RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PANA MGR. VAN THIEN NGUYENA: "ON CEGRELL CLASSES FOR M-SUBHARMONIC FUNCTIONS"

ANNA ZDUNIK

Pan mgr Van Thien Nguyen przedstawił bardzo obszerną rozprawę doktorską dotyczącą zespolonego operatora m-Hessianu w m-hiperwypukłych obszarach $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Przedstawiona praca zawiera szereg wyników, które mogą być rozumiane jako uogólnienie wcześniej znanych wyników dla operatora Monge'a -Ampère'a (monografia [2]). Z drugiej strony, wyniki Autora koncentrujące się na operatorze m-Hessianu można odczytywać jako budowanie teorii m-Hessianu dla możliwie najszerszej klasy (niekoniecznie ograniczonych) funkcji m-subharmonicznych.

Jest to więc wartościowy tekst, nie tylko porządkujący, ale też biorący istotny udział w rozbudowaniu teorii operatora m- Hessianu.

Praca jest oparta na kilku tekstach autorstwa (współautorstwa) doktoranta, z których trzy zostały opublikowane w dobrych czasopismach (Comptes Rendus Math. (praca wspólna z promotorem), Ann. Polon. Math., Complex Var. Elliptic Equ.), a kilka następnych ma status preprintów, więc można spodziewać się że będą złożone do publikacji.

Struktura pracy jest przejrzysta; każdy z pięciu rozdziałów skupia się na dobrze opisanym zagadnieniu. Poniżej omawiam i komentuję zawartość wyniki pracy.

Bardzo obszerny (ponad 40 stron) rozdział 1 wprowadza czytelnika w problematykę operatora m-Hessianu, najpierw w klasie ograniczonych funkcji m-subharmonicznych, a dalej – na odpowiednio zdefiniowanych "klasach Cegrella" na m- hiperwypukłych obszarach w $\mathbb{C}^n$. Autor zdecydował się przytoczyć w rozdziale 1 najważniejsze wyniki zawarte w pracy doktorskiej H-Ch Lu, obronionej w 2012 roku w Université Paul Sabatier, Toulouse, [3]. Przytoczył też, czasami w skrócie, ważniejsze dowody. Praca Lu uogólnia wcześniejsze wyniki Cegrella dotyczące operatora Monge'a -Ampère'a na operator m- Hessianu.

Chociaż włączenie przedstawienia wyników pracy [3] do rozprawy bardzo ją wydłużyło, uważam ten krok za celowy; bez niego dalsza część rozprawy byłaby niezrozumiała dla czytelnika.

Podrozdział 1.8 w pracy rozpoczyna prezentację wyników Autora. Twierdzenie 1.8.1 oraz wnioski 1.8.2 i 1.8.3 formułują ciekawą charakteryzację przestrzeni

Cegrella $\mathcal{F}_m(\Omega)$, $\mathcal{F}^a(\Omega)$ oraz $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ w języku szacowania (tempa ubywania) $m-$ pojemności zbiorów (pod) poziomic u.

Rozdział 2 rozpoczyna się od dobrze i klarownie napisanego wstępu. Autor zaproponował nową klasę Cegrella, oznaczaną $\mathcal{N}_m$, dla której w rozdziale 2 wykazano szereg klasycznych istotnych rezultatów.

W szczególności, Autor dowodzi twierdzenie, które uogólnia wcześniejsze wyniki Z Błockiego. Twierdzenie 2.1.5 i następujący po nim wniosek charakteryzują maksymalne funkcje m-subharmoniczne w klasie Cegrella $\mathcal{E}_m$ (w pracy Błockiego rozważane były lokalnie ograniczone funkcje m- subharmoniczne).

