable time-step theta-scheme for nonlinear second order evolution inclusion

Rezultat otrzymany w pracy [A2] stanowi uogólnienie rezultatu otrzymanego w pracy [A1] dla Problemów (P^1) i (P^2). Uogólnienie to wynika z następujących różnic między Problemami (P^i), $i = 1, 2$ badanymi w pracy [A2] w stosunku do ich odpowiedników w pracy [A1].

1. W pracy [A2] szukaną jest funkcja u z przestrzeni $\mathcal{V} = L^p(0,T;V)$, $1 < p < \infty$. W związku z tym, pozostałe przestrzenie zdefiniowane są jako $\mathcal{V}^* = L^q(0,T;V^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} \mid v' \in \mathcal{V}^*\}$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$, $\mathcal{U} = L^p(0,T;U)$, $\mathcal{U}^* = L^q(0,T;U^*)$ (por. Podrozdział 2.2). Dla porównania w pracy [A1] przyjmuje się $p = q = 2$.

2. Zamiast operatora $A\colon V \to V^*$ w Problemach (P^i), $i = 1,2$ występuje operator $A\colon [0,T] \times V \to V^*$. Jest więc on także zależny od czasu. Ponadto, zamiast wyrażeń wielowartościowych $\partial_{Cl} J(\iota u(t))$ w Problemie (P^1) i $\partial_{Cl} J(\iota u'(t))$ w Problemie (P^2), występują odpowiednio wyrażenia $M(t, \iota u(t))$ i $M(t, \iota u'(t))$, gdzie $M\colon [0,T] \times U \to 2^{U^*}$ jest dowolną multifunkcją, przy czym założenia o M są tak dobrane, że w szczególności spełnia je subróżniczka $\partial_{Cl} J(\iota \cdot)$ występująca w Problemach (P^i), $i = 1,2$ w pracy [A1]. Jednak najistotniejsze uogólnienie polega na zależności multifunkcji M od zmiennej czasowej, podobnie jak w przypadku operatora A. Wprowadzenie tego uogólnienia wiąże się ze znaczącym utrudnieniem w realizacji metody dyskretyzacji czasowej.

3. Metoda dyskretyzacji czasowej oparta jest na podziale odcinka $[0,T]$ na podprzedziały, które nie muszą mieć równej długości. Zakładamy o nich jedynie, że $\lim_{n\to\infty} \tau_n^{max} = 0$ oraz $\tau_n^{max} \le K \tau_n^{min}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie τ_n^{max} i τ_n^{min} oznaczają odpowiednio długość najdłuższego i najkrótszego podprzedziału w n-tym podziale, a stała $K > 0$ nie zależy od n. Dla porównania w pracy [A1] zastosowany jest równomierny podział przedziału czasowego (por. (63)).

4. Metoda dyskretyzacji czasowej oparta jest na tzw. schemacie Θ. Liczba $\Theta \in [0,1]$ jest parametrem, a schemat opiera się na wprowadzeniu następujących przybliżeń

$$\begin{aligned}
&u(t_{k-1+\Theta}) \simeq \Theta u_\tau^{k-1} + (1-\Theta) u_\tau^k, && w(t_{k-1+\Theta}) \simeq \Theta w_\tau^{k-1} + (1-\Theta) u_\tau^k,\\
&u'(t_{k-1+\Theta}) \simeq \tfrac{1}{\tau}(u_\tau^k - u_\tau^{k-1}), && w'(t_{k-1+\Theta}) \simeq \tfrac{1}{\tau}(w_\tau^k - w_\tau^{k-1}),\\
&\eta(t_{k-1+\Theta}) \simeq \eta_\tau^k, && f(t_{k-1+\Theta}) \simeq f_\tau^k.
\end{aligned} \tag{130}$$

We wzorach (130) $t_{k-1+\Theta} := t_{k-1} + \Theta(t_k - t_{k-1})$ jest punktem należącym do przedziału $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1,...,N$. W pracy [A2] schemat dyskretny (P_n^m), $m = 1,2$ otrzymujemy zapisując ewolucyjną inkluzję różniczkową oznaczoną jako Problem (P^m), $m = 1,2$ w punktach $t_{k-1+\Theta}$, $k = 1,...,N$ i używając przybliżeń (130). Łatwo zauważyć, że dla $\Theta = 1$ wzory (130) redukują się do wzorów (67).

Podobnie jak w pracy [A1], głównym rezultatem pracy [A2] jest wykazanie istnienia rozwiązania badanych inkluzji ewolucyjnych w oparciu o metodę dyskretyzacji czasowej ([A2], Twierdzenie 24). W Rozdziale 6 pracy [A2] wskazane zostało zastosowanie uzyskanego rezultatu do dwóch brzegowych nierówności hemiwariacyjnych określanych jako Problemy $\mathrm{HVI}_{\mathbf{1}}$ i $\mathrm{HVI}_{\mathbf{2}}$ ([A2], Twierdzenie 26). Problemy te były badane w pracy [15], ale tylko w przypadku $p = 2$. Oprócz tego w pracy [15] zakładane były ograniczenia (H_1) i $(\tilde{H}_1)$, dotyczące stałych występujących w problemie. W pracy [A2] udało się tych ograniczeń uniknąć w przypadku $p = 2$.

Było to możliwe dzięki założeniu $H(U)$, które jest odpowiednikiem założenia H_{aux} wprowadzonego w Podrozdziale 2.4.1 (por. Wniosek 48). Ponadto w pracy [A2] użyte jest słabsze założenie dotyczące koercytywności operatora A niż w pracy [15]. Mianowicie zamiast warunku $\langle A(t,v),v\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha\|v\|^p$, $\alpha > 0$, zakładamy, że $\langle A(t,v),v\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha\|v\|^p - \beta\|v\|_H^2$, dla każdego $v \in V$, $\alpha,\beta > 0$. Dzięki temu, otrzymany wynik ma zastosowanie dla problemu kontaktowego z ciałem swobodnym (por. Wniosek 45). Podsumowując, wynik otrzymany w pracy [A2] stanowi istotne poprawienie wyników otrzymanych w [15].

3.3 [A3] Modeling and analysis of a contact problem for a viscoelastic rod

Punktem wyjścia w pracy [A3] jest następujący abstrakcyjny problem.

Problem $\mathcal{P}$. *Znaleźć $u \in \mathcal{W}$, takie, że $u_t \in \mathcal{W}$ i $u_{tt} \in \mathcal{W}^*$ oraz*

$$\begin{aligned}
&u_{tt}(t) + Au_t(t) + Bu(t) + Cu(t) + \gamma^* M(\gamma u_t(t)) \ni F(t) \quad \textit{dla p.w. } t \in [0,T],\\
&u(0) = u_0, \quad u_t(0) = v_0.
\end{aligned}$$

Zanim wyjaśnię znaczenie operatorów i przestrzeni występujących w Problemie $\mathcal{P}$, opiszę stojącą za nim motywację fizyczną. Problem ten stanowi słabe sformułowanie zagadnienia matematycznego opisującego zachowanie jednowymiarowego lepkosprężystego pręta zajmującego odcinek $(0,L)$, $L > 0$, na który działa siła zewnętrzna o gęstości f. Pręt jest przymocowany w punkcie $x = 0$ natomiast w punkcie $x = L$ rozpatrujemy jego kontakt z przeszkodą. Ponadto, pręt jest połączony z urządzeniem tłumiącym jego odkształcenie. Składa się ono z dwóch elementów: sprężyny, której opór jest reakcją na odkształcenie pręta $\varepsilon = u_x$, oraz amortyzatora, którego reakcja jest zależna od prędkości $\varepsilon_t = u_{xt}$ (aby zachować zgodność oznaczeń z pracą [A3], dla dowolnej funkcji $w = w(x,t)$ oznaczamy $w_x = \partial w/\partial x$ i $w_t = \partial w/\partial t$). Prawo konstytutywne użyte w modelu ma postać

$$\sigma(x,t) = \eta|u_{xt}(x,t)|^{p-2}u_{xt}(x,t) + Eu_x(x,t), \tag{131}$$

gdzie $\eta > 0$ jest współczynnikiem lepkości, $E > 0$ modułem Young'a, a $p \geq 2$. Ponadto równanie zachowania będące jednowymiarowym odpowiednikiem równania (28) ma postać

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = \sigma_x(x,t) + \mathcal{F}(x,t) \qquad \forall\, x \in [0,L],\ t \in [0,T]. \tag{132}$$

W równaniu (132) $\rho = \rho(x)$ oznacza gęstość masy, a $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x,t)$ gęstość siły działającej na pręt. Zgodnie z wcześniejszym opisem układu, $\mathcal{F}$ jest sumą trzech składowych: gęstości siły zewnętrznej f, siły reakcji ψ pochodzącej od amortyzatora oraz siły reakcji ξ pochodzącej od sprężyny. A zatem

$$\mathcal{F}(x,t) = f(x,t) + \psi(x,t) + \xi(x,t) \qquad \forall\, x \in [0,L],\ t \in [0,T]. \tag{133}$$

Zakładamy, że reakcje amortyzatora i sprężyny opisane są za pomocą nieliniowych funkcji odpowiednio g i h, mianowicie

$$\psi(x,t) = -g(u_t(x,t)) \qquad \forall\, x \in [0,L],\ t \in [0,T], \tag{134}$$

$$\xi(x,t) = -h(u(x,t)) \qquad \forall\, x \in [0,L],\ t \in [0,T]. \tag{135}$$

Biorąc pod uwagę warunki (131)-(135) otrzymujemy następujące równanie równowagi

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) - (\eta |u_{xt}(x,t)|^{p-2} u_{xt}(x,t))_x - E u_{xx}(x,t) \\ &\quad + g(u_t(x,t)) + h(u(x,t)) = f(x,t) \qquad \forall\, x \in [0,L],\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{136}$$

Przejdźmy teraz do opisu warunków brzegowych. Ponieważ pręt jest przytwierdzony w punkcie $x = 0$, przemieszczenie w tym punkcie nie występuje, a więc

$$u(0,t) = 0 \qquad \forall\, t \in [0,T]. \tag{137}$$

Ponadto kontakt prawego końca pręta $x = L$ z przeszkodą modelujemy za pomocą inkluzji w postaci

$$-\sigma(L,t) \in \partial_{Cl} j(u_t(L,t)) \qquad \forall\, t \in [0,T], \tag{138}$$

gdzie j może być funkcją niewypukłą. Wreszcie określamy warunki początkowe w postaci

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = v_0(x) \qquad \forall\, t \in [0,T], \tag{139}$$

gdzie u_0 i v_0 są danymi funkcjami. W oparciu o powyższe warunki formułujemy następujący problem.

Problem P. *Znaleźć funkcję przemieszczenia* $u\colon [0,L] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *spełniającą równanie równowagi* (136)*, warunki brzegowe* (137), (138) *oraz warunki początkowe* (139).

W analizie Problemu P wprowadzamy oznaczenia $2 \le p < \infty$, $1 < q \le 2$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz przyjmujemy następujące założenia o funkcjach g, h, j i f.

$H(g):$ $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

(i) g jest ciągła.

(ii) $\underline{g} := \inf_{s \in \mathbb{R}} g(s)s > -\infty$.

(iii) $|g(s)| \le c_g(1 + |s|^{p-1}) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$, gdzie $c_g > 0$.

$H(h):$ $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

(i) $|h(s)| \le c_h(1 + |s|^{\frac{2}{q}}) \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$ gdzie $c_h > 0$.

(ii) $|h(r) - h(s)| \le \bar{h}\,(\max\{|r|, |s|\})\, |s - r|^{\frac{1}{q}} \quad \forall\, r, s \in \mathbb{R}$, gdzie $\bar{h}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą.

$H(j):$ $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

(i) j jest lokalnie lipszycowska.

(ii) $|\xi| \le c_j(1 + |s|^{p-1}) \quad \forall\, \xi \in \partial j(s)$, gdzie $c_j > 0$.

$H(f):\ f \in L^q([0,T]\times[0,L])$.

Następnie wprowadzamy przestrzenie

$W = \{\, v \in W^{1,p}(0,L) \mid v(0)=0 \,\}, \quad V = \{\, v \in H^1(0,L) \mid v(0)=0 \,\},\ H = L^2(0,L)$

z normami

$$\|v\|_W^p = \int_0^L |v_x|^p\,dx, \quad \|v\|_V^2 = \int_0^L |v_x|^2\,dx, \quad \|v\|_H^2 = \int_0^L |v|^2\,dx$$

i definiujemy operatory $A\colon W \to W^*$, $B\colon V \to V^*$ i $C\colon V \to W^*$ określone wzorami

$$\langle Au, v\rangle_{W^*\times W} = \eta \int_0^L |u_x|^{p-2} u_x v_x\,dx + \int_0^L g(u)v\,dx \quad \forall\, u,v \in W,$$

$$\langle Bu, v\rangle_{V^*\times V} = E\int_0^L u_x v_x dx \quad \forall\, u \in V,\ v \in V,$$

$$\langle Cu, v\rangle_{W^*\times W} = \int_0^L h(u)v\,dx \quad \forall\, u \in V,\ v \in W.$$

Definiujemy również funkcjonał $F\colon [0,T] \to W^*$ określony wzorem

$$\langle F(t), v\rangle_{W^*\times W} = \int_0^L f(t)v\,dx \quad \forall\, v \in W.$$

Ponadto wprowadzamy przestrzenie $\mathcal{W} = L^p(0,T;W)$, $\mathcal{V} = L^p(0,T;V)$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$ i $\mathcal{U} = L^p(0,T)$. Przestrzenie do nich dualne mają postać odpowiednio $\mathcal{W}^* = L^q(0,T;W^*)$, $\mathcal{V}^* = L^q(0,T;V^*)$ i $\mathcal{U}^* = L^q(0,T)$.
Możemy teraz wprowadzić pojęcie słabego rozwiązania Problemu P.

Definicja 59 *Funkcję $u \in \mathcal{W}$ nazywamy słabym rozwiązaniem Problemu P, jeżeli $u_t \in \mathcal{W}$, $u_{tt} \in \mathcal{W}^*$ i*

$$\begin{aligned}
&\langle u_{tt}(t) + Au_t(t) + Bu(t) + Cu(t), v\rangle_{W^*\times W} + \xi(t)v(L) = \langle F(t), v\rangle_{W^*\times W} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, v \in W,\ \textit{p.w. } t \in (0,T), \\
&\xi(t) \in \partial j(u_t(L,t)) \qquad\qquad\qquad\quad \textit{dla p.w. } t \in (0,T), \\
&u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = v_0(x) \qquad \textit{dla p.w. } x \in (0,L).
\end{aligned}$$

Słabe sformułowanie użyte w Definicji 59 można uzyskać z równania (136) w Problemie P przez pomnożenie go przez funkcję testową $v \in W$ i wykonanie całkowania przez części.
Zdefiniujmy teraz multifunkcję $M\colon \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ jako $M(s) = \partial j(s)$ dla $s \in \mathbb{R}$ oraz operator $\gamma\colon W \to \mathbb{R}$ jako $\gamma v = v(L)$ dla $v \in W$. Zauważmy, że $W \subset C(0,L)$ i wartość $v(L)$ jest rozumiana jako wartość funkcji będącej ciągłym reprezentantem $v \in W$ w punkcie L. Dzięki temu oprator γ jest dobrze zdefiniowany.

Przy tych oznaczeniach rozważmy ponownie Problem $\mathcal{P}$ sformułowany na początku podrozdziału i zauważmy, że w myśl Definicji 59, każde jego rozwiązanie jest słabym rozwiązaniem Problemu P. Dlatego też główna część pracy [A3] poświęcona jest wykazaniu istnienia rozwiązania Problemu $\mathcal{P}$. Aby przytoczyć rezultat dotyczący tej kwestii, wprowadźmy dodatkowe założenia.

H_0 : $\quad u_0 \in V,\ v_0 \in H.$

H_{const} : $\quad \eta > c_j \|\gamma\|^p.$

Następujące twierdzenie ([A3], Twierdzenie 5.13) gwarantuje istnienie rozwiązania Problemu $\mathcal{P}$.

