

## **Opinia o rozprawie doktorskiej mgra Krzysztofa Turka**

### **pt. „Wycena opcji na rynku niepłynnym”**

Przedstawiona rozprawa doktorska dotyczy stochastycznych interpretacji rozwiązań pewnych równań parabolicznych. Główny wynik pracy to pokazanie istnienia rozwiązań semiliniowego równania parabolicznego jako punktu stałego odwzorowania wynikającego z uogólnionego wzoru Feynmana Kaca. Jest ono poprzedzone możliwie ogólnymi warunkami zapewniającymi regularność formuły pochodzącej z wzoru Feynmana Kaca i spełnianie przez nią liniowego równania parabolicznego z warunkiem brzegowym. Istnienie rozwiązania semiliniowego równania parabolicznego jest pokazane najpierw dla przypadku funkcji wklęsłej przy liniowym wyrazie. Wtedy rozwiązanie dostajemy poprzez iterację wzoru Feynmana Kaca. Tworzymy bowiem ciąg malejący ograniczony od dołu. Do dowodu głównego wyniku pracy mówiącego o istnieniu punktu stałego bez założenia wklęsłości stosowane jest uogólnienie nierówności Gronwalla zwane nierównością Bihariego LaSalle'a. Istnienie punktu stałego jest pokazane za pomocą twierdzenia Schaudera dla przestrzeni lokalnie zwartych z odwzorowaniem zawężonym do odpowiedniego zbioru. Uzyskane wyniki dotyczące stochastycznych interpretacji rozwiązań parabolicznych równań semiliniowych są następnie wykorzystywane do wyceny opcji na rynku niepłynnym z dodatkowym wypukłym kosztem (dokładnie w pracy kwadratowym) za transakcję, który odpowiada za brak płynności rynku (to jest czego nie pisze autor, możliwe zmiany ceny np. ich wzrost w przypadku większych zakupów). W ten sposób zagadnienie zabezpieczenia kwadratowego z dodatkowym kosztem za brak płynności sprowadza się do minimalizacji funkcjonu (3.1.16). Prowadzi to z kolei do równania Bellmana Hamiltona Jacobiego postaci (3.2.4), które po podstawieniu optymalnej strategii sprowadza się do semiliniowego równania parabolicznego (3.2.27). Rozwiązanie tego ostatniego równania dostajemy rozwiązując układ trzech równań parabolicznych z których istnienie rozwiązania pierwszego równania wynika ze wspomnianego powyżej głównego wyniku pracy. Daje to nam optymalną strategię przy pewnych założeniach na proces cen i cenę opcji. Pozostaje zatem sprawdzenie spełnienia założeń dla modeli CEV i SABR, z których tylko pierwszy jest dokładniej opisany w pracy. Sprawdza się to do pokazania między innymi istnienia momentów rozwiązań odpowiednich równań stochastycznych. Do tego celu autor stosuje rezultat z pracy Andersena i Piterbarga z 2007 roku. W przypadku modelu CEV spełnienie założeń pokazuje się wtedy szybko. W przypadku modelu SABR wymagana jest dalsza analiza stochastycznej volatility.

Uzyskane w doktoracie wyniki są ciekawe i wartościowe. Autor wykazuje się dobrą znajomością równań cząstkowych i niezłą wprawą w analizie stochastycznej. Pierwsza wersja pracy zawierała szereg błędów stylistycznych utrudniających jej zrozumienie. W nowej wersji te błędy w większości przypadków zostały usunięte.

Pierwsza część pracy doktorskiej ma charakter wstępny. Autor zawiera w niej podstawowe wyniki z semiliniowych równań parabolicznych, wprowadza podstawowe pojęcia z teorii stochastycznych równań różniczkowych i następnie pokazuje związki między procesami stochastycznymi a równaniami cząstkowymi.

Tytuł rozprawy nie odzwierciedla jej zawartości. Model rynku niepełnego pojawia się na końcu pracy jako przykład zastosowania uzyskanych wyników z pogranicza równań cząstkowych i stochastyki.

Autor swoją wiedzę z analizy stochastycznej opiera na książce Ikedy Watanabe, które to ograniczenie jest dość dyskusyjne. W tej książce mylnie nawias skośny nazywa się kwadratowym wahanem, podczas gdy jest nim nawias kwadratowy.

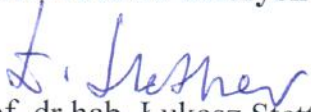
Poza tym niektóre luźne sformułowania w pracy są dość dyskusyjne, jak określenie rynku niepełnego zaraz na początku pracy.

Pierwotna wersja pracy była napisana generalnie bardzo niechlujnie. W aktualnej znacznie zmniejszyła się liczba błędów drukarskich (ale takowe nadal są dość liczne, ale już nie tak skrajnie rażące). Tym niemniej nadal w definicjach używa się symboli i oznaczeń wcześniej nie zdefiniowanych. W pracy nigdzie nie jest napisane co znaczą symbole CEV i SABR. Generalnie krótki wstęp do pracy jest praktycznie czytelny tylko dla specjalistów z danej tematyki, a powinien być zrozumiały znacznie szerszego grona.

Druga wersja pracy jest nieco poszerzona poprzez podanie poprawnego dowodu Twierdzenia 3.9, jak również udowodnieniu w wersji potrzebnej w pracy Twierdzenia 3.13. Jest to zdecydowanie wartościowe uzupełnienie.

Mimo pewnych krytycznych uwag uzyskany w doktoracie wynik jest na pewno wartościowy i matematycznie ładny.

Dlatego **nie mam wątpliwości, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wszelkie ustawowe wymagania i dlatego wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

  
Prof. dr hab. Łukasz Stettner

Warszawa 10 marca 2018