Prof. dr hab. Andrzej Palczewski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja
rozprawy doktorskiej mgr Krzysztofa Turka
pt. "Wycena opcji na rynku niepłynnym"

Rozprawa doktorska mgr Krzysztofa Turka dotyczy problemów związanych z analizą modeli rynku instrumentów pochodnych. Rozprawa złożona jest z 3 rozdziałów oraz 3 dodatków. Zasadniczym celem pracy jest znalezienie optymalnej strategii zabezpieczającej (strategii *hedgingu*) dla opcji na pewien instrument bazowy z uwzględnieniem kosztów braku płynności rynku.

Opisany powyżej problem jest rozwiązany w rozdziale 3. Problem finansowy jest w nim sprowadzony do matematycznego zadania sterowania stochastycznego. Rozwiązanie zadania sterowania stochastycznego dokonane jest standardową metodą: wykorzystując zasadę Bellmana problem znalezienia optymalnej strategii sprowadza się do rozwiązania nieliniowego równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (HJB). Rozwiązania równania HJB (funkcji wartości) poszukuje się w postaci kwadratowej funkcji strategii inwestycyjnej, co prowadzi do układu równań na współczynniki tej funkcji. Zasadnicza trudność polega więc na rozwiązaniu równań wyznaczających współczynniki w funkcji wartości. Postać tych równań opisuje Lemat 3.8. Niestety dowód tego lematu jest niekompletny. Autor nie wykazał, że funkcja wartości jest funkcją nieujemną, czego wymagają założenia Lematu 3.6 (twierdzenia weryfikacyjnego). Oznacza to brak dowodu, że funkcja $a \geq 0$ oraz $b^2 - 4ac \leq 0$. Warunek $a \geq 0$ jest także istotny w dowodzie zasadniczego twierdzenia pracy – Twierdzenia 3.9, które pokazuje istnienie strategii optymalnej. Jego dowód sprowadza się do wykazania istnienia rozwiązań równań dla współczynników funkcji wartości. Wybierając właściwą kolejność rozwiązań, każde z równań można rozwiązać niezależnie. Tylko jedno z tych równań jest równaniem nieliniowym (jest ono półliniowe). Do dowodu istnienia jego rozwiązania autor wykorzystuje udowodniony przez siebie pomocniczy wynik o istnieniu rozwiązań dla półliniowych równań parabolicznych (Twierdzenie 2.31). Niestety w tym dowodzie ponownie występują braki. Warunek 2.3 wymaga, aby funkcja f (nieliniowa funkcja w półliniowym równaniu parabolicznym) była globalnie ograniczona z dołu. W równaniu (3.2.30) $f = \frac{2a}{x\epsilon}$. Jak dobrze wiadomo, funkcja liniowa nie jest ograniczona z dołu globalnie. To ograniczenie jest prawdziwe jedynie, jeśli $a \geq 0$. Pozostałe równania są liniowe i dowody istnienia rozwiązań są otrzymywane z udowodnionego przez doktoranta uogólnienia twierdzenia Feynmana-Kaca (Twierdzenie 1.60).