TWIERDZENIE 60 *Załóżmy, że spełnione są warunki $H(g)$, $H(h)$, $H(j)$, $H(f)$ i H_0. Ponadto, załóżmy, że $p = 2$ albo że spełniony jest warunek H_{const}. Wtedy Problem $\mathcal{P}$ ma rozwiązanie (tym samym Problem P ma słabe rozwiązanie).*

Dowód Twierdzenia 60 przeprowadzony został metodą dyskretyzacji czasowej opisaną w Podrozdziale 2.4. Zwróćmy jednak uwagę na różnice między analizowanym tam Problemem $(P)_E$, a Problemem $\mathcal{P}$ z pracy [A3]. Aby móc dokładnie porównać oba problemy, warto przyjrzeć się warunkom, które wynikają z założeń $H(g)$, $H(h)$, $H(j)$, $H(f)$ na temat operatorów występujących w Problemie $\mathcal{P}$. Mówią o tym następujące lematy pochodzące z pracy [A3].

LEMAT 61 *Jeżeli spełnione są założenia $H(g)$, to operator $A\colon W \to W^*$ spełnia warunki*

(i) $\|Au\|_{W^*} \le c_A(1 + \|u\|_W^{p-1}) \quad \forall\, u \in W$, *gdzie* $c_A = \eta + c_g$.

(ii) $\langle Au, u\rangle_{W^*\times W} \ge \eta\|u\|_W^p + L\,\underline{g} \quad \forall\, u \in W.$

(iii) A jest pseudomonotoniczny.

LEMAT 62 *Operator $B\colon V \to V^*$ jest liniowy, ograniczony, symetryczny i silnie dodatni, przy czym*

$$\langle Bu, u\rangle_{V^*\times V} = E\|u\|_V^2, \quad \|Bu\|_{V^*} = E\|u\|_V \quad \forall\, u \in V.$$

LEMAT 63 *Jeżeli spełnione są założenia $H(h)$, to operator $C\colon V \to W^*$ spełnia warunki*

(i) $\|Cv\|_{W^*} \le \beta_C(1 + \|v\|_V^{\frac{2}{q}}) \quad \forall\, v \in V$, *gdzie* $\beta_C > 0$.

(ii) Istnieje niemalejąca funkcja $\bar{C}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że

$$\|Cv - Cw\|_{W^*} \le \bar{C}(\max\{\|v\|_V, \|w\|_V\})\|v - w\|_H^{\frac{1}{q}} \quad \forall\, v, w \in V.$$

(iii) C jest silnie ciągły.

LEMAT 64 *Jeżeli spełnione są założenia $H(j)$, to operator M spełnia warunki*

(i) Dla wszystkich $u \in \mathbb{R}$, $M(u)$ jest zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym.

(ii) M jest górnie półciągły.

(iii) $|\xi| \leq c_j(1+|s|^{p-1}) \quad \forall\, w \in \mathbb{R},\ \xi \in M(s).$

LEMAT 65 *Operator* $\gamma\colon W \to \mathbb{R}$ *jest liniowy i silnie ciągły.*

LEMAT 66 *Operator* $\gamma^* M(\gamma(\cdot))\colon W \to 2^{W^*}$ *jest pseudomonotoniczny.*

Porównując powyższe warunki z założeniami sformułowanymi w Podrozdziale 2.4.1 widać, że jedyna istotna różnica między Problemami $\mathcal{P}$ i $(P)_E$ wynika z obecności operatora C. Z drugiej jednak strony jego własności wynikające z Lematu 63, w szczególności silna ciągłość, sprawiają, że mimo oczywistych utrudnień technicznych, możliwa jest realizacja schematu opisanego w Podrozdziałach 2.4.2-2.4.6.

3.4 [A4] Convergence of a time discretization for nonlinear second order inclusion

W pracy rozważany jest następujący problem.

Problem $\mathcal{P}$. *Znaleźć* $u \in \mathcal{W}$ *takie, że* $u' \in \mathcal{W}$, $u'' \in \mathcal{W}^*$ *oraz*

$$\begin{aligned} &u''(t) + A(t,u'(t)) + B(t,u(t)) + \gamma^* M(\gamma u'(t)) \ni f(t) \ \ \textit{dla p.w. } t \in (0,T), \quad (140)\\ &u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \end{aligned}$$

Aby opisać występujące w nim przestrzenie i operatory, wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech W i V będą refleksywnymi przestrzeniami Banacha, a H przestrzenią Hilberta oraz niech $W \subset V \subset H$, gdzie wszystkie włożenia są gęste i ciągłe. Zakładamy również, że włożenie $W \subset H$ jest zwarte. Biorąc pod uwagę przestrzenie W^* i V^* dualne odpowiednio do W i V otrzymujemy relację

$$W \subseteq V \subseteq H \subseteq V^* \subseteq W^*.$$

Niech U będzie refleksywną przestrzenią Banacha, dla której istnieje zwarty operator $\gamma\colon W \to U$. Dla $T > 0$, $p \geq 2$ definiujemy przestrzenie $\mathcal{W} = L^p(0,T;W)$, $\mathcal{V} = L^p(0,T;V)$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$, $\mathcal{U} = L^p(0,T;U)$. Przestrzeniami dualnymi do nich są odpowiednio $\mathcal{W}^* = L^q(0,T;W^*)$, $\mathcal{V}^* = L^q(0,T;V^*)$, $\mathcal{U}^* = L^q(0,T;U^*)$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Przyjmujemy następujące założenia na temat operatorów występujących w Problemie $\mathcal{P}$.

$H(A)$: $A\colon [0,T] \times W \to W^*$ spełnia warunki

(i) Odwzorowanie $t \mapsto A(t,v)$ jest ciągłe $\ \forall\, v \in W$.

(ii) $\|A(t,v)\|_{W^*} \leq \beta_A\big(1 + \|v\|_W^{p-1}\big)$ dla p.w. $t \in (0,T)$, $\ \forall\, v \in W$, gdzie $\beta_A > 0$.

(iii) $\langle A(t,v), v\rangle_{W^* \times W} \geq \mu_A \|v\|_W^p - \beta\|u\|_H^2 - \lambda \ \ \forall\, v \in W$, gdzie $\mu_A > 0$, $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) Operator $v \mapsto A(t,v)$ jest pseudomonotoniczny $\ \forall\, t \in [0,T]$.

Operator $B\colon [0,T] \times V \to W^*$ ma postać sumy $B(t,v) = B_0(v) + C(t,v)$, gdzie

$H(B_0)$: $B_0 \in \mathcal{L}(V, V^*)$ jest symetryczny i silnie dodatni ze stałymi $\mu_B, \beta_B > 0$ takimi, że

$$\langle B_0 v, v\rangle \geq \mu_B \|v\|_V^2, \qquad \|B_0 v\| \leq \beta_B \|v\|_V \qquad \forall\, v \in V.$$

$H(C)$: $C\colon [0,T] \times V \to W^*$ spełnia warunki

(i) Funkcja $t \mapsto C(t,v)$ jest ciągła $\forall\, v \in V$.

(ii) $\|C(t,v)\|_{W^*} \leq \beta_C(1 + \|v\|_V^{\frac{2}{q}})$ $\forall\, v \in V$, p.w. $t \in (0,T)$, gdzie $\beta_C > 0$.

(iii) $\|C(t,v) - C(t,w)\|_{W^*} \leq \alpha(\max(\|v\|_V, \|w\|_V))\|v - w\|_H^{\frac{1}{q}}$ $\forall t \in [0,T]$, $v, w \in V$, gdzie $\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją niemalejącą.

$H(M)$: $M\colon U \to 2^{U^*}$ spełnia warunki

(i) Dla każdego $u \in U$, $M(u)$ jest zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym.

(ii) M jest górnie półciągła w topologii $(s\text{-}U) \times (w\text{-}U^*)$.

(iii) $\|\eta\|_{U^*} \leq c_M(1 + \|w\|_U^{p-1})$, $\forall\, w \in U$, $\eta \in M(w)$.

$H(f)$: $f \in \mathcal{W}^*$.

$H(\gamma)$: $\gamma\colon W \to U$ jest liniowy, ciągły i zwarty. Ponadto odpowiadający mu operator Niemyckiego $\bar{\gamma}\colon M^{p,q}(0,T; W, W^*) \to L^q(0,T; U^*)$ jest zwarty.

H_0 : $\mu_A > c_M \|\gamma\|^p_{\mathcal{L}(W,U)}$.

Biorąc pod uwagę rozkład $B(t,v) = B_0(v) + C(t,v)$, na pierwszy rzut oka widać podobieństwo Problemu $\mathcal{P}$ do problemu z pracy [A3]. Również założenia dotyczące operatorów w Problemie $\mathcal{P}$ odpowiadają warunkom z pracy [A3]. Różnica polega na tym, że w pracy [A4] operatory A i C są dodatkowo zależne od czasu. Jednak mimo oczywistych podobieństw na poziomie sformułowania abstrakcyjnego motywacja kryjąca się za Problemem $\mathcal{P}$ w pracy [A4] jest całowicie odmienna niż w przypadku pracy [A3].
Inspiracją do badania Problemu $\mathcal{P}$ w pracy [A4] był zamiar uogólnienia rezultatu uzyskanego w pracy [9], w której zamiast inkluzji (140) rozpatrywane jest równanie drugiego rzędu nie zawierające wyrażenia wielowartościowego. Dodanie przez nas składnika wielowartościowego znacząco zwiększa trudność problemu i powoduje konieczność zastosowania technik analizy wielowartościowej opisanych w Rozdziale 2. Ponadto, w pracy [9] zakłada się, że operator A jest hemiciągły i monotoniczny ze względu na drugą zmienną. W naszym przypadku jest on pseudomonotoniczny, co jest założeniem słabszym i pozwalającym na odniesienie naszego rezultatu do szerszej klasy problemów. Z drugiej strony operator pseudomonotoniczny występujący w problemie wymaga znacznie subtelniejszego podejścia niż operator monotoniczny i hemiciągły (por. Uwaga 3). Osłabienie założenia z pracy [9] dotyczącego operatora

A podnosi więc jeszcze bardziej stopień trudności problemu.

Głównym rezultatem pracy jest następujące twierdzenie o istnieniu rozwiązania Problemu $\mathcal{P}$ ([A4], Twierdzenie 5.2).

TWIERDZENIE 67 *Jeżeli spełnione są założenia $H(A)$, $H(B_0)$, $H(C)$, $H(\gamma)$, H_0 oraz $u_0 \in V, v_0 \in H, f \in L^q(0,T;W^*)$, to Problem $\mathcal{P}$ ma rozwiązanie.*

Dowód Twierdzenia 67 przebiega w oparciu o metodę dyskretyzacji czasowej. Jednak w przypadku omawianego problemu wykorzystaliśmy nieco inny schemat dyskretyzacji niż ten opisany w Podrozdziale 2.4.2. Skorzystaliśmy mianowicie ze schematu zastosowanego w [9], którego realizacja opiera się na następującym przybliżeniu Problemu $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\tau_{n+1}+\tau_n}\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau_{n+1}}-\frac{u^n-u^{n-1}}{\tau_n}\right)+A\left(t_n,\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau_{n+1}}\right) \\ &+B(t_n,u^n)+\gamma^*M\left(\gamma\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau_{n+1}}\right)\ni f^n, \quad n=1,...,N-1. \end{aligned} \tag{141}$$

Wyzanczając rozwiązanie problemu dyskretnego (141), podobnie jak w Podrozdziale 2.4.3, w każdym ustalonym kroku czasowym analizowaliśmy pomocniczy problem stacjonarny, którego rozwiązanie uzyskaliśmy w oparciu o Twierdzenie 11. Kolejne etapy, czyli oszacowanie a-priori i przejście graniczne zrealizowane zostały podobnie jak w pracy [A3].

W pracy [A4] zaprezentowane zostały dwa przykłady równań różniczkowych, których słaba postać odpowiada Problemowi $\mathcal{P}$. Aby je sformułować, wprowadźmy następujące oznaczenia.

Niech Ω będzie otwartym, ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^N$, $N\in\mathbb{N}$ z brzegiem lipszycowskim $\partial\Omega$ podzielonym na dwie części Γ_1, Γ_2 takie, że $\bar{\Gamma}_1\cup\bar{\Gamma}_2=\partial\Omega$ oraz N-1 wymiarowa miara Γ_1 jest dodatnia. Niech ν oznacza zewnętrzny wersor normalny do $\partial\Omega$. Niech $p\geq 2$, $T>0$ i niech dane będą funkcje $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j_1\colon\Gamma_2\to\mathbb{R}$, $j_2\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $f_1\colon[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$ i $f_2\colon[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$. Sformułujmy następujące dwa problemy.

Problem P_1. *Znaleźć $u\colon[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$ takie, że*

$$\begin{cases} u''-\alpha_1\mathrm{div}\,(|\nabla u'|^{p-2}\nabla u')+g(u')-\Delta u+|u|^\delta u=f_1 & w\ \Omega\times(0,T), \\ u=0 & na\ \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}+\nu\cdot(|\nabla u'|^{p-2}\nabla u')=\eta\in\partial_{Cl}j_1(\gamma u') & na\ \Gamma_2\times(0,T), \\ u(0)=u_0, \qquad u'(0)=v_0. \end{cases}$$

Problem P_2. *Znaleźć $u\colon[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$ takie, że*

$$\begin{cases} u''-\alpha_2\mathrm{div}\,(|\nabla u'|^{p-2}\nabla u')+g(u')-\Delta u+|u|^\delta u+\gamma^*\eta=f_2 & w\ \Omega\times(0,T), \\ \eta\in\partial_{Cl}j_2(u') & w\ \Omega\times(0,T), \\ u=0 & na\ \partial\Omega\times(0,T), \\ u(0)=u_0, \qquad u'(0)=v_0. \end{cases}$$

W obu problemach zakładamy, że $\delta \le 1 - 2/p$. Aby sprowadzić je do postaci słabej definiujemy następujące przestrzenie, operatory i funkcjonały.

$W_1 = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$, $W_2 = W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|v\|_{W_1} = \|v\|_{W_2} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$V_1 = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ on } \Gamma_1\}$, $V_2 = H_0^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_{V_2} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$H = L^2(\Omega)$, $U_1 = L^p(\Gamma_1)$, $U_2 = L^p(\Omega)$.

Operatory $A_1 \colon W_1 \to W_1^*$, $A_2 \colon W_2 \to W_2^*$, $B_1 \colon V_1 \to W_1^*$ i $B_2 \colon V_2 \to W_2^*$ oraz funkcjonały $F_1 \in W_1^*$ i $F_2 \in W_2^*$ zdefiniowane są wzorami

$$\begin{aligned}
\langle A_1 u, v \rangle_{W_1^* \times W_1} &= \alpha_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega g(u) \cdot v \, dx \quad \forall\, u, v \in W_1, \\
\langle A_2 u, v \rangle_{W_2^* \times W_2} &= \alpha_2 \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega g(u) \cdot v \, dx \quad \forall\, u, v \in W_2, \\
\langle B_1 u, v \rangle_{W_1^* \times W_1} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u|^\delta u \cdot v \, dx \quad \forall\, u \in V_1, v \in W_1, \\
\langle B_2 u, v \rangle_{W_2^* \times W_2} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |u|^\delta u \cdot v \, dx \quad \forall\, u \in V_2, v \in W_2,
\end{aligned}$$

$$F_1(v) = \int_\Omega f_1 \cdot v \, dx \quad \forall\, v \in W_1, \quad F_2(v) = \int_\Omega f_2 \cdot v \, dx \quad \forall\, v \in W_2.$$

Następnie definiujemy przestrzenie funkcji zależnych od czasu $\mathcal{W}_1 = L^p(0,T;W_1)$, $\mathcal{W}_2 = L^p(0,T;W_2)$, $\mathcal{V} = L^p(0,T;V)$, $\mathcal{H} = L^2(0,T;H)$, $\mathcal{U}_1 = L^p(0,T;U_1)$ i $\mathcal{U}_2 = L^p(0,T;U_2)$.

Wprowadzimy teraz pojęcie słabego rozwiązania dla Problemów P_1 i P_2.