Kolejna seria wyników rozdziału 2 jest motywowana wynikami uzyskanymi w pracy [1] dla operatora Monge'a - Ampère'a. W szczególności, wniosek 2.2.7 daje ładną charakteryzację klasy $\mathcal{E}_m$: niedodatnia funkcja m–subharmoniczna jet w klasie $\mathcal{E}_m$ jeśli "względna pojemność " $C_{m,u}$ każdego zbioru zwartego jest skończona.

Rozdział 2.3 pracy zawiera szereg wyników dotyczących wprowadzonej przez Autora klasy funkcji m- subharmonicznych, oznaczanej przez $\mathcal{N}_m$.

W szczegolności, Autor dowodzi ciekawej charakteryzacji funkcji klasy $\mathcal{F}_m$ w języku wprowadzonej klasy $\mathcal{N}_m$. Wynik ten rozumiem jako odpowiednik znanego wcześniej wyniku dla pluripotencjału (opisanego w Theorem 4.13 w monografii [2]).

Z kolei eleganckie w sformułowaniu Twierdzenie 2.4.9 wyraża warunki dostateczne na to aby nieujemna miara borelowska na hiperwypuklym obszarze Ω była postaci $H_m(u)$ dla pewnej funkcji u w klasie $\mathcal{N}_m$. Wynik ten jest uogólnieniem twierdzenia Cegrella na przypadek operatora m–Hessianu.

Moją uwagę zwróciło Twierdzenie 2.5.3 o "podrozwiązaniach" , uogólniające wcześniejsze wyniki N. Nguyena oraz S. Kołodzieja.

Rozdział 3 pracy dotyczy konstrukcji naturalnych "miar brzegowych" związanych z funkcjami $m-$ subharmonicznymi w klasie Cegrella $\mathcal{F}_m$. Odczytuję te wyniki jako interesujące odpowiedniki m.in wyników Cegrella i współpracowników (mowa tu m.in. o wynikach opisanych w Theorem 7.4 w monografii [2]).

W serii interesujących wyników zaciekawiło mnie Twierdzenie 3.2.5, i nieoczywisty wniosek z tego twierdzenia (Corollary 3.2.6) mówiący o tym że miary μ_u, $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ mają ten sam nośnik S.

Eleganckie i niełatwe w dowodzie Twierdzenie 3.3.2 również odczytuję jako uogólnienie (z przypadku równania Monge'a Ampère'a na przypadek m- Hessianu) twierdzenia Cegrella i współpracowników (Theorem 7.9 w monografii [2]).

Rozdział 3 jest uzupełniony szeregiem naturalnych i dobrze opisanych przykładów. które bardzo przydają się czytelnikowi.

Al

Rozdział 4 rozwija teorię zapoczątkowaną w pracach Ahaga, Czyża i Cegrella. Podobnie jak w rozdziale 3. Autor koncentruje się na przeniesieniu, a także na rozwinięciu wyników z tych wcześniejszych prac na przypadek m- Hessianu. Wyniki tego rozdziału zostały już opublikowane w pracy Autora (Ann. Polon. Math. 118(2016)).

W szczególności, na uwagę zasługuje wprowadzenie nieoczywistego porządku w przestrzeniach wektorowych $\delta\mathcal{E}_{p,m}$ i $\delta\mathcal{M}_{p,m}$. Twierdzenie 4.1.8 orzeka że otrzymujemy w ten sposób przestrzenie Riesza i że przestrzeń $\delta\mathcal{E}_{p,m}$ jest σ-zupełna w sensie Dedekinda.

Ważne Twierdzenie 4.2.7 orzeka że przestrzeń $\delta\mathcal{E}_{p,m}$ jest przestrzenią quasi-Banacha, a dla $p = 1$ otrzymujemy przestrzeń Banacha. Dowód tego twierdzenia- i cały rozdział 4.2 - wykorzystuje w nietrywialny sposób szczegółowe szacowania otrzymane bądź zacytowane w rozdziale 1 pracy.