Dalszą część rozdziału 3 zajmują ilustracje, jak otrzymany wynik teoretyczny działa dla kilku konkretnych modeli rynku finansowego. Autor opisuje wyniki dla modeli CEV oraz SABR (w pewnym miejscu pracy wspomniany jest także model Hestona, ale ten model nie jest analizowany i jest dość oczywiste, że modelu Hestona nie da się łatwo dopasować do przyjętych założeń). Dowód, że modele CEV i SABR spełniają założenia Twierdzenia 3.9 został oparty na twierdzeniu z pracy Andersena i Piterbarga z 2007 roku. Twierdzenie 3.13 z rozprawy jest połączeniem dwóch twierdzeń z pracy Andersena i Piterbarga (Proposition 5.1 oraz Lemma 5.2). Niestety doktorant nie zacytował tych twierdzeń w sposób kompletny. Podane w Twierdzeniu 3.13 założenie $-1 < \beta < 0$ wymaga uzupełniającego warunku brzegowego w zerze dla procesu S_t (dla $\beta < -1/2$ rozwiązanie jest niejednoznaczne, dla jednoznaczności potrzebny jest dodatkowy warunek brzegowy). Jeśli uzupełnić Twierdzenie 3.13 warunkiem, że proces S_t ma pochłaniającą barierę w zerze, to Stwierdzenie 3.14 bazujące na Twierdzeniu 3.13 gwarantuje spełnienie założeń Twierdzenia 3.9 dla modelu CEV. Lemat 3.15 jest częścią dowodu, że model SABR spełnia założenia Twierdzenia 3.9. Niestety dowód tego lematu w jawny sposób wykorzystuje fakt sprzeczny z założeniami Twierdzenia 3.13. Wykonane jest bowiem podstawienie $\alpha = -\frac{1}{4}\epsilon^2$, co daje $\alpha < 0$, gdy w Twierdzeniu 3.13 zakłada się $\alpha \geq 0$. Co prawda w pracy Andersona i Piterbarga jest uwaga, że oszacowanie (3.3.1) jest prawdziwe także dla ujemnych α, ale jest to jedynie luźna uwaga bez dowodu. Co więcej, dowód istnienia rozwiązania (Lemma 5.2) jest robiony przy ogólnych założeniach z pracy (w tym $\alpha \geq 0$). Oczywiście fakt istnienia silnego rozwiązania dla równania (3.3.6) wynika z ogólnej teorii rozwiązań równań stochastycznych, ale w dowodzie Lematu 3.15 należy wykorzystać tę ogólną teorie a nie powoływać się na Twierdzenie 3.13. Poza tym nie wydaje się właściwe przyjęcie na wiarę uwagi Andersena i Piterbarga o ograniczoności wszystkich momentów rozwiązania dla modelu SABR – ten fakt też wymaga dowodu.

Reszta pracy, która jest objętościowo znacznie większa niż rozdział 3, poświęcona jest podaniu pomocniczych faktów z teorii równań różniczkowych oraz procesów stochastycznych. W rozdziale 1 udowodnione jest rozszerzenie twierdzenia Feynmana-Kaca na przypadek procesów osiągających brzeg (Twierdzenie 1.60). Twierdzenie to jest udoskonaloną wersją twierdzenia udowodnionego w pracy Heatha i Schweizera z 2000 roku. Nowy wynik polega na rozszerzeniu założeń, tak aby obejmowały one proces stochastyczny opisujący model CEV z $-1/2 < \beta < 0$ (oryginalny wynik Heatha i Schweizera jest prawdziwy tylko dla $\beta \geq 0$). Rozdział 2 zawiera 2 nowe twierdzenia o istnieniu rozwiązań dla nieliniowych równań parabolicznych oraz szereg faktów pomocniczych. Twierdzenie 2.29 podaje dowód istnienia jednoznacznego rozwiązania dla półliniowych równań parabolicznych przy założeniu, że wyraz nieliniowy jest funkcją rosnącą i wklęsłą. Dowód tego twierdzenia wykorzystuje bardzo pomysłową, ale rzadko wykorzystywaną konstrukcje przybliżeń rozwiązania z góry oraz z dołu (oczywiście konstrukcja takiego ciągu przybliżeń jest możliwa dzięki założeniom o wyrazie nieliniowym). W początkowym zamyśle doktorant chciał wykorzystać to twierdzenie do dowodu istnienia rozwiązań dla modelu CEV (w nim właśnie wyraz nieliniowy jest rosnący i wklęsły). W końcowej redakcji ten pomysł został zarzucony i dowód dla CEV otrzymano z Twierdzenia 3.13. Drugim twierdzeniem o istnieniu i jednoznaczności jest Twierdzenie 2.31, które nie zakłada specjalnej postaci nieliniowości. Dowód tego twierdzenia wykorzystuje twierdzenie Schaudera o punkcie stałym. Należy podkreślić, że dowód jest skomplikowany i wymaga wielu faktów pomocniczych: wybór właściwej przestrzeni, w której poszukuje się punktu stałego, a następnie wykazanie, że skonstruowane odwzorowanie przeprowadza tę przestrzeń w siebie i jest ciągłe. Recenzenta niepokoi brak odniesienia w rozprawie do fundamentalnej w teorii nieliniowych równań parabolicznych monografii: Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. – *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc. 1968. Wydaje się, że przy założeniu Warunku 2.3 w monografii tej są twierdzenia, które odpowiadają Twierdzeniu 2.31. Chociaż zamieszczony w rozprawie dowód Twierdzenia 2.31 jest oryginalny to brak odniesienia do wyników z tej monografii jest niewątpliwą słabością pracy.