Definicja 68 *Mówimy, że funkcja $u \in \mathcal{W}_1$ jest słabym rozwiązaniem Problemu P_1, jeżeli $u' \in \mathcal{W}_1$, $u'' \in \mathcal{W}_1^*$ oraz*

$$\begin{cases}
\langle u''(t) + A_1 u'(t) + B_1 u(t), v \rangle_{{W_1}^* \times W_1} + \int_{\Gamma_2} \eta(x) v(x) \, d\Gamma = F_1(v) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, v \in W_1, \ \text{p.w. } t \in (0,T), \\
\eta(x) \in \partial j_1(u'(x)) \qquad\qquad \text{dla p.w. } x \in \Gamma_2, \\
u(0) = u_0, \qquad u'(0) = v_0.
\end{cases}$$

Definicja 69 *Mówimy, że funkcja $u \in \mathcal{W}_2$ jest słabym rozwiązaniem Problemu P_2, jeżeli $u' \in \mathcal{W}_2$, $u'' \in \mathcal{W}_2^*$ oraz*

$$\begin{cases}
\langle u''(t) + A_2 u'(t) + B_2 u(t), v \rangle_{{W_2}^* \times W_2} + \int_\Omega \eta(x) v(x) \, dx = F_2(v) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, v \in W_2, \ \text{p.w. } t \in (0,T), \\
\eta(x) \in \partial j_2(u'(x)) \qquad\qquad \text{dla p.w. } x \in \Omega, \\
u(0) = u_0, \qquad u'(0) = v_0.
\end{cases}$$

Pierwsze równanie każdego z powyższych słabych sformułowań otrzymujemy mnożąc pierwsze równanie każdego z Problemów P_i, $i = 1, 2$ przez funkcję testową $v \in W_i$, cakując po zbiorze Ω, stosując wzór Greena oraz wykorzystując warunki brzegowe występujące w Problemach P_i, $i = 1, 2$.

Następnie wprowadzamy dwa pomocnicze funkcjonały $J_1 \colon U_1 \to \mathbb{R}$ i $J_2 \colon U_2 \to \mathbb{R}$ zdefiniowane wzorem

$$J_i(v) = \int_{\Gamma_2} j_i(x, v(x))\, d\Gamma \quad \forall\, v \in U_i, \;\; i = 1, 2.$$

Definiujemy również multifunkcje $M_1 \colon U_1 \to 2^{U_1^*}$ i $M_2 \colon U_2 \to 2^{U_2^*}$ określone wzorami $M_i(v) = \partial J_i(v)$ dla każdego $v \in U_i$, $i = 1, 2$. Wreszcie niech $\gamma_1 \colon W_1 \to U_1$ oznacza operator śladu, a $\gamma_2 \colon W_2 \to U_2$ operator włożenia. Przy tych oznaczeniach formułujemy następujące problemy.

Problem $\mathcal{P}_1$. *Znaleźć $u \in \mathcal{W}_1$, takie, że $u' \in \mathcal{W}_1$, $u'' \in \mathcal{W}_1^*$ oraz*

$$\begin{aligned} &u''(t) + A_1(u'(t)) + B_1(u(t)) + \gamma_1^* M_1(\gamma_1 u'(t)) \ni f_1(t) \;\; \textit{dla p.w. } t \in (0, T), \\ &u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \end{aligned}$$

Problem $\mathcal{P}_2$. *Znaleźć $u \in \mathcal{W}_2$, takie, że $u' \in \mathcal{W}_2$, $u'' \in \mathcal{W}_2^*$ oraz*

$$\begin{aligned} &u''(t) + A_2(u'(t)) + B_2(u(t)) + \gamma_2^* M_2(\gamma_2 u'(t)) \ni f_2(t) \;\; \textit{dla p.w. } t \in (0, T), \\ &u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \end{aligned}$$

Z własności subróżniczki Clarke'a funkcjonałów J_i, $i = 1, 2$ (por. [17], Twierdzenie 3.47 (v)) oraz z Definicji 68 i 69 wynika, że każde rozwiązanie Problemu $\mathcal{P}_i$ jest również słabym rozwiązaniem Problemu P_i, $i = 1, 2$. Poza tym widać, że każdy z Problemów $\mathcal{P}_i$, $i = 1, 2$ odpowiada Problemowi $\mathcal{P}$ sformułowanemu na początku podrozdziału. W związku z tym Twierdzenie 67 można wykorzystać do wykazania istnienia słabych rozwiązań Problemów P_i, $i = 1, 2$. W pracy [A4] założenia dotyczące funkcji i stałych występujących w Problemach P_i, $i = 1, 2$ zostały tak dobrane, aby odpowiadające im abstrakcyjne operatory A_i, B_i, i M_i, $i = 1, 2$ spełniały założenia Twierdzenia 67.

3.5 [A5] The Rothe method for variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics

W tym podrozdziale wracamy do oznaczeń dotyczących nazw przestrzeni wprowadzonych na początku Podrozdziału 2.2 tuż przed sformułowaniem Problemu $(P)_E$. Przyjmujemy przy tym $p = q = 2$. Ponadto, niech dane będą operatory $A, B \colon V \to V^*$, funkcjonały $J \colon U \to \mathbb{R}$, $\Phi \colon V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ i funkcja $f \colon [0, T] \to V^*$. Problem rozpatrywany w pracy [A5] ma następującą postać.

Problem $\mathcal{P}$. *Znaleźć $u \in \mathcal{W}$ takie, że $u(0) = u_0$ i*

$$\int_0^T \langle Au'(t) + Bu(t) + \iota^*\xi(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle_{V^*\times V}\, dt \qquad (142)$$
$$+ \int_0^T \big(\Phi(v(t)) - \Phi(u(t))\big)\, dt \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{V},$$

gdzie

$$\xi(t) \in \partial_{Cl} J(\iota u(t)) \qquad \textit{dla p.w. } t \in (0,T).$$

W analizie Problemu $\mathcal{P}$ przyjmujemy następujące założenia.

$H(A)$: Operator $A\colon V \to V^*$ jest liniowy, ograniczony, koercytywny i symetryczny, tzn.

(i) $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$.

(ii) $\langle Av, v\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha\|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V$, gdzie $\alpha > 0$.

(iii) $\langle Av, w\rangle_{V^*\times V} = \langle Aw, v\rangle_{V^*\times V} \quad \forall\, v, w \in V$.

$H(B)$: Operator $B\colon V \to V^*$ jest liniowy, ograniczony i koercytywny, tzn.

(i) $B \in \mathcal{L}(V, V^*)$.

(ii) $\langle Bv, v\rangle_{V^*\times V} \geq \beta\|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V$, gdzie $\beta > 0$.

$H(J)$: Funkcjonał $J\colon U \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

(i) J jest lokalnie lipszycowski.

(ii) $\partial_{Cl} J$ spełnia warunek wzrostu $\|\xi\|_{U^*} \leq c\,(1 + \|u\|_U) \quad \forall\, u \in U,\ \xi \in \partial_{Cl} J(u)$, gdzie $c > 0$.

(iii) Istnieje $m \geq 0$, takie, że

$$\langle \xi - \eta, u - v\rangle_{U^*\times U} \geq -m\|u - v\|_U^2$$

$\forall\, u, v \in U,\ \xi \in \partial_{Cl} J(u),\ \eta \in \partial_{Cl} J(v)$.

$H(\Phi)$: Funkcjonał $\Phi\colon V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest wypukły, właściwy i dolnie półciągły.

$H(\iota)$: Operator $\iota\colon V \to U$ jest liniowy, ciągły i zwarty. Ponadto odpowiadający mu operator Niemyckiego $\bar{\iota}\colon M^{2,2}(0,T; V, V^*) \to \mathcal{U}$ zdefiniowany jako $(\bar{\iota}v)(t) = \iota(v(t))$ dla każdego $v \in M^{2,2}(0,T; V, V^*)$, p.w. $t \in [0,T]$ jest również zwarty.

$H(0)$: $f \in H^1(0,T; V^*)$, $u_0 \in dom(\Phi)$ oraz istnieją $\xi_0 \in \partial_{Cl} J(\iota u_0)$ i $\eta_0 \in \partial_{Conv} \Phi(u_0)$ takie, że

$$Bu_0 + \iota^*\xi_0 + \eta_0 - f(0) \in V.$$

$H(s)$: Spełniona jest nierówność $\beta > m$, gdzie β i m są stałymi występującymi w założeniach $H(B)$ i $H(J)(iii)$.

Symbol $dom(\Phi)$ w założeniu $H(0)$ oznacza efektywną dziedzinę funkcjonału Φ, czyli

$$dom(\Phi) = \{v \in V \mid \Phi(v) < +\infty\}.$$

Głównym wynikiem pracy [A5] jest następujące twierdzenie dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązania Problemu $\mathcal{P}$ ([A5], Twierdzenie 3.1).

TWIERDZENIE 70 *Jeżeli spełnione są założenia $H(A)$, $H(B)$, $H(J)$, $H(\Phi)$, $H(\iota)$, $H(0)$ i $H(s)$, to Problem $\mathcal{P}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $u \in H^1(0,T;V)$.*

Dowód Twierdzenia 70 przeprowadzony jest metodą dyskretyzacji czasowej według procedury opisanej w Podrozdziale 2.4, a punktem wyjścia jest w tym przypadku następujący schemat semidyskretny.

Problem $\mathcal{P}_\tau$. *Znaleźć ciąg $\{u_\tau^k\}_{k=0}^N \subset V$ taki, że $u_\tau^0 = u_0$ i*

$$\frac{1}{\tau}\left\langle A(u_\tau^k - u_\tau^{k-1}), v - u_\tau^k\right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle Bu_\tau^k, v - u_\tau^k\right\rangle_{V^*\times V} + \left\langle \xi_\tau^k, \iota(v - u_\tau^k)\right\rangle_{U^*\times U}$$
$$+ \Phi(v) - \Phi(u_\tau^k) \geq \left\langle f_\tau^k, v - u_\tau^k\right\rangle_{V^*\times V} \quad \forall\, v \in V,$$

gdzie

$$\xi_\tau^k \in \partial_{Cl} J(\iota u_\tau^k),$$

dla $k = 1, \ldots, N$.

Największa trudność w analizie Problemu $\mathcal{P}_\tau$ wynika z obecności funkcjonału Φ. Po pierwsze powoduje on, że rozwiązując Problem $\mathcal{P}_\tau$, w każdym ustalonym kroku czasowym, musimy poradzić sobie ze stacjonarną inkluzją subróżniczkową zawierającą dwa różne typy subróżniczek: subróżniczkę Clarke'a $\partial_{Cl} J(\iota\cdot)$ i subróżniczkę $\partial\Phi$ w sensie Definicji 17. Wiąże się to z koniecznością zastosowania Twierdzenia 14 (por. Wniosek 26). Po drugie, obecność funkcjonału Φ wymusza na nas nałożenie na operator A zdecydowanie silniejszych założeń niż w Podrozdziale 2.4.1. Bez nich nie byłoby możliwe wyprowadzenie odpowiednich oszacowań a-priori. Wreszcie na etapie przejścia granicznego opisanego w Podrozdziale 2.4.6 konieczne jest dodatkowo skorzystanie z Lematu Fatou w celu przejścia do granicy w składniku związanym funkcjonałem Φ.
Na koniec porównajmy nierówność (142) z równaniem (101). W obu przypadkach wszystkie wyrażenia występują pod całką $\int_0^T$. Jednak z równania (101) można (poprzez równanie (102)) otrzymać drugie równanie Problemu $(P)_E^*$ zachodzące punktowo dla p.w. $t \in (0,T)$. Inaczej mówiąc, można się pozbyć całki po czasie. Niestety, ze względu na obecność składnika Φ, nie da się uzyskać podobnego efektu w naszym problemie.

WNIOSEK 71 *W sformułowaniu Problemu $\mathcal{P}$ nie można pominąć całki po przedziale czasowym, gdyż stosowana przez nas metoda jest niewystarczająca do wykazania relacji analogicznej do (142), lecz zachodzącej punktowo dla p.w. $t \in (0,T)$.*

Przejdźmy teraz do opisu zjawiska kontaktowego mechaniki będącego motywacją do badania Problemu $\mathcal{P}$. Zachowując oznaczenia z Podrozdziału 2.3.2 rozważmy następujący normalny warunek kontaktowy na fragmencie brzegu Γ_C.

$$\begin{cases} \sigma_\nu = \sigma_\nu^1 + \sigma_\nu^2, \\ -\sigma_\nu^1 \in \partial_{Cl} j(u_\nu), \\ u_\nu \leq g, \ \ \sigma_\nu^2 \leq 0, \ \ \sigma_\nu^2 (u_\nu - g) = 0. \end{cases} \tag{143}$$

Warunek (143) opisuje kontakt ciała z idealnie sztywnym podłożem, pokrytym warstwą materiału o grubości g, który w przeciwieństwie do samego podłoża nie jest idealnie sztywny, w związku z czym ciało może się w tą warstwę zagłębiać. Warunek $u_\nu \leq g$ oznacza, że przemieszczenie w kierunku normalnym nie może przekroczyć grubości zewnętrznej warstwy, gdyż po osiągnięciu tej wartości ciało napotyka na idealnie twardą warstwę podłoża. Naprężenie normalne σ_ν składa się z dwóch części σ_ν^1 i σ_ν^2. Pierwsza z nich stanowi reakcję zewnętrznej warstwy podłoża, druga zaś reakcję warstwy sztywnej. Z ostatniego równania w warunku (143) wynika, że jeżeli przemieszczenie jest mniejsze niż grubość zewnętrznej warstwy, naprężenie pochodzące od sztywnej warstwy podłoża nie pojawia się ($\sigma_\nu^2 = 0$), gdyż ciało tej warstwy nie dotyka. Wtedy $\sigma_\nu = \sigma_\nu^1$, a prawo kontaktowe podyktowane jest inkluzją uwzględniającą subróżniczkę $\partial_{Cl} j$. Relacja ta może mieć charakter niemonotoniczny i może na przykład opisywać sytuację, w której materiał pokrywający podłoże sam składa się z kilku warstw o różnej twardości. W miarę zagłębiania się ciała w odkształcalne warstwy materiału, mogą one pękać wywołując niemonotoniczne skoki naprężenia. Wreszcie, gdy $u = g$, naprężenie σ_ν^2 może być nieujemne, przy czym warunek (143) nie daje górnego ograniczenia na $-\sigma_\nu^2$. Oznacza to, że reakcja sztywnej części podłoża jest nieograniczona. Warunek $\sigma_\nu^2 \leq 0$ nazywamy ograniczeniem unilateralnym (jednostronnym). W szczególności warunek (143) nazywamy niemonotonicznym prawem kontaktowym z normalną odpowiedzią (reakcją) i ograniczeniem unilateralnym.

Rozważmy następujący quasistatyczny problem kontaktowy.

Problem $\mathcal{P}_\mathcal{M}$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ i naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ spełniające warunki (29), (31), (33), (34), (36), (143) i $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0}$.*

Przejdziemy teraz do sformułowania wariacyjnego Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$. W tym celu przyjmujemy przestrzeń V określoną wzorem (49), w którym zbiór WK określony jest wzorem (48). Rozpatrzmy też przestrzeń $U = L^2(\Gamma_C)$ i zdefiniujmy operatory $\nu : L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d) \to U$ określony wzorem $\nu \boldsymbol{v} = v_\nu$ dla $\boldsymbol{v} \in L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d)$ oraz $\iota : V \to U$ określony wzorem $\iota = \nu \circ \gamma$, gdzie $\gamma\colon V \to L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d)$ jest operatorem śladu. Rozpatrujemy również operatory $A, B\colon V \to V^*$ określone wzorami (56) i (57), funkcję $\boldsymbol{f}\colon (0,T) \to V^*$ określoną wzorem (58) oraz funkcjonał $J\colon L^2(\Gamma_3) \to \mathbb{R}$ określony wzorem

$$J(w) = \int_{\Gamma_3} j(w)\, d\Gamma \quad \forall\, w \in L^2(\Gamma_C).$$

Wreszcie, niech $\Phi\colon V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ będzie funkcją wskaźnikową zbioru

$$K = \{\boldsymbol{v} \in V \ | \ v_\nu \leq g \ \text{ p.w. na } \Gamma_C\},$$

tzn.

$$\Phi(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \ \boldsymbol{v} \in K, \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Oznaczmy

$$-\sigma_\nu(t) = \xi(t).$$

Słabe sformułowanie Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ ma postać.