Rozdział 4.5 jest oparty na wspólnej pracy z promotorem ([31]), opublikowanej w Comptes Rendues Math. (2017). Wynik tego rozdziału - to pomysłowe szacowanie z dołu najlepszej stałej w nierówności dla p energii. Wynik ten-zawarty w Twierdzeniu 4.5.2- pokazuje że ta stała jest ostro większa od 1. Jak słusznie zauważa Autor, stała $D(p,m) = 1$ pozwoliłaby na uproszczenie dowodów wcześniejszych twierdzeń rozdziału 4.

Dowód Twierdzenia 4.5.2 jest elegancki i starannie zapisany.

Rozprawę zamyka rozdział 5. Wyniki rozdziału 5 zostały już opublikowane. Głowny wynik "ilościowy" tego rozdziału to Twierdzenia 5.1.6 i 5.1.7. Twierdzenia dotyczą klasy radialnie symetrycznych funkcji m- subharmonicznych. Faktycznie więc, ze względu na symetrię, mamy do czynienia z funkcją zależną tylko od promienia, $\tilde{u}(r)$. Okazuje się że wypukłość funkcji $\tilde{u}$ wzgledem $r^{2-\frac{2n}{m}}$ jest związana z m- subharmonicznością radialnie symetrycznej funkcji u.

Ten ładny i ważny wynik jest uogólnieniem - ale nie prostym przeniesieniem - wcześniejszych wyników otrzymanych przez Ahaga i Czyża dla operatora Monge'a Ampère'a. W szczególności otrzymuje się wypukłość względem innej funkcji promienia niż we wspomnianej wcześniejszej pracy.

Sporą trudnością był dla mnie bardzo techniczny charakter pracy, usprawiedliwiony do pewnego stopnia charakterem badanych zagadnień. Jak wspomniałam, pewna część faktów dowodzonych w pracy ma swoje odpowiedniki we wcześniejszych wynikach innych autorów, dotyczących równania Monge'a Ampére'a, bądź równania m-Hessianu dla węższych klas funkcji. W pracy trochę brakowało mi porównującego komentarza, wskazania głównych różnic i nowych trudności w dowodach.

W tak długiej rozprawie trudno ustrzec się usterek. Ponadto, w kilku wskazanych poniżej miejscach uzupełnienie szczegółów dowodów wymagało ode mnie

A1

pewnego wysiłku. Omawiam poniżej zauważone usterki. Wypisuję je jednak również po to, aby zwrócić uwagę że nie są to poważne błędy ani istotne uchybienia, i ze nie mają one wpływu na poprawność dowodów zamieszczonych w pracy, ani na jej ostateczną ocenę.

str 9 , Prop. 1.2.9. - nie wyjaśniono czym jest "localization principle" , ani w ktorym miejscu pracy [50] ta zasada jest sformułowana.

str 11 Remark 1.2.12. Sformułowanie jest niefortunne. Zgaduję że chodzi o to że Theorem 1.2.7 jest prawdziwe dla monotonicznego ciągu funkcji m-subharmonicznych. Poza tym, nie wyjaśniono wystarczająco jak to stwierdzenie ma się do Proposition 1.2.9.

str 19, Theorem 1.4.2. Prawdopodobnie omyłkowo podana referencja. Jak się wydaje, przynajmniej w przypadku $p \geq 1$ jest to powtórzenie Lematu 1.7.8, i dowodu tego lematu z pracy [Lu]. Prawdopodobnie więc referencja została tu podana omyłkowo, tym bardziej że praktycznie cały rozdział 1 jest, jak wspomniałam, poświęcony omówieniu wyników pracy Lu.

str 31. Twierdzenie 1.6.7 jest uogólnieniem podobnego wyniku uzyskanego wcześniej przez Khue i Hiep dla funkcji plurisubharmoncznych.