Od strony redakcyjnej praca napisana jest fatalnie. Gdyby czytać tekst literalnie, to wiele umieszczonych wyników jest nieprawdziwych, bo opuszczono nawiasy, albo znaki przestankowe, albo umieszczono te znaki niewłaściwie, ewentualnie popełniono rażące błędy gramatyczne. Oczywiście świadomy czytelnik potrafi łatwo takie błędy poprawić, ale utrudniają one bardzo lekturę tekstu. Poza tym autor postanowił większość twierdzeń zapisać jednym zdaniem w konwencji *”Jeśli ..., to ... ”*. W przypadku twierdzeń na pograniczu procesów stochastycznych i równań różniczkowych, gdzie zarówno założenia jak tezy są rozbudowanymi stwierdzeniami zawierającymi wiele punktów, taki sposób formułowania rezultatów jest bardzo trudny do logicznego rozbioru i oddzielenia założeń twierdzenia od jego tezy. Do tego należy dodać, że praca napisana jest bardzo nieporządnie. Wspomniałem już wcześniej o Twierdzeniu 3.13, w którym doktorant opuścił jedno z istotnych założeń. Takich i gorszych przypadków jest dużo więcej. Aby nie być gołosłownym, przeanalizuję dla przykładu sformułowanie Lematu 3.8. Lemat ten dotyczy funkcji a, b, c będących funkcjami zmiennych (t, S). W założeniach lematu postuluje się, aby funkcje te były klasy $C^{1,2}(D)$. Problem polega na tym, że obszar D jest obszarem zmienności wyłącznie zmiennej S (poprawnie powinno być $C^{1,2}([0, T] \times D)$). Taki błąd można jeszcze łatwo poprawić, bo jest oczywiste, co zostało opuszczone. Ale dalej dalej autor postuluje, aby funkcje te były *”ciągłymi na* $(\hat{D} \cup D)$*”* i tu nie jest oczywiste, czy mają być to ciągłe funkcje zmiennej S, jak jest napisane, czy może ciągłe funkcje pary zmiennych (t, S). Dalej w tym samym lemacie powiada się, że funkcje a, b, c mają spełniać równania (3.2.30), (3.2.31) i (3.2.32), tylko żaden z tych napisów nie jest równaniem, a jedynie jedną ze stron równania (brakuje znaku równości oraz drugiej strony równania). To jest przykład jednego tylko lematu. Niestety takich przykładów można znaleźć w pracy co najmniej kilkanaście.

Recenzowana rozprawa dowodzi niezłego przygotowania matematycznego autora i znacznej wiedzy w zakresie procesów stochastycznych i teorii równań różniczkowych cząstkowych. Autor pokazał też, że potrafi wnieść do tej teorii oryginalne wyniki. Jednak w realizacji podjętego problemu autorowi zabrakło dyscypliny niezbędnej w pracy matematycznej, co doprowadziło do przedstawienia niekompletnych dowodów. Reasumując uważam, że praca mgr Krzysztofa Turka nie spełnia w obecnej postaci wymogów Ustawy "O stopniach naukowych i tytule naukowym". Uważam, że autor powinien dopracować brakujące w pracy dowody, radykalnie poprawić stronę redakcyjną pracy a następnie przedstawić ją do ponownej recenzji.

Warszawa, 8 listopada 2017 r.