Problem $\mathcal{P}'_\mathcal{M}$. *Znaleźć $\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}$, takie, że $\boldsymbol{u}(0) = \mathbf{0}$ oraz*

$$\langle A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t) + \iota^*\xi(t) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{u}(t)\rangle_{V^*\times V}$$
$$+\Phi(\boldsymbol{v}(t)) - \Phi(\boldsymbol{u}(t)) \geq 0 \qquad \textit{dla p.w. } t \in (0,T),$$

gdzie

$$\xi(t) \in \partial_{Cl} J(\iota \boldsymbol{u}(t)) \qquad\qquad \textit{dla p.w. } t \in (0,T).$$

Nierówność w Problemie $\mathcal{P}'_\mathcal{M}$ otrzymujemy mnożąc równanie (29) przez funkcję próbną $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in K$, całkując po zbiorze Ω, stosując wzór Greena (55) i uwzględniając warunki brzegowe występujące w Problemie $\mathcal{P}_\mathcal{M}$. Całkując nierówność w Problemie $\mathcal{P}'_\mathcal{M}$ po przedziale $[0,T]$ otrzymujemy sformułowanie odpowiadające Problemowi $\mathcal{P}$ postawionemu na początku podrozdziału. Ze względu na obecność całki po zmiennej czasowej, Problem $\mathcal{P}$ nazywamy *bardzo słabym* sformułowaniem Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$.
W pracy [A5] założenia dotyczące danych w Problemie $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ zostały tak dobrane, aby spełnione były założenia Twierdzenia 70. Dzięki temu (przy odpowiednich założeniach) z Twierdzenia 70 wynika istnienie i jednoznaczność bardzo słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$. Natomiast z uwagi na Wniosek 71, istnienie rozwiązania Problemu $\mathcal{P}'_\mathcal{M}$ (będącego słabym rozwiązaniem Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$) pozostaje problemem otwartym.

3.6 [A6] Convergence of Rothe scheme for a class of dynamic variational inequalities involving Clarke subdifferential

Praca ta zamyka serię moich publikacji dotyczących zastosowania metody Rothe (metody dyskretyzacji czasowej) w rozwiązywaniu inkluzji typu Clarke'a. W porównaniu z pracami [A1]-[A5] artykuł ten zawiera kilka udoskonaleń, czyniących pracę bardziej przejrzystą. Po pierwsze udało mi się w nim zrezygnować z założenia o zwartości operatora Niemyckiego $\bar{\iota}$: $M^{p,q}(0,T;V,V^*) \to \mathcal{U}$, które było wykorzystywane w poprzednich pracach. Wadą tego założenia jest to, że nie odnosi się ono bezpośrednio do danych zadania, lecz do abstrakcyjnej przestrzeni $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$. Do zweryfikowania tego założenia potrzebna jest więc wiedza, która nie wynika wprost ze sformułowania problemu, lecz opiera się na znajomości zaawansowanych rezultatów z analizy funkcjonalnej, w szczególności Twierdzenia 33. Aby ten problem ominąć, zamiast założenia o zwartości operatora Niemyckiego $\bar{\iota}$, w pracy [A6] wykorzystałem założenie $H(\iota)$ wprowadzone przeze mnie w Podrozdziale 2.2. Założenie to

odnosi się tylko do przestrzeni V, U i H występujących w sformułowaniu problemu, przez co jest bardziej przejrzyste, a przy okazji implikuje ono pożądaną zwartość operatora Niemyckiego $\bar{\iota}$ (por. Lemat 39).
Kolejne uproszczenie wynika z faktu, iż w pracy [A6] w ogóle nie występuje wspomniana wyżej przestrzeń $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$. Udało mi się uniknąć konieczności korzystania z niej dzięki następującej obserwacji. Otóż w poprzednich pracach głównym powodem korzystania z przestrzeni $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$ jest konieczność uzyskania silnej zbieżności $\bar{\iota}\bar{w}_\tau \to \bar{\iota}w$ w $\mathcal{U}$ przy $\tau \to 0$, gdzie $\bar{w}_\tau$ jest ciągiem funkcji kawałkami stałych skonstruowanych w oparciu o metodę dyskretyzacji czasowej. Zbieżność ta umożliwia z kolei skorzystanie z Twierdzenia 38 i w konsekwencji przejście do granicy w inkluzji analogicznej do (19), w której odpowiednikiem ciągu u_n jest ciąg $\bar{w}_\tau$. Klasycznym narzędziem umożliwiającym uzyskanie silnej zbieżności ciągu funkcyjnego w przestrzeni typu $L^p(0,T;X)$, jest twiedzenie Lionsa-Aubina (por. Twierdzenie 31). Wymaga ono jednak odpowiedniej regularności pochodnych badanego ciągu funkcji, której nie mają omawiane przez nas funkcje ,,schodkowe" $\bar{w}_\tau$. Aby ten problem rozwiązać, w pracach [A1]-[A5] zamiast twierdzenia Lionsa-Aubina, stosujemy Twierdzenie 33, które pozwala uzyskać silną zbieżność funkcji kawałkami stałych $\bar{w}_\tau$, ale wymaga ,,umieszczenia" ich w przestrzeni $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$. W pracy [A6] zastosowałem natomiast inny sposób przejścia do granicy w inkluzji typu (19) nie wymagający odwoływania się do przestrzeni $M^{p,q}(0,T;V,V^*)$. Opiera się on na obserwacji, że różnica $w_\tau - \bar{w}_\tau$ między funkcjami kawałkami liniowymi a funkcjami kawałkami stałymi dąży do 0 silnie w $\mathcal{V}$ ([A6], Lemma 4.5) i tym samym $\bar{\iota}w_\tau - \bar{\iota}\bar{w}_\tau \to 0$ w $\mathcal{U}$. Natomiast funkcje w_τ są już na tyle regularne, że można do nich zastosować klasyczne twierdzenie Lionsa-Aubina i uzyskać silną zbieżność $\bar{\iota}w_\tau \to \bar{\iota}w$ w $\mathcal{U}$. Łącząc te dwa fakty otrzymujemy silną zbieżność $\bar{\iota}\bar{w}_\tau \to \bar{\iota}w$ ([A6], Lemat 4.9).

Omówię teraz rezultat uzyskany w pracy [A6] używając oznaczeń dotyczących nazw przestrzeni wprowadzonych na początku Podrozdziału 2.2, tuż przed sformułowaniem Problemu $(P)_E$. Przyjmujemy przy tym, że $p = q = 2$. Problem rozpatrywany w pracy ma następującą postać.

Problem $\mathcal{P}$. *Znaleźć $u \in \mathcal{V}$, takie, że $u' \in \mathcal{W}$, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ oraz*

$$\int_0^T \langle u''(t) + Au'(t) + Bu(t) + \iota^*\xi(t) - f(t), v(t) - u'(t)\rangle_{V^*\times V}\, dt$$
$$+ \int_0^T \big(\Phi(v(t)) - \Phi(u'(t))\big)\, dt \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{V},$$

gdzie

$$\xi(t) \in \partial_{Cl} J(\iota u'(t)) \quad \textit{dla p.w. } t \in (0,T).$$

Operatory $A, B\colon V \to V^*$, oraz funkcje $f\colon [0,T] \to V^*$, $J\colon U \to \mathbb{R}$ i $\Phi\colon V \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ spełniają założenia podobne do przyjętych w pracy [A5]. Różnice polegają na tym, że zamiast warunku $H(A)$(ii) zakładamy słabszy warunek: $\langle Au, u\rangle_{V^*\times V} \geq 0$ oraz $\langle Au, u\rangle_{V^*\times V} \geq \alpha\|u\|_V^2 - \beta\|u\|_H^2$ dla $u \in V$, gdzie $\alpha, \beta > 0$, w warunku $H(B)$(ii) przyjmujemy $\beta = 0$ oraz dodatkowo zakładamy, że operator B jest symetryczny. Ponadto warunek, który w pracy [A5] oznaczony jest symbolem $H(\iota)$ zastąpiony został wspomnianym już warunkiem $H(\iota)$ z Podrozdziału 2.2. Dodatkowo zakładamy, że $u_0 \in V$, $u_1 \in dom(\Phi)$ i spełniony jest następujący warunek zgodności: istnieje $\xi_0 \in \partial_{Cl} J(\iota u_1)$ i $\eta_0 \in \partial_{Conv}\Phi(u_1)$ takie, że

$$Au_1 + Bu_0 + \iota^*\xi_0 + \eta_0 - f(0) \in H.$$

Głównym wynikiem pracy jest Twierdzenie 4.10, które przy powyższych założeniach gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania u Problemu $\mathcal{P}$. Rozwiązanie to określone jest jako słaba granica ciągu u_τ rozwiązań przybliżonych skonstruowanych w oparciu o metodę dyskretyzacji czasowej (por. Podrozdział 2.4). Dodatkowo, przy tych samych założeniach udało się wykazać silną zbieżność $u_\tau \to u$ w $H^1(0,T;V)$ (Twierdzenie 4.11).

W Rozdziale 5 pracy omówiony jest następujący problem mechaniki kontaktowej stanowiący motywację fizyczną dla Problemu $\mathcal{P}$.

Problem $\mathcal{P}_\mathcal{M}$. *Znaleźć $\boldsymbol{u}\colon \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^d$ i $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega\times[0,T] \to \mathbb{S}^d$ spełniające warunki (28), (31), (34), (36), (42) oraz warunek początkowy (46) w którym $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{0}$.*

W warunku (28) w Problemie $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ przyjmujemy dla uproszczenia $\rho = 1$. Warto podkreślić, że w Problemie $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ nie występuje warunek (33), co oznacza, że mamy do czynienia z modelem ciała swobodnego. W związku z tym przestrzeń V występująca w sformułowaniu wariacyjnym zdefiniowna jest wzorem (52), a występujący w nim zbiór WK określony jest wzorem (48), natomiast norma przestrzeni V zadana jest wzorem (53). Krótko mówiąc oznacza to, że $V = H_1$. Ponadto przestrzeń U, operatory ι, A i B oraz funkcja $\boldsymbol{f}$ zdefiniowane są tak jak w Podrozdziale 3.5. Przy tych oznaczeniach definiujemy pojęcie słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$.

Definicja 72 *Mówimy, że funkcja $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ jest słabym rozwiązaniem Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$, jeżeli $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{0}$ oraz*

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle \boldsymbol{u}''(t) + A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{u}'(t)\rangle_{V^*\times V}\, dt\\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_C} j^0(\iota\boldsymbol{u}'(t); \iota\boldsymbol{v}(t) - \iota\boldsymbol{u}'(t))d\Gamma dt\\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_C} I_{(-\infty,g]}(v_\nu(t))d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_C} I_{(-\infty,g]}(u'_\nu(t))d\Gamma dt\\ &\geq \int_0^T \langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{u}'(t)\rangle_{V^*\times V}\, dt \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}.\end{aligned} \tag{144}$$

Nierówność (144) otrzymujemy mnożąc równanie (31) przez funkcję testową $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}'$, całkując po zbiorze $\Omega \times (0,T)$, korzystając ze wzoru Greena (55), warunków brzegowych (34), (42), (36) i korzystając z inkluzji (43).

Aby wyjaśnić związek między abstrakcyjnym Problemem $\mathcal{P}$, a słabym sformułowaniem Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ wprowadźmy funkcjonały $J\colon U \to \mathbb{R}$ i $\Phi\colon V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ określone wzorami

$$J(\boldsymbol{w}) = \int_{\Gamma_C} j(\boldsymbol{w})\, d\Gamma \quad \forall\, \boldsymbol{w} \in U,$$

$$\Phi(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_C} I_{(-\infty,g]}(v_\nu)\, d\Gamma \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V,$$

i rozważmy następujący problem pomocniczy.

Problem $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$. *Znaleźć $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$ takie, że $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}'(0) = \boldsymbol{0}$ i*

$$\int_0^T \langle \boldsymbol{u}''(t) + A\boldsymbol{u}'(t) + B\boldsymbol{u}(t) + \iota^*\boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{u}'(t)\rangle_{V^*\times V}\, dt + \int_0^T \big(\Phi(\boldsymbol{v}(t)) - \Phi(\boldsymbol{u}'(t))\big)\, dt \geq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V},$$

gdzie

$$\boldsymbol{\xi}(t) \in \partial_{Cl} J(\iota \boldsymbol{u}'(t)) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T).$$

Lemat 5.3 w pracy [A6] zapewnia, że przy wprowadzonych przez nas założeniach każde rozwiązanie Problemu $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ jest słabym rozwiązaniem Problemu $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$. Z drugiej strony Problem $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ jest analogiczny do Problemu $\mathcal{P}$, więc można do niego odnieść rezultaty wynikające z Twierdzeń 4.10 i 4.11 w pracy [A6]. W efekcie otrzymujemy istnienie i jednoznaczność słabego rozwiązania $\boldsymbol{u}$ problemu mechaniki kontaktowej $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ oraz silną zbieżność odpowiadającego mu schematu Rothe do rozwiązania $\boldsymbol{u}$.

Istnienie słabego rozwiązania problemu analogicznego do $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ zostało dowiedzione inną metodą w pracy [10], lecz tylko w przypadku ciała przymocowanego, a więc przy dodatkowym warunku (33). Model taki jest łatwiejszy w analizie niż ten omawiany w pracy [A6] (por. Wniosek 45). Ponadto rezultat uzyskany w pracy [10] opiera się na założeniu dodatkowej nierówności na stałe występujących w problemie (por. [10], (4.2)). W naszym przypadku takie ograniczenie jest niepotrzebne. W tym sensie praca [A6] stanowi pewne uogólnienie wyników uzyskanych w [10], choć z drugiej strony założenia dotyczące operatorów lepkości i sprężystości są nieco bardziej restrykcyjne w pracy [A6] niż w [10].

3.7 [A7] Numerical analysis of a hyperbolic hemivariational inequality arising in dynamic contact

Praca [A7] otwiera cykl moich artykułów poświęconych oszacowaniu błędu dla ewolucyjnych inkluzji typu Clarke'a opisujących problemy kontaktowe mechaniki. W pracy rozważany jest problem mechaniki kontaktowej $\mathcal{P}_M$ tożsamy z Problemem $\mathcal{P}$ sformułowanym pod koniec Podrozdziału 2.3.2, przy założeniu, że użyte w nim prawo tarcia może mieć charakter niemonotoniczny (por. Uwaga 42). Punktem wyjścia do analizy numerycznej jest jego słabe sformułowanie mające postać Problemu $\mathcal{P}_V$ w Podrozdziale 2.3.3. Dla problemu tego sformułowane zostały dwa schematy numeryczne opisane w Podrozdziale 2.5.3, tj. schemat semidyskretny mający postać Problemu $\mathcal{P}_V^h$ oraz schemat w pełni dyskretny mający postać Problemu $\mathcal{P}_V^{hk}$. Zachowując oznaczenia z Podrozdziału 2.5.3 opiszę teraz najważniejsze aspekty analizy numerycznej przeprowadzonej w pracy [A7].
Na początek warto zwrócić uwagę na założenia dotyczące danych w Problemie $\mathcal{P}_M$ w pracy [A7], w szczególności na silną monotoniczność tensora lepkości (warunek $H(\mathcal{A})(e)$), zrelaksowaną monotoniczność funkcji μ (warunek $H(\mu)(c)$) oraz nierówność $m_A > S\lambda C_0^2$ (wzór (3.22)) wiążącą ze sobą stałe występujące w warunkach $H(\mathcal{A})(e)$ i $H(\mu)(c)$. Otóż samo istnienie słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_M$ można

udowodnić bez tych trzech założeń. Są one natomiast kluczowe w dowodzie jednoznaczności rozwiązania oraz w oszacowaniu błędu obu schematów numerycznych (por. Wniosek 52 i Uwaga 53). Nie jest to zresztą przypadek, gdyż sprawdzanie jednoznaczności rozwiązania oraz analiza błędu to dwa działania opierające się na podobnej idei. Pierwsze z nich polega na oszacowaniu różnicy między dwoma hipotetycznymi rozwiązaniami danego problemu, drugie zaś na oszacowaniu różnicy między rozwiązaniem problemu dokładnego i rozwiązaniem problemu przybliżonego.