Brakuje tu komentarza: czy to uogólnienie pochodzi od Autora?

str 46 l-8. Powinno być $\lim_{s\to\infty} s^m \mathrm{cap}_{m,\Omega}(\{u < -s\})$.

str 53 i następne. Czy o zbiorze E zakładamy że jest borelowski? Wydaje się że tak, ale np Def. 2.2.1 i Prop. 2.2.2 nie zawierają takiego założenia.

str. 53. Definicja 2.2.1 zawiera omyłkę redaktorską, która czyni tę definicję niezrozumiałą. Powinno być zapewne (tak jak w pracy Cegrella, Kołodzieja, Zeriahi) $\varphi \leq u$ outside an m–polar set *on* E.

str 53. Dowód Proposition 2.2.2 korzysta zapewne z Lematu 2.1.2? brakuje tu takiego komentarza.

str. 57. Tekst między Definicją 2.3.1 i Wnioskiem 2.3.2 nie jest dla mnie wystarczająco jasny; w szczególności nie wyjaśniono dlaczego są spełnione założenia Twierdzenia 2.1.5.

str. 65, l-2 . "The construction implies that $v_j \in \mathcal{N}_m(\Omega)$; przydałoby się lepsze uzasadnienie.

str. 67 l-3. Usterka redakcyjna. Ponadto, czytelnikowi przydałoby się wyjaśnienie że $\mathrm{supp} H_m(u_j^U) \subset \overline{U}$.

str. 70 l. 4. Oczywista usterka redakcyjna: brakuje funkcji podcałkowej $(-\varphi)$. Poza tym, przydałoby się wyraźniejsze wskazanie jak w dowodzie ingeruje założenie ciągłości φ.

str. 77 l. 4. Zbyt skąpe wyjaśnienie dlaczego $\tilde{u} \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ (jak to wynika z Twierdzenia 1.4.3).

str. 92 i następne. Czytelnikowi przydałoby się tu dokładniejsze wskazanie momentów w których wykorzystujemy fakt że rozważane funkcje są w klasie $\mathcal{E}_{p,m}$.

AZ

str. 98, dowód Twierdzenia 4.2.8. Czytelnik musi uzupełnić argumentację że $u^+ = (u^+)^*$, $u^- = (u^-)^*$.

str.99, Lemat 4.2.10. Wydaje się że brakuje założenia $\mu \in \delta\mathcal{M}_{p,m}$?

str 110. Bardzo krótki, i lokujący się z boku nurtu pracy podrozdział 4.4 jest, moim zdaniem, niewystarczająco klarownie napisany. Pojawienie się w rachunkach funkcji Greena (wielowymiarowej? wielozespolonej?) i laplasjanu nie było dla mnie zrozumiałe. Ten rozdział nie ma jednak wpływu na resztę pracy, i jest tylko krótkim, uzupełniającym komentarzem.

Podsumowanie

Praca zawiera szereg niełatwych i zaawansowanych wyników.

Wyniki dotyczą aktualnej tematyki badawczej.

Wprowadzenie odpowiednich klas Cegrella i zbadanie ich własności dla operatora m- Hessianu jest istotnym, potrzebnym i naturalnym krokiem w opisywanej teorii.

Autor wykazał się bardzo dużą erudycją i bardzo dobrą znajomością bogatej teorii pluripotencjału i - w szczególności - operatora Hessianu.

Autor jest już autorem trzech prac opublikowanych w uznanych czasopismach; kolejne wyniki pracy doktorskiej też powinny zostać opublikowane.

Nie mam więc wątpliwości że przedstawiona mi do oceny rozprawa spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim, i wnoszę o dopuszczenie pana Van Thien Nguyena do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Anna Zdunik

Literatura

[1] U.Cegrell, S. Kołodziej, A. Zehari, Subextension of plurisubharmonic functions with weak singularities, Math. Z. 250 (2005), 7–22

[2] R. Czyż, The complex Monge-Ampère operator in the Cegrell classes, Dissertationes Math. 466(2009)

[3] H-Ch Lu, Équations hessiennes complexes, praca doktorska, Toulouse, 2012

Anna Zdunik, Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa