Prof. dr hab. Andrzej Palczewski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja
poprawionej wersji rozprawy doktorskiej mgr Krzysztofa Turka
pt. "Wycena opcji na rynku niepłynnym"

Rozprawa doktorska mgr Krzysztofa Turka dotyczy problemów związanych z analizą modeli rynku instrumentów pochodnych. Rozprawa złożona jest z 3 rozdziałów oraz 3 dodatków. Zasadniczym celem pracy jest znalezienie optymalnej strategii zabezpieczającej (strategii *hedgingu*) dla opcji na pewien instrument bazowy z uwzględnieniem kosztów braku płynności rynku.

Opisany powyżej problem jest rozwiązany w rozdziale 3. Problem finansowy jest w nim sprowadzony do matematycznego zadania sterowania stochastycznego. Rozwiązanie zadania sterowania stochastycznego dokonane jest standardową metodą: wykorzystując zasadę Bellmana problem znalezienia optymalnej strategii sprowadza się do rozwiązania nieliniowego równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (HJB). Rozwiązania równania HJB (funkcji wartości) poszukuje się w postaci kwadratowej funkcji strategii inwestycyjnej, co prowadzi do układu równań na współczynniki tej funkcji. Zasadnicza trudność polega więc na rozwiązaniu równań wyznaczających współczynniki w funkcji wartości. Postać tych równań opisuje Lemat 3.8. W poprawionej wersji pracy lemat ten został rozszerzony o informację, że funkcja wartości jest nieujemna. Wymagało to dowodu, że funkcja $a \geq 0$ oraz $b^2 - 4ac \leq 0$. Dowody obu faktów są zrobione bardzo pomysłowo w oparciu o Twierdzenie 2.31 i umieszczone w dowodzie Twierdzenia 3.9. Warunek $a \geq 0$ jest także istotny w dowodzie zasadniczego wyniku pracy – istnienia strategii optymalnej wykazanej także w Twierdzeniu 3.9. Dowód istnienia strategii optymalnej sprowadza się do wykazania istnienia rozwiązań równań dla współczynników funkcji wartości. Wybierając właściwą kolejność rozwiązań, każde z równań można rozwiązać niezależnie. Tylko jedno z tych równań jest równaniem nieliniowym (jest ono półliniowe). Do dowodu istnienia jego rozwiązania autor wykorzystuje udowodniony przez siebie pomocniczy wynik o istnieniu rozwiązań dla półliniowych równań parabolicznych (Twierdzenie 2.31). Dzięki udowodnieniu, że $a \geq 0$ spełniony jest Warunek 2.3, czyli funkcja $f$ (nieliniowa funkcja w półliniowym równaniu parabolicznym) jest globalnie ograniczona z dołu. Pozostałe równania są liniowe i dowody istnienia rozwiązań są otrzymywane z udowodnionego przez doktoranta uogólnienia twierdzenia Feynmana-Kaca (Twierdzenie 1.60).

Dalszą część rozdziału 3 zajmują ilustracje, jak otrzymany wynik teoretyczny działa dla kilku konkretnych modeli rynku finansowego. Autor opisuje wyniki dla modeli CEV oraz SABR (w pewnym miejscu pracy wspomniany jest także model Hestona, ale ten model nie jest analizowany i jest dość oczywiste, że modelu Hestona nie da się łatwo dopasować do przyjętych założeń). Dowód, że modele CEV i SABR spełniają założenia Twierdzenia 3.9 został oparty na twierdzeniu z pracy Andersena i Piterbarga z 2007 roku. Twierdzenie 3.13 z rozprawy jest powtórzeniem Proposition 5.1 z pracy Andersena i Piterbarga. W poprawionej wersji pracy doktorant zacytował poprawnie to twierdzenie. Stwierdzenie 3.14 bazujące na Twierdzeniu 3.13 gwarantuje spełnienie założeń Twierdzenia 3.9 dla modelu CEV. Lemat 3.15 dowodzi, że także model SABR spełnia założenia Twierdzenia 3.9. W poprawionej wersji pracy istnienie rozwiązania oraz oszacowania na momenty dla równania opisującego dynamikę zmienności w modelu SABR otrzymano z ogólnej teorii rozwiązań równań stochastycznych. Mając to rozwiązanie autor wykorzystał Twierdzenie 3.13 do wykazania, że także równanie dynamiki cen instrumentu bazowego posiada odpowiednie oszacowania. Dowodzi to spełniania założeń Twierdzenia 3.9.