Powyższe spostrzeżenia dotyczące założeń w pracy [A7] zwracają uwagę na podobieństwo omawianych zagadnień do tematyki poruszonej w Podrozdziale 2.5.2. Na tym jednak nie koniec analogii. Kolejnym problemem dyskutowanym w Podrozdziale 2.5.2 jest kwestia istnienia rozwiązania problemu dokładnego i problemu przybliżonego, jak również oszacowanie a-priori tych rozwiązań przez stałą niezależną od parametrów dyskretyzacji (por. Wniosek 52 (i) i Uwaga 53). W pracy [A7] istnienie rozwiązania problemu dokładnego wynika z Twierdzenia 3.3. To samo twierdzenie gwarantuje jednoznaczność rozwiązania oraz jego oszacowanie przez stałą zależną tylko od warunków początkowych i funkcji $\boldsymbol{f}$ (wzór (3.23)). W pracy znajduje się również stwierdzenie, dotyczące istnienia i jednoznaczności rozwiązania $\boldsymbol{u}^h$ problemu semidyskretnego $\mathcal{P}_V^h$ oraz jego oszacowania analogicznego do wzoru (3.23). Według wiedzy autorów rezultaty te wynikają z rozumowania identycznego z dowodem Twierdzenia 3.3. Istnienie rozwiązania schematu $\mathcal{P}_V^{hk}$, ze względu na jego skończenie wymiarowy charakter, również nie budzi naszych wątpliwości, dlatego w tej kwestii ograniczamy się do krótkiego komentarza zamieszczonego tuż przed sformułowaniem Twierdzenia 5.1. Natomiast samo Twierdzenie 5.1 gwarantuje nam odpowiednie oszacowanie rozwiązania $\mathcal{P}_V^{hk}$ przez stałą niezależną od parametrów dyskretyzacji.
Pierwszy etap analizy schematu semidyskretnego polega na wyprowadzeniu oszacowania ([A7], Twierdzenie 4.1) postaci

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^h\|^2_{C(0,T;V)}+\|\dot{\boldsymbol{u}}-\dot{\boldsymbol{u}}^h\|^2_{C(0,T;H)}+\|\dot{\boldsymbol{u}}-\dot{\boldsymbol{u}}^h\|^2_{\mathcal{V}}\\
&\quad\le c\left(\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_0^h\|^2_V+\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_1^h\|_H\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{v}^h(0)\|_H\right.\\
&\qquad\left.+\|\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{v}^h\|^2_{\mathcal{V}}+\|\ddot{\boldsymbol{u}}-\dot{\boldsymbol{v}}^h\|^2_{\mathcal{V}^*}+\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau-\boldsymbol{v}^h_\tau\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^d))}\right),
\end{aligned}$$

w którym $\boldsymbol{v}^h$ jest dowolnym elementem przestrzeni $L^2(0,T;V^h)\cap\mathcal{W}$. Nierówność ta jest uogólnieniem nierówności (122) i stanowi punkt wyjścia do oszacowania błędu $\boldsymbol{e}^h$ określonego wzorem (127) między rozwiązaniem dokładnym $\boldsymbol{u}$, a rozwiązaniem przybliżonym $\boldsymbol{u}^h$. Jeżeli przestrzeń V^h określona jest wzorem (129), a rozwiązanie $\boldsymbol{u}$ wraz z warunkami początkowymi spełniają dodatkowe założenia podwyższonej regularności sprecyzowane we Wniosku 4.3 w [A7], wówczas błąd ten oszacowany jest liniowo ze względu na h ([A7], (4.29)). Podstawą do uzyskania liniowego oszacowania błędu jest Twierdzenie 54 oraz Wniosek 55.
W przypadku schematu w pełni dyskretnego, punktem wyjścia do oszacowania błędu

jest nierówność

$$\max_{1\le n\le N}\{\|\boldsymbol{w}_n-\boldsymbol{w}_n^{hk}\|_H^2+\sum_{j=1}^{n}k\|\boldsymbol{w}_j-\boldsymbol{w}_j^{hk}\|_V^2\}$$

$$\le c\Bigg[k\sum_{j=1}^{N}\big(\|\dot{\boldsymbol{w}}_j-\delta\boldsymbol{w}_j\|_H^2+\|\boldsymbol{w}_j-\boldsymbol{v}_j^h\|_V^2\big)$$

$$+\max_{1\le n\le N}\|\boldsymbol{w}_{\tau n}-\boldsymbol{v}_{\tau n}^h\|_{L^2(\Gamma_3;\mathbb{R}^d)}+\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{N-1}\|(\boldsymbol{w}_j-\boldsymbol{v}_j^h)-(\boldsymbol{w}_{j+1}-\boldsymbol{v}_{j+1}^h)\|_H^2$$

$$+\max_{1\le n\le N}\|\boldsymbol{w}_n-\boldsymbol{v}_n^h\|_H^2+\|\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}_0^h\|_V^2+k^2\|\boldsymbol{u}\|_{H^2(0,T;V)}^2+\|\boldsymbol{w}_0-\boldsymbol{u}_1^h\|_H^2\Bigg],$$

w której $\{\boldsymbol{v}_j^h\}_{j=1}^N$ oznacza dowolny ciąg elementów przestrzeni V^h. Jej uzyskanie możliwe jest przy założeniu podwyższonej regularności rozwiązania $\boldsymbol{u}$ (zob. [A7], (5.12)). Pozwala ona na liniowe oszacowanie błędu $\boldsymbol{e}^{hk}$ zdefiniowanego wzorem (128) ze względu na parametry dyskretyzacji czasowej i przestrzennej h i k w sytuacji, gdy V^h jest zdefiniowana wzorem (129) oraz przy założeniu podwyższonej regularności rozwiązania dokładnego (zob. [A7], Wniosek 5.3). Podobnie jak w przypadku oszacowania błędu dla schematu semidyskretnego, tak i tu kluczową rolę odgrywa Twierdzenie 54 oraz Wniosek 55.
W Rozdziale 6 pracy [A7] opisane zostały wyniki symulacji komputerowej dla Problemu $\mathcal{P}_M$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. W konkretnym modelu, Ω jest prostokątem $[0,1]\times[0,0.5]$, tensory lepkości i sprężystości są liniowe, a funkcja μ w warunku (37) zdefiniowana jest wzorem (39), czyniąc prawo tarcia niemonotonicznym. Rozwiązanie numeryczne $\boldsymbol{u}^{hk}$ zostało wyznaczone w oparciu o metodę elementów skończonych przy dyskretyzacji dziedziny siatką o średnicy h i dyskretyzacji przedziału czasowego podziałem jednostajnym o długości kroku czasowego k. Pierwsze obliczenia zostały wykonane dla $h=k=\frac{1}{2}$, a w następnych krokach oba parametry były stopniowo dzielone na pół aż do uzyskania $h=k=\frac{1}{256}$. Rozwiązanie numeryczne uzyskane dla ostatniego, najgęstszego podziału dziedziny czasowo-przestrzennej, zostało przez nas potraktowane jako rozwiązanie dokładne stanowiące punkt odniesienia do wszystkich wcześniejszych rozwiązań. Porównując kolejne rozwiązania z rozwiązaniem ,,dokładnym", wyznaczyliśmy błąd $\boldsymbol{e}^{hk}$ i zaobserwowaliśmy jego zależność od wielkości $(h+k)$, stwierdzając, że ma ona charakter liniowy (zob. [A7], Fig.4). Nasza obserwacja stanowi numeryczne potwierdzenie teoretycznych wyników uzyskanych we wcześniejszych rozdziałach pracy.

Rezultat uzyskany w pracy [A7] stanowi uogólnienie dwóch wcześniejszych rezultatów opisanych odpowiednio w pracach [3] oraz [B9]. W pierwszej z ww. prac przeprowadzona została analiza błędu dla problemu kontaktowego mechaniki zbliżonego do Problemu $\mathcal{P}_M$ z pracy [A7]. Model badany w [3] jest z jednej strony ciekawszy od naszego, gdyż dotyczy kontaktu lepkosprężystego z uwzględnieniem zjawiska piezoelektrycznego. Wiąże się to z obecnością dodatkowej niewiadomej w problemie, jaką jest potencjał elektryczny, oraz dodatkowego tensora w prawie konstytutywnym. Z drugiej jednak strony warunek kontaktowy w [3] jest znacznie prostszy od naszego. Nie uwzględnia on bowiem tarcia (por. (36)), natomiast, co najistotniejsze, warunek

na część normalną ma charakter monotoniczny. Decyduje to o zasadniczej różnicy między problemem z pracy [3], a rozważanym przez nas Problemem $\mathcal{P}_M$, w którym niemonotoniczny warunek kontaktowy stanowi źródło trudności.
W pracy [B9] analizowany jest natomiast model z takim samym warunkiem kontaktowym jak w Problemie $\mathcal{P}_M$, lecz w wersji stacjonarnej (szukana funkcja nie zależy od czasu). Praca [A7] uogólnia więc rezultat otrzymany w [B9] na przypadek dynamiczny, który jest znacznie bardziej skomplikowany. Ponadto oszacowanie błędu uzyskane w [A7] jest lepsze niż w [B9], gdzie uzyskaliśmy wynik (por. [B9], Twierdzenie 3)

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^h\|_V \le O(\sqrt{r}), \quad r = \inf_{\boldsymbol{v}^h \in V^h} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^h\|_V. \tag{145}$$

Aby wyjaśnić z czego wynika różnica między liniowym oszacowaniem błędu w pracy [A7], a słabszym rezultatem (145) w pracy [B9], należy zwrócić uwagę na obliczenia z Podrozdziału 2.5.2, mające analogiczną postać do tych z pracy [B9]. Otóż źródłem problemu, który stanął na drodze do uzyskania liniowego oszacowania błędu w pracy [B9] jest drugi składnik prawej strony nierówności (123), który w modelu mechaniki kontaktowej przyjmuje postać

$$O\left(\sqrt{\|\boldsymbol{u}_\tau - \boldsymbol{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)}}\right). \tag{146}$$

W pracy [B9] oszacowaliśmy normę znajdującą się pod pierwiastkiem za pomocą nierówności (54) wynikającej z ciągłości operatora śladu. Tym samym uzyskaliśmy oszacowanie $\|\boldsymbol{u}_\tau - \boldsymbol{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)} \le C_0 \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}^h\|_V$ (por. [B9], (43)), w wyniku czego wyrażenie (146) wniosło do oszacowania błędu składnik rzędu $\sqrt{r}$. Tymczasem do oszacowania składnika brzegowego w pracy [A7] skorzystaliśmy z Twierdzenia 54 oraz Wniosku 55 otrzymując oszacowanie $\|\boldsymbol{u}_\tau - \boldsymbol{v}_\tau^h\|_{L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)} \le ch^2$ co dało liniowy przyczynek do oszacowania błędu pochodzący od (146). Pomysłodawcą takiego rozwiązania jest trzeci z autorów pracy [A7], będący światowej sławy ekspertem w dziedzinie oszacowania błędu. W tym przypadku jego drobna wskazówka pozwoliła nam na istotne poprawienie rezultatu otrzymanego w [B9].

3.8 [A8] Numerical analysis of a dynamic bilateral thermoviscoelastic contact problem with nonmonotone friction law

Praca [A8] stanowi kontynuację, a zarazem uogólnienie pracy [A7] na przypadek modelu kontaktowego uwzględniającego temperaturę $\theta\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$. Wielkość ta opisana jest w modelu następującymi warunkami.

$$\rho c_p \dot{\theta} - \operatorname{div}\,(K\nabla\theta) = c_{ij}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}_i}{\partial x_j} + g \qquad \text{w } \Omega \times (0,T), \tag{147}$$

$$\theta = 0 \qquad \text{na } \Gamma_D \cup \Gamma_N \times (0,T), \tag{148}$$

$$-K(x,t,\nabla\theta(t)) \cdot \nu \in \partial_{Cl} j_\theta(\theta(t)) - h_\tau(x,t,\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(x,t)\|_{\mathbb{R}^d}) \qquad \text{na } \Gamma_C \times (0,T), \tag{149}$$

$$\theta(0) = \theta_0 \qquad \text{w } \Omega. \tag{150}$$

Pierwszy z warunków to równanie przepływu ciepła, w którym c_p jest współczynnikiem pojemności cieplnej, $K\colon \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ operatorem przewodnictwa cieplnego, $C = (c_{ij})$ tensorem rozszerzalności cieplnej, a $g\colon \Omega \times [0,T]$ gęstością źródła ciepła. Warunek (148) wyraża fakt, że temperatura jest ustalona na fragmencie brzegu $\Gamma_D \cup \Gamma_N$, natomiast warunek (149) opisuje wymianę ciepła między ciałem a podłożem przez brzeg kontaktowy. Warunek ten uwzględnia wytwarzanie ciepła spowodowane tarciem, za co odpowiada składnik inkluzji zależny od prędkości w kierunku stycznym do podłoża. Funkcja $j_\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w warunku (148) jest daną funkcją lokalnie lipszycowską. Wreszcie (150) jest warunkiem początkowym.

Problem mechaniki kontaktowej badany w pracy [A8] ma następującą postać.

Problem $\mathcal{P}_\mathcal{M}$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ oraz temperaturę $\theta\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ spełniające warunki (28), (32), (34), (35), (38), (46) oraz (147)-(150).*

W pracy [A7] funkcja j występująca w warunku (38) oznaczona jest symbolem j_τ, a funkcja j_θ występująca w warunku (149) oznaczona jest symbolem j. Ponadto w ogólnym sformułowaniu Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ funkcja j z warunku (38) jest pewną zadaną funkcją lokalnie lipszycowską, nie koniecznie określoną wzorem (40). Dopiero w symulacjach numerycznych za funkcję $j = j_\tau$ w warunku (38) przyjmujemy tę określoną wzorem (40), a za funkcję μ występującą we wzorze (40) przyjmujemy tę określoną wzorem (39).
Analiza numeryczna Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ przebiega według schematu zastosowanego w pracy [A7] i opisanego w poprzednim podrozdziale, choć w naszym przypadku obliczenia są bardziej skomplikowane ze względu na obecność dodatkowej niewiadomej jaką jest temperatura. Mimo oczywistych różnic między dwoma modelami, komentarze dotyczące teoretycznych i numerycznych aspektów analizy poczynione w poprzednim podrozdziale pozostają aktualne również w naszym przypadku. W związku z powyższym w kwestii oszacowania błędu dla schematu semidyskretnego i w pełni dyskretnego ograniczę się do zacytowania ostatecznych wyników pracy [A8].
I tak dla schematu semidyskretnego otrzymaliśmy następujące oszacowanie błędu ([A8], Wniosek 13)

$$\begin{aligned}&\|u - u^h\|_{C(0,T;E)} + \|\dot u - \dot u^h\|_{C(0,T;H)} + \|\dot u - \dot u^h\|_{\mathcal{E}}\\ &+ \|\theta - \theta^h\|_{C(0,T;L^2(\Omega))} + \|\theta - \theta^h\|_{\mathcal{V}} \le ch.\end{aligned} \tag{151}$$

W pracy [A8], a w szczególności w nierówności (151) przestrzeń E jest zdefiniowana tak jak przestrzeń V we wzorze (49), w którym zbiór WK określony jest wzorem (47). Przestrzeń $\mathcal{E}$ jest zdefiniowana analogicznie jak przestrzeń $\mathcal{V}$ w Podrozdziale 2.2. Natomiast przestrzeń $\mathcal{V}$ występująca w (151) określona jest jako $\mathcal{V} = L^2(0,T;V)$, gdzie

$$V = \left\{\eta \in H^1(\Omega) \mid \eta = 0 \ \text{ na } \Gamma_D \cup \Gamma_N\right\}.$$

Funkcje u i θ występujące w (151) są słabymi rozwiązaniami Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$, a odpowiadające im funkcje u^h i θ^h rozwiązaniami schematu semidyskretnego.
Dla schematu w pełni dyskretnego otrzymaliśmy oszacowanie ([A8], Wniosek 16)

$$\max_{1\le n\le N}\{\|u_n - u_n^{hk}\|_E + \|w_n - w_n^{hk}\|_H + \|\theta_n - \theta_n^{hk}\|_{L^2(\Omega)} + k\sum_{j=1}^{n}\|\theta_j - \theta_j^{hk}\|_V^2\} \le c(h+k),$$

w którym $w = u'$, natomiast $\{u_n^{hk}\}_{n=0}^N$, $\{w_n^{hk}\}_{n=0}^N$ i $\{\theta_n^{hk}\}_{n=0}^N$ są dyskretnymi przybliżenia odpowiednio przemieszczenia u, prędkości w i temperatury θ uzyskanymi ze schematu w pełni dyskretnego.
Podobnie jak w pracy [A8] wynik teoretyczny dotyczący liniowego oszacowania błędu dla schematu w pełni dyskretnego został poparty wynikami symulacji komputerowych dla modelu dwuwymiarowego.
Problem mechaniki kontaktowej opisany w pracy [A8] był już wcześniej badany przez trzeciego z jej autorów, a wynikom tych badań poświęcona jest praca [16]. W prawdzie omawiany tam model różni się od naszego obecnością składnika zależnego od ,,historii" procesu w prawie konstytutywnym oraz charakterem warunku kontaktowego dla części normalnej, niemniej jednak niemonotoniczne prawo tarcia oraz prawo wymiany ciepła między ciałem a podłożem są w obu modelach takie same. Głównym wynikiem pracy [16] jest wykazanie istnienia słabego rozwiązania omawianego tam problemu kontaktowego.
Źródłem inspiracji do napisania pracy [A8] były wyniki uzyskane przez pierwszego z jej autorów we wcześniejszej pracy [A7] oraz chęć przeniesienia zdobytych na tej drodze doświadczeń na model bardziej skomplikowany zaproponowany przez trzeciego autora. Uzyskany przez nas wynik nie byłby jednak w pełni wartościowy, gdyby nie symulacje komputerowe przeprowadzone przez drugiego autora. Praca jest więc efektem połączenia różnych doświadczeń w celu realizacji wspólnego zadania.

3.9 [A9] Numerical analysis of an evolutionary variational-hemivariational inequality with application in contact mechanics

Praca [A9] stanowi kontynuację pracy [A5]. Jej tematem jest numeryczna analiza Problemu $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ badanego w [A5]. Założenia dotyczące danych występujących w problemie są w obu pracach identyczne. Punktem wyjścia w analizie numerycznej jest Problem $\mathcal{P}'_{\mathcal{M}}$ postawiony w Podrozdziale 3.5 będący słabym sformułowaniem Problemu $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ (w pracy [A9] jest on oznaczony symbolem $({\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}^{V,*})$). Dla Problemu $({\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}^{V,*})$ rozważamy następujący w pełni dyskretny schemat numeryczny.

Problem $({\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}^{V,hk})$. *Znaleźć* $\boldsymbol{u}^{hk} = \{\boldsymbol{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$ *takie, że* $\boldsymbol{u}_0^{hk} = \boldsymbol{u}_0^h$ *i dla* $n = 1, 2, \dots, N$,

$$\begin{aligned}\left\langle A\delta\boldsymbol{u}_n^{hk} + B\boldsymbol{u}_n^{hk} + \iota^*\xi_n^{hk}, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}_n^{hk}\right\rangle_{V\times V^*} &+ \Phi(\boldsymbol{v}^h) - \Phi(\boldsymbol{u}_n^{hk}) \\ &\geq \langle \boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{v}^h - \boldsymbol{u}_n^{hk}\rangle_{V\times V^*} \quad \forall\, \boldsymbol{v}^h \in V^h, \\ \xi_n^{hk} &\in \partial J(\iota\boldsymbol{u}_n^{hk}),\end{aligned}$$

gdzie V^h jest przestrzenią zdefiniowaną wzorem (129), a $\boldsymbol{u}_0^h$ jest elementem zdefiniowanym wzorem (125).
Błąd schematu w pełni dyskretnego definiujemy w tym przypadku jako wyrażenie $\boldsymbol{e}_{hk}$ określone wzorem

$$\boldsymbol{e}_{hk}^2 := \max_{0\leq n\leq N} \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_n^{hk}\|_V^2 + k\sum_{n=1}^N \|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}_n^{hk}\|_V^2.$$

Głównym wynikiem pracy jest Wniosek 4.1, który orzeka, że przy założeniu odpowiedniej podwyższonej regularności rozwiązania $\boldsymbol{u}$ i odpowiadającego mu pola naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$, spełniona jest nierówność

$$\boldsymbol{e}_{hk}^2 \leq c\left(k^2 + h^2\right)$$

z dodatnią stałą c niezależną od k i h. Powyższy wynik oznacza liniowe oszacowanie błędu $\boldsymbol{e}_{hk}$ względem parametrów dyskretyzacji.
Podobnie jak w pracach [A7] i [A8], wynik uzyskany w części teoretycznej pracy [A9] został poparty symulacjami komputerowymi wskazującymi na liniową zależność błędu od parametrów h i k.

3.10 [A10] Analysis of a dynamic contact problem with non-monotone friction and non-clamped boundary conditions

W pracy rozważany jest dynamiczny problem kontaktowy ciała swobodnego (w matematycznym opisie zjawiska nie występuje brzeg kontaktowy Dirichleta Γ_D, co stanowi pewne utrudnienie (por. Wniosek 15)). W modelu przyjmujemy następujące prawo kontaktowe

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu) + \frac{1}{r}(u_\nu - g)_+ \qquad \text{na } \Gamma_C \times (0,T), \tag{152}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} \leq \mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|_{\mathbb{R}^d})\,(-\sigma_\nu) \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|_{\mathbb{R}^d})\,(-\sigma_\nu)\dfrac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|_{\mathbb{R}^d}} \;\; \text{dla} \;\; \dot{\boldsymbol{u}}_\tau \neq \boldsymbol{0} \end{array} \right. \qquad \text{na } \Gamma_C \times (0,T). \tag{153}$$

Warunki (152)-(153) modelują kontakt ciała z podłożem składającym się z odkształcalnej warstwy głównej pokrytej cienką warstwą sprężystego materiału o grubości g. Równanie (152) oznacza, że dopóki przemieszczenie normalne nie przekracza wartości g, warunek kontaktowy na część normalną opisany jest zależnością $-\sigma_\nu = p(u_\nu)$, w której funkcja p nie musi być monotoniczna. Gdy głębokość penetracji przekroczy grubość zewnętrznej warstwy g, pojawia się dodatkowy opór $\frac{1}{r}(u_\nu - g)$ pochodzący od wewnętrznej warstwy podłoża. Ponieważ nie jest ona idealnie sztywna, dopuszczalna jest jej penetracja, natomiast współczynnik $1/r > 0$ jest tym większy im twardsze jest podłoże. Warunek (153) staje się równoważny warunkowi (37), gdy naprężenie normalne S we wzorze (37) zadane jest wzorem (152). Funkcja μ w warunku (153) nie musi być monotoniczna, w związku z czym, warunek ten opisuje niemonotoniczne prawo tarcia.
Pełne sformułowanie problemu kontaktowego ma następującą postać.

Problem $\mathcal{P}_\mathcal{M}$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ oraz naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ spełniające warunki (28), (31), (34), (46) oraz (152)-(153).*

W pracy zbadana została wariacyjna postać Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ mająca formę ewolucyjnej inkluzji typu Clarke'a. Jej analiza obejmuje dowód istnienia i jednoznaczności słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_\mathcal{M}$ ([A10], Twierdzenie 3.3) oraz oszacowanie błędu dla schematów semidyskretnego ([A10], Wniosek 4.2) oraz w pełni dyskretnego

([A10], Wniosek 5.2) liniowe ze względu na parametry dyskretyzacji czasowej i przestrzennej. W dowodzie twierdzenia o istnieniu słabego rozwiązania wykorzystany został pomocniczo rezultat z pracy [A2] dotyczący istnienia rozwiązania abstrakcyjnej inkluzji typu Clarke'a z niekoercytywnym opertorem lepkości. W oszacowniu błędu obu schematów dyskretnych udało się natomiast uniknąć nakładania założeń mających postać nieróności między stałymi występującymi w problemie, takich jak (3.22) w [A7], (16)-(18) w [A8] lub warunek $H(s)$ w [A9]. Było to możliwe dzięki skorzystaniu z Lematu 3.1 w pracy [A10], którego teza jest analogiczna do warunku H_{aux} wprowadzonego w Podrozdziale 2.4.1 (por. Wniosek 48).
Praca zawiera rónież wyniki symulacji komputerowych uwierzytelniające liniowe oszcowanie błędu uzyskane w części teoretycznej.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych

Poniżej przedstawiam informacje o moich pozostałych publikacjach. Prace [B1]-[B11] zostały opublikowane po uzyskaniu przeze mnie stopnia doktora. Praca [C1] ukazała się przed moim doktoratem.

[B1] K. Bartosz, T. Janiczko, P. Szafraniec, M. Shillor, Dynamic thermoviscoelastic thermistor problem with contact and nonmonotone friction, 2017, Applicable Analysis, DOI: 10.1080/00036811.2017.1403586

Podobnie jak w pozostałych pracach poświęconych zjawiskom kontaktowym mechaniki, rozważamy kontakt ciała fizycznego z podłożem, przy czym w naszym modelu ciałem tym jest urządzenie elektroniczne zwane *termistorem*. Jego zadanie polega na kontrolowaniu przepływu prądu elektrycznego w obwodzie w taki sposób, aby pojawienie sią zbyt wysokiej temperatury skutkowało ograniczeniem przepływu prądu. Proces ma charakter dynamiczny, a wielkościami szukanymi w modelu są odpowiednio: przemieszczenie $u\colon \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, naprężenie $\sigma\colon \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}^d$, temperatura $\theta\colon \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ oraz potencjał elektryczny $\phi\colon \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$. W modelu matematycznym opisującym zjawisko występują trzy rodzaje warunków: ewolucyjna inkluzja drugiego stopnia typu Clarke'a dla przemieszczenia, równanie paraboliczne dla temperatury oraz równanie eliptyczne dla potencjału, przy czym warunek opisujący każdą z niewiadomych zawiera w sobie pozostałe niewiadome. W efekcie otrzymujemy układ wzajemnie sprzężonych warunków trzech różnych typów. Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 3.2 gwarantujące istnienie słabego rozwiązania opisanego powyżej problemu kontaktowego. Dowód preprowadzony jest w oparciu o metodę *retardacji czasowej*.

[B2] K. Bartosz, M. Sofonea, Subdifferential inclusions for stress formulations of unilateral contact problems, 2017, Mathematics and Mechanics of Solids, 1-19, DOI: 10.1177/1081286517709518

W pracy rozważane są dwa modele mechaniki kontaktowej, które różnią się od pozostałych badanych przeze mnie modeli charakterem prawa konstytutywnego. Otóż we wszystkich moich pozostałych pracach ma ono postać $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))$, która ilustruje fakt, że naprężenie jest funkcją przemieszczenia. W pracy [B2] zależność jest odwrotna, tzn. zakładamy warunek $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}(\boldsymbol{\sigma}) + \partial_{Cl} j(\boldsymbol{\sigma})$, gdzie $\mathcal{A}$ jest danym operatorem, a j daną funkcją lokalnie lipszycowską. Tym razem więc to naprężenie traktujemy jako zmienną niezależną, odkształcenie zaś jako jego funkcję, a dokładnie multifunkcję, gdyż powyższe, prawo konstytutywne ma postać inkluzji uwzględniającej subróżniczkę typu Clarke'a. Dla porównania, we wszystkich pozostałych badanych przeze mnie inkluzjach typu Clarke'a modelujących problemy mechaniki kontaktowej, subróżniczka Clarke'a pochodzi od jednego z warunków brzegowych, tu natomiast od prawa konstytutywnego. Poza tym w obu problemach w pracy [B2] prawo kontaktowe na część normalną opisane jest *warunkiem Signoriniego*, który prowadzi do pojawienia się w sformułowaniu wariacyjnym subróżniczki w

sensie analizy wypukłej pewnej funkcji wskaźnikowej. W efekcie postać wariacyjna ma charakter inkluzji zawierającej dwa typy subróżniczek, wypukłą i Clarke'a. W związku z tym dla wykazania istnienia jej rozwiązania kluczową rolę odgrywa Twierdzenie 14 (por. Wniosek 26).
Pierwszy z dwóch problemów badanych w pracy [B2] ma charakter stacjonarny, a jego sformułowanie wariacyjne, jak już wspomniałem, ma postać stacjonarnej inkluzji typu Clarke'a uwzględniającej subróżniczkę funkcji wypukłej. W drugim problemie szukana funkcja zależy od czasu, a w prawie konstytutywnym występuje dodatkowy składnik zależny od ,,historii procesu" (*ang. memory term*). W związku z tym inkluzja stanowiąca słabe sformułowanie problemu zawiera analogiczny składnik, a do wykazania istnienia jej rozwiązania stosujemy wynik dotyczący istnienia rozwiązania inkluzji stacjonarnej połączony z argumentacją opartą na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym.

[B3] K. Bartosz, M. Sofonea, A dynamic contact model for viscoelastic plates, 2017, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 70, 1-19, DOI: 10.1093/qjmam/hbw013

W pracy rozważamy dynamiczny proces kontaktowy ciała z odkształcalnym podłożem bez uwzględnienia tarcia. W naszym modelu ciało ma postać płyty zdefiniowanej jako $\mathcal{B} = (0, L) \times (-h, h) \times (-\infty, +\infty) \subset \mathbb{R}^3$. Warunek kontaktowy na część normalną ma postać niemonotonicznej inkluzji typu Clarke'a. Zakładamy, że siły działające na ciało nie zależą od trzeciej zmiennej z, oraz postulujemy, że tę własność ma również poszukiwane odkształcenie $\boldsymbol{u}$. Pozwala to sprowadzić powyższy trójwymiarowy problem, do problemu dwuwymiarowego, w którym dziedziną jest zbiór $\Omega = (0, L) \times (-h, h)$ będący poprzecznym przekrojem płyty. Słabe sformułowanie problemu ma postać ewolucyjnej inkluzji typu Clarke'a rzędu drugiego. Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 4.1 zapewniające istnienie słabego rozwiązania badanego problemu kontaktowego.

[B4] K. Bartosz, P. Kalita, S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, 2016, History-dependent problems with applications to contact models for elastic beams, Applied Mathematics and Optimization, vol. 73, 71-98, DOI: 10.1007/s00245-015-9292-6

Tematem pracy jest matematyczna analiza problemu kontaktowego jednowymiarowej belki zajmującej odcinek $[0, L]$ z równoległym do niej podłożem znajdującym się w odległości g. Proces odbywa się w przedziale czasowym $[0, T]$, a szukaną jest funkcja $u\colon [0, L]\times[0, T] \to \mathbb{R}$, oznaczająca poprzeczne wychylenie belki w punkcie $x \in [0, L]$ w chwili $t \in [0, T]$ powstałe w wyniku działania siły zewnętrznej f skierowanej prostopadle do belki. Do opisu zjawiska stosujemy *prawo Eulera-Bernoulliego*, w myśl którego naprężenie wewnętrzne belki zależy od czwartej pochodnej przestrzennej funkcji u. Głównym warunkiem w modelu jest równanie opisujące równowagę między tym naprężeniem a siłami działającymi na ciało. Oprócz naprężenia wewnętrznego i siły f w równaniu występują jeszcze dwa rodzaje sił. Pierwszą z nich jest reakcja podłoża, a jej zależność od przemieszczenia opisana jest za pomocą inkluzji typu Clarke'a. Druga uwzględnia tzw. efekt „pamięci" podłoża, a jej wielkość w chwili t uzależniona jest od przebiegu procesu kontaktowego poprzedzającego t. Słabe sformułowanie problemu ma postać nierówności hemiwariacyjnej uwzględniającej składnik pochodzący od efektu pamięci (memory term). Głównym rezultatem teoretycznym pracy jest Twierdzenie 12 dotyczące istnienia i jednoznaczności słabego rozwiązania badanego przez nas problemu. Dowód twierdzenia oparty jest na rezultatach dotyczących surjektywności wielowartościowych operatorów pseudomonotonicznych oraz na wykorzystaniu twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Oprócz wyniku abstrakcyjnego, w pracy znajdują się wyniki obliczeń numerycznych pozwalające ustalić przybliżony kształt belki przy ustalonych wartościach parametrów i w ustalonej chwili czasowej. Nasze obliczenia wykonane są w oparciu o metodę elementów skończonych.