Reszta pracy, która jest objętościowo znacznie większa niż rozdział 3, poświęcona jest podaniu pomocniczych faktów z teorii równań różniczkowych oraz procesów stochastycznych. W rozdziale 1 udowodnione jest rozszerzenie twierdzenia Feynmana-Kaca na przypadek procesów osiągających brzeg (Twierdzenie 1.60). Twierdzenie to jest udoskonaloną wersją twierdzenia udowodnionego w pracy Heatha i Schweizera z 2000 roku. Nowy wynik polega na rozszerzeniu założeń, tak aby obejmowały one proces stochastyczny opisujący model CEV z $-1/2 < \beta < 0$ (oryginalny wynik Heatha i Schweizera jest prawdziwy tylko dla $\beta \geq 0$). Rozdział 2 zawiera 2 nowe twierdzenia o istnieniu rozwiązań dla nieliniowych równań parabolicznych oraz szereg faktów pomocniczych. Twierdzenie 2.29 podaje dowód istnienia jednoznacznego rozwiązania dla półliniowych równań parabolicznych przy założeniu, że wyraz nieliniowy jest funkcją rosnącą i wklęsłą. Dowód tego twierdzenia wykorzystuje bardzo pomysłową, ale rzadko wykorzystywaną konstrukcje przybliżeń rozwiązania z góry oraz z dołu (oczywiście konstrukcja takiego ciągu przybliżeń jest możliwa dzięki założeniom o wyrazie nieliniowym). W początkowym zamyśle doktorant chciał wykorzystać to twierdzenie do dowodu istnienia rozwiązań dla modelu CEV (w nim właśnie wyraz nieliniowy jest rosnący i wklęsły). W końcowej redakcji ten pomysł został zarzucony i dowód dla CEV otrzymano z Twierdzenia 3.13. Drugim twierdzeniem o istnieniu i jednoznaczności jest Twierdzenie 2.31, które nie zakłada specjalnej postaci nieliniowości. Dowód tego twierdzenia wykorzystuje twierdzenie Schaudera o punkcie stałym. Należy podkreślić, że dowód jest skomplikowany i wymaga wielu faktów pomocniczych: wybór właściwej przestrzeni, w której poszukuje się punktu stałego, a następnie wykazanie, że skonstruowane odwzorowanie przeprowadza tę przestrzeń w siebie i jest ciągłe. Recenzentowi dalej nie podoba się brak odniesienia w rozprawie do fundamentalnej w teorii nieliniowych równań parabolicznych monografii: Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. – *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc. 1968. Wydaje się, że przy założeniu Warunku 2.3 w monografii tej są twierdzenia (też dowodzone przy pomocy twierdzenia Schaudera o punkcie stałym), które odpowiadają Twierdzeniu 2.31. Chociaż zamieszczony w rozprawie dowód Twierdzenia 2.31 jest oryginalny, to wykorzystanie wyników z monografii Ladyzhenskaya, Solonnikov, Uraltseva mogłoby znacznie pracę skrócić.

Od strony redakcyjnej nowa wersja pracy jest znacznie lepsza niż wersja początkowa. Oczywiście autor poprawił redakcję Lematu 3.8 i usunął błędy wytknięte w poprzedniej recenzji. Poprawione zostało także wiele innych błędów. Jednak ciągle można znaleźć różne niepoprawne (lub niezupełnie poprawne) napisy. W dalszym ciągu autor pozostawił zapis twierdzeń w formie jednego zdania w konwencji *"Jeśli ..., to ... "*. W przypadku twierdzeń, gdzie zarówno założenia jak tezy są rozbudowanymi stwierdzeniami zawierającymi wiele punktów, taki sposób formułowania rezultatów jest bardzo trudny do logicznego rozbioru.

Recenzowana rozprawa dowodzi niezłego przygotowania matematycznego autora i znacznej wiedzy w zakresie procesów stochastycznych i teorii równań różniczkowych cząstkowych. Autor pokazał też, że potrafi wnieść do tej teorii oryginalne wyniki. Reasumując uważam, że praca mgr Krzysztofa Turka spełnia w obecnej postaci wymogi Ustawy "O stopniach naukowych i tytule naukowym" i wnoszę o dopuszczenie autora do dalszego toku przewodu doktorskiego.

Warszawa, 18 stycznia 2018 r.