[B5] K. Bartosz, Z. Denkowski, P. Kalita, Sensitivity of optimal solutions to control problems for second order evolution subdifferential inclusions, 2015, Applied Mathematics and Optimization, vol. 71, 379-410, DOI: 10.1007/s00245-014-9262-4,

W pracy tej rozważamy ewolucyjną inkluzję typu Clarke'a będącą połączeniem Problemów $(P)_E$ i $(P')_E$ z Podrozdziału 2.2. Połączenie to polega na uwzględnieniu w inkluzji dwóch wyrażeń wielowartościowych: wyrażenia $\iota^*\partial_{Cl}J^1(\iota u(t))$ charakterystycznego dla Problemu $(P)_E$ i wyrażenia $\iota^*\partial_{Cl}J^2(\iota u'(t))$ charakterystycznego dla Problemu $(P')_E$. Dalsze uogólnienie polega na odrzuceniu warunku $p = q = 2$, oraz na dodaniu do prawej strony inkluzji składnika zawierającego dodatkową zmienną sterującą (sterowanie). W pracy [B5] zmienna sterująca oznaczona jest symbolem u, natomiast niewiadoma w inkluzji symbolem y. Aby uniknąć konfliktu oznaczeń z materiałem prezentowanym do tej pory, w opisie rezultatów pracy [B5] będę używał oznaczeń zgodnych z oryginalnymi. W szczególności zbiór sterowań dopuszczalnych oznaczamy symbolem $\mathcal{U}$, a rozważaną inkluzję ewolucyjną nazywamy Problemem (P). Oprócz Problemu (P) rozważamy problem sterowania optymalnego oznaczony symbolem $(CP)_{\mathcal{R}}$, polegający na znalezieniu minimum zadanego funkcjonału $\mathcal{F}$, który zależy od czterech zmiennych: danego sterowania u, danych punktów y_0 i y_1 oraz funkcji y, przy założeniu, że zmienne te są ze sobą powiązane w ten sposób, że y jest rozwiązaniem Problemu (P), w którym u jest danym sterowaniem, a warunki początkowe mają postać $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$.

Następnie zajmujemy się wrażliwością rozwiązań Problemów (P) i $(CP)_{\mathcal{R}}$ na zaburzenia danych problemu. W tym celu zamiast Problemu (P) rozpatrujemy ciąg problemów zaburzonych $(P)_k$, $k \in \bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, zdefiniowany w ten sposób, że przy $k \to \infty$ parametry Problemów $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dążą (w pewnym precyzyjnie ustalonym sensie) do parametrów problemu granicznego $(P)_\infty$. Do zbioru parametrów zaliczamy przy tym zarówno warunki początkowe, sterowanie u, funkcję f, jak również wszystkie operatory i funkcjonały występujące w inkluzji. Pierwszym rezultatem pracy jest wykazanie istnienia rozwiązania Problemu $(P)_k$, $k \in \bar{\mathbb{N}}$ w najogólniejszej postaci (Twierdzenie 14). W związku z tym rozważamy (niepusty) zbiór $\mathcal{S}_k(\mathfrak{u}_k)$ rozwiązań Problemu $(P)_k$, $k \in \bar{\mathbb{N}}$, gdzie $\mathfrak{u}_k := (u_k, y_k^0, y_k^1)$. Wówczas Twierdzenie 20 gwarantuje, że górna granica Kuratowskiego rodziny zbiorów $\mathcal{S}_k(\mathfrak{u}_k)$ zawiera się w zbiorze $\mathcal{S}_\infty(\mathfrak{u}_\infty)$. Ponadto, jeżeli Problem $(P)_\infty$ ma jednoznaczne rozwiązanie, wówczas rodzina $\mathcal{S}_k(\mathfrak{u}_k)$ dąży do $\mathcal{S}_\infty(\mathfrak{u}_\infty)$ w sensie Mosco. W kolejnej części pracy rozpatrujemy zaburzenie Problemu $(CP)_\mathcal{R}$. Mianowicie zamiast funcjonału $\mathcal{F}$ bierzemy pod uwagę rodzinę funkcjonałów $\mathcal{F}_k$, $k \in \bar{\mathbb{N}}$, i odpowiadającą jej rodzinę Problemów $(CP)_{\mathcal{R}_k}$, $k \in \bar{\mathbb{N}}$, oraz definiujemy szczególny rodzaj zbieżności (oparty głównie na Γ zbieżności) ciągu $\mathcal{F}_k$ do $\mathcal{F}_\infty$. Wówczas z Twierdzenia 23 otrzymujemy następujące rezultaty. Po pierwsze dla każdego $k \in \bar{\mathbb{N}}$, istnieje rozwiązanie optymalne $(u_k^*, y_k^{0*}, y_k^{1*}, y_k^*)$ Problemu $(CP)_{\mathcal{R}_k}$. Po drugie, jeżeli rozwiązanie Problemu $(CP)_{\mathcal{R}_\infty}$ jest jednoznaczne, to ciąg $(u_k^*, y_k^{0*}, y_k^{1*}, y_k^*)$, $k \in \mathbb{N}$, ma punkt skupienia, który jest rozwiązaniem optymalnym Problemu $(CP)_{\mathcal{R}_\infty}$. Po trzecie, $m_k \to m_\infty$ przy $k \to \infty$, gdzie m_k oznacza najmniejszą wartość funkcjonału $\mathcal{F}_k$, $k \in \bar{\mathbb{N}}$.

[B6] K. Bartosz, X. Cheng, P. Kalita, Y. Yu. C. Zeng, Rothe method for parabolic variational-hemivariational inequalities, 2015, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 423, 841-862,
DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.09.078

Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 5.1 mówiące o istnieniu rozwiązania następującego problemu.

Problem (V). *Znaleźć $u \in \mathcal{W}$ takie, że $u(0) = u_0$ oraz dla wszystkich $v \in \mathcal{V}$, zachodzi nierówność*

$$\int_0^T \langle u'(t) + Au(t) + \iota^*\xi(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle_{V^*\times V} \\ + \Phi(v(t)) - \Phi(u(t))\, dt \geq 0,$$

gdzie $\xi \in \mathcal{U}^*$ spełnia warunek $\xi(t) \in \partial_{Cl} J(\iota u(t))$ dla p.w. $t \in (0,T)$.

Przestrzenie występujące w Problemie (V) są zdefiniowane tak samo jak na początku Podrozdziału 2.2 tuż przed sformułowaniem Problemu $(P)_E$ i podobnie jak tam przyjmujemy $p = q = 2$. Podobieństwo Problemu (V) do Problemu $\mathcal{P}$ z pracy [A5] nie jest przypadkowe, choć w tym ostatnim występują dwa operatory A i B. Otóż doświadczenia wynikające z badania nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnej w pracy [B6] stały się dla mnie inspiracją do przeprowadzenia podobnej analizy dla nierówności występującej w pracy [A5]. W obu przypadkach do wykazania istnienia rozwiązania wykorzystana została metoda Rothe opisana w Podrozdziale 2.4. Również w obu przypadkach na etapie procedury opisanym w Podrozdziale 2.4.3 w każdym ustalonym kroku czasowym mieliśmy do czynienia z pomocniczym problemem stacjonarnym mającym formę inkluzji uwzględniającej dwa rodzaje subróżniczek, subróżniczkę Clarke'a funkcji J oraz subróżniczkę wypukłą funkcji Φ. Aby wykazać istnienie rozwiązania tej inkluzji, w pracy [B6] skorzystaliśmy z aproksymacji Yosidy funkcji Φ funkcjami Φ_ε, $\varepsilon > 0$, różniczkowalnymi w sensie Gâteaux. Dzięki ich regularności mogliśmy skorzystać z Twierdzenia 11 do udowodnienia istnienia rozwiązania problemu przybliżonego z parametrem ε. Taka strategia wymagała jednak wykonania przejścia granicznego z problemu przybliżonego do problemu wyjściowego przy $\varepsilon \to 0$. Dla porównania w pracy [A5] skorzystałem z bardziej ogólnego Twierdzenia 14 (por. Wniosek 26), które pozwoliło od razu wykazać istnienie rozwiązania problemu wyjściowego bez stosowania aproksymacji Yosidy. W pracy [B6] wykazaliśmy również, że przy założeniach Twierdzenia 5.1 rozwiązanie Problemu (V) jest jedyne (Twierdzenie 6.1) i hölderowsko ciągłe z wykładnikiem 1/2 jako funkcja zmiennej t (Twierdzenie 6.2). W ostatnim rozdziale przeprowadzone zostały symulacje komputerowe dla problemu fizycznego, którego matematyczny opis w swoim słabym sformułowaniu odpowiada Problemowi (V). W przykładzie tym rozważamy równanie przepływu ciepła w obszarze Ω będącym kwadratem. Na jednym z jego boków zadany jest warunek brzegowy uzależniający wielkość przepływu ciepła w kierunku normalnym zewnętrznym od temperatury na brzegu. Zależność ta ma charakter inkluzji uwzględniającej dwa typy subróżniczek różnych potencjałów, subróżniczkę Clarke'a i subróżniczkę wypukłą. Na pozostałym fragmencie brzegu zadany jest warunek Dirichleta, a równanie uzupełnione jest jednorodnym warunkiem początkowym.

[B7] M. Barboteu, K. Bartosz, P. Kalita, A. Ramadan, Analysis of a contact problem with normal compliance, finite penetration and nonmonotone slip dependent friction, 2014, Communications in Contemporary Mathematics, 16, 1350016 [29 pages], DOI: 10.1142/S0219199713500168

W pracy rozważamy stacjonarny problem kontaktowy z prawem kontaktowym opisanym warunkami

$$\begin{cases} \sigma_\nu + p(u_\nu) \le 0, \ u_\nu - g \le 0 & \\ (\sigma_\nu + p(u_\nu))(u_\nu - g) = 0 & \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} \le \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|_{\mathbb{R}^d})N(u_\nu) & \text{dla} \quad \boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|_{\mathbb{R}^d})N(u_\nu)\frac{\boldsymbol{u}_\tau}{\|\boldsymbol{u}_\tau\|_{\mathbb{R}^d}} & \text{dla} \quad \boldsymbol{u}_\tau \ne \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \text{na } \Gamma_C, \qquad (154)$$

gdzie g oznacza odległość ciała od podłoża, z którym może zachodzić kontakt, a p, μ i N są zadanymi funkcjami. Pełne sformułowanie problemu ma następującą postać.

Problem $\mathcal{P}_M$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ i naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \to \mathbb{S}^d$ spełniające warunki (29), (30), (33), (34) i (154).*

W porównaniu z modelami omawianymi w Rozdziale 3, prawo kontaktowe (154) jest znacznie bardziej skomplikowane od praw kontaktowych używanych w tamtych modelach, gdyż oba występujące w nim warunki kontaktowe: na część normalną i na część styczną są nietrywialne. Dodatkowo przemieszczenie normalne występuje w warunku na część styczną, co powoduje, że oba warunki są ze sobą sprzężone. Zwróćmy też uwagę, że warunkek na część normalną jest równoważny relacji

$$-\sigma_\nu \in p(u_\nu) + \partial I_{(-\infty,g]}(u_\nu), \tag{155}$$

gdzie $I_{(-\infty,g]}$ oznacza funkcję wskaźnikową przedziału $(-\infty, g]$ określoną wzorem (44), natomiast warunek na część styczną jest równoważny relacji

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau \in N(u_\nu)\partial_{Cl} j_\tau(\boldsymbol{u}_\tau), \text{ gdzie } j_\tau(\eta) = \int_0^{\|\eta\|_{\mathbb{R}^d}} \mu(s)\, ds \ \ \forall \eta \in \mathbb{R}^d.$$

Obecność dwóch różnych typów subróżniczek, subróżniczki Clarke'a i subróżniczki wypukłej powoduje, że słabe sformułowanie Problemu $\mathcal{P}_M$ ma postać nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnej (por. Uwaga 22). Aby ominąć wynikającą z tego faktu trudność, w pracy rozpatrujemy najpierw problem przybliżony $\mathcal{P}_M^n$ z parametrem $n \in \mathbb{N}$, w którym warunek (155) przybliżamy warunkiem

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu) + nc_2 + nc_3(u_\nu - g)_+,$$

gdzie c_2 i c_3 są dowolnymi stałymi nieujemnymi, takimi, że $c_2 + c_3 > 0$. Głównym rezultatem naszej pracy dotyczącym problemu przybliżonego jest Twierdzenie 4.1, które gwarantuje istnienie słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_M^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jego dowód opiera się na zastosowaniu Twierdzenia 11. Natomiast głównym rezultatem całej pracy jest Twierdzenie 5.1, z którego wynika istnienie słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_M$ będącego słabą granicą podciągu słabych rozwiązań Problemu $\mathcal{P}_M^n$ przy $n \to \infty$. W pracy opisany też został algorytm pozwalający rozwiązywać numerycznie zarówno Problem $\mathcal{P}_M^n$, jak również Problem $\mathcal{P}_M$. Algorytm oparty jest na metodzie elementów skończonych. Został on zaimplementowany dla modelu dwuwymiarowego, w którym zbiór Ω jest prostokątem, operator elastyczności jest liniowy, a funkcja μ w niemonotonicznym prawie tarcia określona jest wzorem (39). Przeanalizowaliśmy też normę różnicy między rozwiązaniem numerycznym Problemu $\mathcal{P}_M^n$ a rozwiązaniem numerycznym Problemu $\mathcal{P}_M$ i zaobserwowaliśmy, że zależy ona liniowo od n (im większe n, tym mniejsza różnica między dwoma rozwiązaniami).

[B8] K. Bartosz, P. Kalita, M. Barboteu, A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance, finite penetration and nonmonotone slip rate dependent friction, 2015, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 22, 452-472, DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.08.009

Problem kontaktowy badany w pracy [B8] jest uogólnieniem Problemu $\mathcal{P}_M$ z pracy [B7] na przypadek dynamiczny. Rozważamy w nim następujący warunek kontaktowy

$$\begin{cases} \sigma_\nu + p(u_\nu) \le 0, \ u_\nu - g \le 0 \\ (\sigma_\nu + p(u_\nu))(u_\nu - g) = 0 \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} \le \mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|_{\mathbb{R}^d}) p(u_\nu) & \text{dla} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\tau = \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu(\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|_{\mathbb{R}^d}) p(u_\nu) \frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau\|_{\mathbb{R}^d}} & \text{dla} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\tau \neq \boldsymbol{0} \end{cases} \quad \text{na } \Gamma_C \times [0,T], \tag{156}$$

natomiast pełne sformułowanie problemu ma postać.

Problem $\mathcal{P}_M$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ i naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{S}^d$ spełniające warunki (28), (31), (33), (34), (46) i (156).*

Podobnie jak w poprzedniej pracy, dla Problemu $\mathcal{P}_M$ rozważamy problem przybliżony z parametrem $\lambda > 0$, w którym warunek kontaktowy na część normalną (równoważny z (155)) zastępujemy warunkiem przybliżonym

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu) + \frac{1}{\lambda}(u_\nu - g)_+, \quad \lambda > 0.$$

Najważniejszym rezultatem pracy dotyczącym problemu przybliżonego jest Twierdzenie 4.5, które gwarantuje, że dla każdego $\lambda > 0$ problem przybliżony posiada słabe rozwiązanie. Dowód twierdzenia przeprowadzony jest w oparciu o Twierdzenie 11. Natomiast głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 5.1 zapewniające istnienie słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_M$. Jego dowód opiera się na przejściu granicznym ze słabymi rozwiązaniami problemu przybliżonego przy $\lambda \to 0$. Jako granicę otrzymujemy słabe rozwiązanie Problemu $\mathcal{P}_M$. Podobnie jak w pracy [B7], również w omawianym przypadku dynamicznym opracowany został algorytm bazujący na metodzie elementów skończonych oraz dyskretyzacji czasowej pozwalający wyznaczyć numeryczne przybliżenie zarówno problemu dokładnego, jak i problemu przybliżonego z parametrem λ. Wyniki implementacji algorytmu przedstawione są ostatnim rozdziale pracy.

[B9] M. Barboteu, K. Bartosz, P. Kalita, An analytical and numerical approach to a bilateral contact problem with nonmonotone friction, 2013, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 23, 263-276, DOI:10.2478/amcs-2013-0020

W pracy rozważamy stacjonarny problem mechaniki kontaktowej z niemonotonicznym warunkiem kontaktowym na część styczną mającym postać

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} \le \mu(0) S & \text{dla} \quad \boldsymbol{u}_\tau = 0 \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|_{\mathbb{R}^d}) S\, \boldsymbol{u}_\tau / \|\boldsymbol{u}_\tau\|_{\mathbb{R}^d} & \text{dla} \quad \boldsymbol{u}_\tau \neq 0 \end{cases} \quad \text{na } \Gamma_C. \tag{157}$$

Pełne sformułowanie problemu ma postać.

Problem $\mathcal{P}_M$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ i naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \to \mathbb{S}^d$ spełniające warunki (29), (30), (33), (34), (35) i (157).*

Zwróćmy uwagę, że warunek (157) jest odpowiednikiem warunku (37) w przypadku stacjonarnym (funkcja $\boldsymbol{u}$ nie zależy od czasu). Problem będący słabym sformułowaniem Problemu $\mathcal{P}_M$ jest w pracy [B9] oznaczony symbolem $\mathcal{P}_V^1$. Okazuje się, że ma on strukturę analogiczną do Problemu (Q) postawionego na początku Podrozdziału 2.5.2 (rolę przestrzeni U pełni w tym przypadku przestrzeń $L^2(\Gamma_C;\mathbb{R}^d)$, a rolę operatora ι operator śladu złożony z operatorem brania części stycznej wektora). W pracy rozważamy też Problem $\mathcal{P}_V^h$ będący przybliżeniem Galerkina Problemu $\mathcal{P}_V^1$, który z kolei jest analogiczny do Problemu (Q^h) z Podrozdziału 2.5.2. W pierwszej części pracy udowadniamy (przy odpowiednich założeniach) istnienie i jednoznaczność rozwiązania Problemu $\mathcal{P}_V^1$ (Twierdzenia 1 i 2). W drugiej części badamy błąd przybliżenia $\boldsymbol{u} \simeq \boldsymbol{u}^h$, gdzie $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{u}^h$ są rozwiązaniami odpowiednio Problemów $\mathcal{P}_V^1$ i $\mathcal{P}_V^h$. Przeprowadzone obliczenia prowadzą do oszacowania analogicznego do (123). W rezultacie otrzymujemy oszacowanie błędu przybliżenia określone wzorem (145) przytoczonym w Podrozdziale 3.7. Tam też znajduje się wytłumaczenie dlaczego nie udało się uzyskać optymalnego, tj. liniowego oszacowania błędu.
W dalszej części pracy stawiamy sobie za cel wyznaczenie w sposób numeryczny rozwiązania skończenie wymiarowego Problemu $\mathcal{P}_V^h$. Po odpowiednim przeformułowaniu sprowadzamy go do problemu minimalizacji pewnego niewypukłego funkcjonału energii na przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie n jest wymiarem, który zależy od gęstości triangulacji dziedziny (przestrzeń V^h jest określona wzorem (129)). Stosujemy do tego celu *metodę wiązki proksymalnej* opisaną w pracach Mäkeli i Miettinena cytowanych w [B9]. Algorytm został zaimplementowany dla modelu dwuwymiarowego, w którym zbiór Ω jest prostokątem, operator elastyczności jest liniowy, a funkcja μ w niemonotonicznym prawie kontaktowym określona jest wzorem (39). Ostatni rozdział pracy zawiera wyniki realizacji algorytmu uzyskane na drodze symulacji komputerowych.

[B10] K. Bartosz, Hemivariational inequalities modeling dynamic contact problems with adhesion, 2009, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications vol. 71, 1747-1762, DOI: 10.1016/j.na.2009.01.011

W pracy rozważany jest dynamiczny proces kontaktowy uwzględniający lepkie przyleganie ciała do podłoża. Warunek kontaktowy ma następującą postać.

$$\begin{cases} -\sigma_\nu(t) \in \partial j_\nu(t, \beta(t), u_\nu(t)) \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial j_\tau(t, \beta(t), \boldsymbol{u}_\tau(t)) \end{cases} \quad \text{na } \Gamma_C \times (0,T). \tag{158}$$

Funkcja $\beta\colon \Gamma_C \times (0,T) \to [0,1]$ oznacza intensywność lepkiego oddziaływania między częścią kontaktową Γ_C powierzchni ciała a powierzchnią podłoża. W szczególności gdy $\beta = 1$ oddziaływanie jest pełne, gdy $\beta = 0$, oddziaływanie nie występuje, natomiast gdy $\beta \in (0,1)$, jest ono częściowe. W czasie trwania procesu kontaktowego, intensywność wiązania może ulegać zmianie, więc zakładamy, że funkcja β zmienia się w czasie, a jej ewolucja opisana jest równaniem różniczkowym zwyczajnym

$$\begin{cases} \beta'(t) = F(t, \boldsymbol{u}(t), \beta(t)) \\ \beta(0) = \beta_0 \end{cases} \quad \text{na } \Gamma_C \times (0, T). \tag{159}$$

Pełne sformułowanie problemu ma następującą postać.

Problem $\mathcal{P}$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \to \mathbb{S}^d$ oraz lepkość $\beta\colon \Gamma_C \times (0, T) \to [0, 1]$ spełniające warunki (28), (31), (33), (34), (46), (158) i (159).*

Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 4 zapewniające istnienie słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}$. Dowód twierdzenia podzielony jest na dwa najważniejsze etapy. W pierwszym z nich wykazane zostało istnienie i jednoznaczność rozwiązania problemu Cauchye'ego (159) przy każdym ustalonym elemencie $\boldsymbol{z}$ w miejscu $\boldsymbol{u}$. W oparciu o ten rezultat, zdefiniowany został operator rezolwenty $\boldsymbol{z} \to \mathcal{R}\boldsymbol{z} := \beta$, gdzie β jest (jedynym) rozwiązaniem (159) przy ustalonym $\boldsymbol{z}$ w miejscu $\boldsymbol{u}$. Następnie w słabym sformułowaniu Problemu $\mathcal{P}$ w miejsce β wstawione zostało $\mathcal{R}\boldsymbol{u}$, co pozwoliło na wyeliminowanie niewiadomej β z problemu. Dzięki temu w drugim etapie dowodu rozważany jest już problem, w którym występuje tylko jedna niewiadoma $\boldsymbol{u}$. Istnienie rozwiązania tego problemu zostało dowiedzione w oparciu o twiedzenie dotyczące surjektywności operatorów L-pseudomonotonicznych (por. [8], Twierdzenie 6.3.73).

[B11] K. Bartosz, P. Kalita, Optimal control for a class of dynamic viscoelastic contact problems with adhesion, 2012, Dynamic Systems and Applications, 21, 269-292

Praca stanowi kontynuację pracy [B10] i dotyczy zagadnienia sterowania optymalnego dla rozważanego tam Problemu $\mathcal{P}$. W szczególności rozważamy słabe sformułowanie Problemu $\mathcal{P}$ (Problem (AVFC)) i określamy zestaw zmiennych sterujących $\phi = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \beta^0)$, gdzie $\boldsymbol{f}$ jest prawą stroną słabego sformułowania Problemu $\mathcal{P}$ zdefiniowaną analogicznie do (58), $\boldsymbol{u}^0$, $\boldsymbol{u}^1$ są elementami występującymi w warunku początkowym (46), a β^0 jest wartością występującą w warunku początkowym w (159). Symbolem $\bar{\Phi}_{ad}$ oznaczamy zbiór wszystkich sterowań dopuszczalnych ϕ, a symbolem $S(\phi)$ zbiór wszystkich słabych rozwiązań Problemu $\mathcal{P}$ przy ustalonych danych $\phi = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{u}^1, \beta^0)$. Problem sterowania optymalnego polega na znalezieniu sterowania $\phi^* \in \bar{\Phi}_{ad}$ i rozwiązania $y^* \in S(\phi^*)$ takich, że

$$\mathcal{F}(\phi^*, y^*) = \inf\{\mathcal{F}(\phi, y) : \phi \in \bar{\Phi}_{ad},\, y \in S(\phi)\},$$

gdzie $\mathcal{F}$ jest zadanym funkcjonałem. Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 5.4 gwarantujące istnienie rozwiązania rozważanego problemu sterowania optymalnego.

[C1] K. Bartosz, Hemivariational inequality approach to the dynamic viscoelastic sliding contact problem with wear, Nonlinear Analysis, Theory,

Methods and Applications 65 (2006) 546-566,
DOI:10.1016/j.na.2005.09.027

W pracy rozważany jest dynamiczny proces kontaktowy z warunkiem kontaktowym na część normalną w postaci

$$-\sigma_\nu \in \partial j_{Cl}(u_\nu') \ \text{ na } \ \Gamma_C, \tag{160}$$

gdzie $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją lokalnie lipszycowską. Motywacją do rozważania warunku (160) był zamiar uogólnienia warunku

$$-\sigma_\nu = \theta |u_\nu'|, \tag{161}$$

gdzie $\theta > 0$ jest dane. Jeżeli funkcja j określona jest wzorem $j(\xi) = \frac{1}{2}\theta|\xi|\xi$ dla każdego $\xi \in \mathbb{R}$, to $\partial_{Cl} j(\xi) = \{\theta|\xi|\}$ i warunek (160) redukuje się do (161). Ostatni warunek występuje w modelach opisujących kontakt bilateralny (w którym ciało przylega do podłoża) uwzględniający zniszczenie (ścieranie się) powierzchni kontaktowej. Zjawisko to opisane jest za pomocą funkcji $w\colon \Gamma_C \times (0,T) \to \mathbb{R}$ określającej grubość warstwy, która uległa zużyciu, a więc głębokość penetracji ciała w podłoże. Wynika stąd zależność

$$u_\nu = -w. \tag{162}$$

Ponadto uwzględniamy *prawo Archarda*, w myśl którego prędkość ścierania materiału jest proporcjonalna do siły nacisku w kierunku normalnym σ_ν i do prędkości podłoża v^*. Stąd mamy warunek

$$w' = -k_w \sigma_\nu v^*, \tag{163}$$

gdzie $k_w > 0$ jest ustalone. Podstawiając $\theta = 1/(k_w v^*)$ do (162) i (163) otrzymujemy

$$\sigma_\nu = \theta u_\nu'.$$

Ponieważ naprężenie normalne na powierzchni kontaktowej jest nidodatnie ($\sigma_\nu \le 0$ na Γ_C), z warunku (163) otrzymujemy $w' \ge 0$, co oznacza, że zużycie materiału rośnie w czasie. Dodatkowo z (162) mamy $u_\nu' \le 0$, a ponieważ $\sigma_\nu \le 0$, otrzymujemy warunek (161).
Podsumowując, warunek (160) stanowi uogólnienie warunku kontaktowego odpowiadającego ścieraniu materiału. Dla części stycznej przyjęty został warunek kontaktowy

$$u_\tau = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_C \times [0,T]. \tag{164}$$

Pełne sformułowanie problemu rozważanego w pracy [C1] ma postać.

Problem $\mathcal{P}$. *Znaleźć przemieszczenie $\boldsymbol{u}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ i naprężenie $\boldsymbol{\sigma}\colon \Omega \to \mathbb{S}^d$ spełniające warunki (28), (31), (33), (34), (46), (160) i (164).*

W równaniu (28) dla uproszczenia przyjęto $\rho = 1$.
Głównym rezultatem pracy jest Twierdzenie 11 gwarantujące istnienie słabego rozwiązania Problemu $\mathcal{P}$. Dowód twierdzenia opiera się na rezultacie dotyczącym surjektywności operatorów L-pseudomonotonicznych (por. [8], Twierdzenie 6.3.73).

6. Plany dotyczące dalszych badań naukowych.
W najbliższej przyszłości zamierzam kontynuować badania dotyczące analizy numerycznej modeli kontaktowych mechaniki. W szczególności zamierzam uogólnić wyniki uzyskane w pracach [A7]-[A9]. Uogólnienia te opierają się na następujących refleksjach.

    1. Praca [A7] stanowi uogólnienie pracy [3], na przypadek z niemonotonicznym prawem tarcia. Jednak model omawiany w [3] jest bardziej złożony, gdyż uwzględnia dodatkowo zjawisko piezoelektryczne. Dla uproszczenia, w pracy [A7] było ono pominięte. Tym razem jednak zamierzam uogólnić wyniki pracy [A7] na model kontaktu piezoelektrycznego.
    2. W pracach [A7] i [A8] wykorzystane były pewne nierówności na stałe (por. Wniosek 52 (iii)). Wiadomo już (por. Wniosek 48), że zastosowanie warunku H_{aux} wprowadzonego w Podrozdziale 2.4.1 lub bardziej ogólnego warunku $H(\iota)$ wprowadzonego w Podrozdziale 2.2 (por. Uwaga 47) pozwala w pewnych sytuacjach zrezygnować z tego typu restrykcyjnych założeń. Wszystko wskazuje na to, że jest tak również w przypadku analizy numerycznej przezentowanej w pracach [A7] i [A8].
    3. W pracach [A7] i [A8] korzystaliśmy z założenia o koercytywności operatora lepkości. Natomiast w pracach [A1], [A2] i [A6] udało się to założenie osłabić (zob. np. $H(A)$(iii) z Podrozdziału 2.4.1), co otwiera drogę do analizy modelu ciała swobodnego (zob. Wniosek 45). Wszystko wskazuje na to, że analiza numeryczna przeprowadzona w pracach [A7] i [A8] jest możliwa również przy tak osłabionym założeniu o operatorze A.
    4. Uwzględniając dwa poprzednie spostrzeżenia planuję przeprowadzić analizę numeryczną dla modelu ciała swobodnego bez zakładania nierówności na stałe problemu. Dotyczyć to będzie zarówno problemu lepkosprężystego z uwzględnieniem zjawiska piezoelektrycznego jak również problemu termolepkosprężystego, jak w pracy [A8].
    5. W pracy [A9] przeprowadzona jest analiza numeryczna problemu badanego w [A5]. Tymczasem problem rozważany w [A6] jest w pewnym sensie jego uogólnieniem na przypadek dynamiczny. Biorąc pod uwagę analogie między dwoma modelami, uważam, że możliwa jest analiza numeryczna problemu z pracy [A6] oparta na podobnej technice jak zastosowana w pracy [A9].

Literatura

[1] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 2009.

[2] J.P. Aubin, H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990.

[3] M. Barboteu, J.R. Fernández, R. Tarraf, Numerical analysis of a dynamic piezoelectric contact problem arising in viscoelasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **197** (2008), 3724–3732.

[4] S.C. Brenner, L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, third edition, Springer-Verlag, New York, 2008.

[5] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[6] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Wiley–Interscience, New York, 1983.

[7] Z. Denkowski, S. Migórski, N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Boston, Dordrecht, London, New York, 2003.

[8] Z. Denkowski, S. Migórski, N.S. Papageorgiou, *An Introduction to Nonlinear Analysis: Applications*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, Boston, Dordrecht, London, New York, 2003.

[9] E. Emrich, M. Thalhammer, Convergence of a time discretisation for doubly nonlinear evolution equations of second order, *Found. Comput. Math.* **10** (2010), 171-190.

[10] J.F. Han, S. Migórski, Analysis of a dynamic viscoelastic unilateral contact problem with normal damped response, *Nonlinear Anal. Real.* **28** (2016), 229–250.

[11] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, Americal Mathematical Society, Providence, RI–International Press, Somerville, MA, 2002.

[12] P. Kalita, Convergence of Rothe scheme for hemivariational inequalities of parabolic type, *Int. J. Numer. Anal. Mod.* **10** (2013), 445–465.

[13] P. Kalita, *Semidiscrete variable time-step θ-scheme for nonmonotone evolution inclusion*, arXiv:1402.3721.

[14] V. K. Le, Range and existence theorem for pseudomonotone perturbations of maximal monotone operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **139** (2011), 1645–1658.

[15] S. Migórski, Boundary hemivariational inequalities of hyperbolic type and applications, *J. Global Optim.* **31** (2005), 505–533.

[16] S. Migórski, P. Szafraniec, A class of dynamic frictional contact problems governed by a system of hemivariational inequalities in thermoviscoelasticity, *Nonlinear Anal.-Real.* **15** (2014), 158–171.

[17] S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **26**, Springer, New York, 2013.

[18] J. Nečas, I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.

[19] M. Sofonea, A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series: 398, 2012.

[20] T. Roubiček, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2005.

[21] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol. II/A: Linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.

[22] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol. II/B: Nonlinear Monotone Operators,* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.

Krzysztof Bartosz