prof. Grzegorz Plebanek
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego

19 marca 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej Michała Świętka

Regular subspaces of Bourgain-Delbaen spaces

Rozprawa liczy 57 stron i składa się z trzech rozdziałów. Obszerny rozdział wstępny poświęcony jest wprowadzeniu terminologii i oznaczeń oraz omawia wiele wyników innych autorów stosowanych w dalszym ciągu. Następne dwa rozdziały prezentują tezy rozprawy i opierają się, kolejno, na dwóch publikacjach

[A] M. Świętek, *Regular subspaces of a Bourgain-Delbaen space $\mathcal{B}_{mT}$*, ArXiv preprint (2017);

[B] A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, M. Świętek, *An unconditionally saturated Banach space with the scalar-plus-compact property*, J. Funct. Anal. 272 (2017), 4944–4983.

Wyniki omawianej rozprawy nawiązują bezpośrednio do artykułu Spirosa Argyrosa i Richarda Haydona (Acta Math. 206, 2011), który przyniósł rozwiązanie bardzo znanego, klasycznego problemu, podając konstrukcję nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha X, takiej że każdy operator ograniczony $T : X \to X$ jest postaci $T = c \cdot I + K$ dla pewnego operatora zwartego K (przy czym $X^* = \ell_1$). Konstrukcja Argyrosa i Haydona istotnie korzystała z bogatego wachlarza technik konstruowania ośrodkowych przestrzeni Banacha rozwijanych od lat 70-tych przez całe grono matematyków. Warto wymienić tu konstrukcję Tsirelsona z roku 1974 i jej późniejsze modyfikacje, metodę Bourgaina-Delbaena konstruowania przestrzeni typu $\mathcal{L}_\infty$ (w sensie Lindenstraussa i Pełczyńskiego) oraz metody rozwinięte przez Gowersa i Maureya z lat 90-tych, które w szczególności doprowadziły do skonstruowania przestrzeni dziedzicznie nierozkładalnych.

Przypomnijmy, że konstukcja przestrzeni typu Tsirelsona polega na zdefiniowaniu normy na przestrzeni c_{00}, której specjalne cechy, modelowane przez pewne rodziny skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, decydują o 'egzotycznych' własnościach docelowej przestrzeni, zdefiniowanej jako uzupełnienie c_{00}. Z kolei metoda Bourgaina-Delbaena polega na bardzo precyzyjnym doborze 'egzotycznych' wektorów z ℓ_∞ rozpinających docelową przestrzeń. Obie techniki wymagają całego szeregu kombinatorycznych rozważań i precyzyjnych oszacowań.

Oryginalna przestrzeń $\mathfrak{X}_K$, skonstruowana przez Argyrosa i Haydona, jest dodatkowo dziedzicznie nierozkładalna (przestrzeń X jest nierozkładalna jeżeli dla każdego rozkładu $X = Y_1 \oplus Y_2$ na sumę prostą jeden ze składników jest skończenie wymiarowy). W szczególności, przestrzeń $\mathfrak{X}_K$ nie zawiera bezwarunkowych ciągów bazowych.

W rozdziale 3 niniejszej rozprawy autor dowodzi (za pracą [B]), że istnieje przestrzeń $\mathfrak{X}_{Kus}$, która posiada 'mało' operatorów, tak jak w przypadku przestrzeni $\mathfrak{X}_K$, ale z drugiej strony każda jej nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń zawiera bezwarunkowy ciąg bazowy. Taka przestrzeń istotnie różni się od przestrzeni Argyrosa-Haydona $\mathfrak{X}_K$, ponieważ, w szczególności, każda jej nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń zawiera nietrywialną sumę prostą. Trudno byłoby choćby pobieżnie opisać istotę nowych elementów konstrukcji, ale należy podkreślić, że modyfikacje prowadzące do konstrukcji przestrzeni $\mathfrak{X}_{Kus}$ wymagały głębokiej analizy konstrukcji Argyrosa-Haydona i szeregu nowych, subtelnych pomysłów.

Rozdział 2 poświęcony jest pewnej przestrzeni typu Bourgaina-Delbaena $\mathfrak{X}$, która jest etapem pośrednim konstrukcji przeprowadzonej w rozdziale 3. O przestrzeniach tego typu wiadomo było, że nie zawierają one podprzestrzeni izomorficznych z przestrzeniami c_0 czy ℓ_p i są nasycone ze względu na bezwarunkowe ciągi bazowe.W pewnym uproszczeniu, główny wynik rozdziału pokazuje, że w istocie przestrzeń $\mathfrak{X}$ jest nasycona ze względu na ciągi bazowe równoważne ciągom z pewnej przestrzeni Tsirelsona.

Recenzentowi ciężko jest ocenić, na ile rezultat z rodziału drugiego, traktowany niezależnie, stanowi nową jakość. Nie ulega jednak wątpliwości, że rozprawa traktowana jako całość, a w szczególności twierdzenia z rodziału trzeciego stanowią istotny wkład w nurt badań, który jest aktualnie rozwijany przez całe grono znakomitych matematyków.

Wstępny rozdział pierwszy rozprawy stara się zgromadzić wszystkie istotne elementy wykorzystywane w dalszym ciągu, opisując w szczególności technikę konstruowania zmodyfikowanych przestrzeni Tsirelsona i metode Bourgaina-Delbaena oraz wyliczając znaczną ilość pomocniczych rezultatów. Autor miał tutaj niełatwe zadanie, jako że złożoność techniczna zagadnień jest bardzo wysoka. Zostało on w pewnym stopniu zrealizowane, ale sam rozdział jest miejscami zbyt lakoniczny i z tego powodu lego lektura jest bardzo trudna. Czytelnikowi łatwiej śledzić główne idee sięgając do źródeł; w szczególności artykuł Argyrosa i Haydona jest napisany bardzo przystępnie. Początkowe fragmenty rozdziału 1 zawierają pewną ilość błędów literowych i niezręczności; kilka z nich wymieniam poniżej.

(i) Strona 9: do c_{00} należą ciągi ze skończoną ilością niezerowych wyrazów;
(ii) Definition 1.1 jest poprawna tylko w zakresie przestrzeni ośrodkowych;
(iii) Definition 1.2: $\mathcal{M}_n$ jest zwartym podzbiorem $P(\mathbb{N})$, a nie $\mathbb{N}$; w warunku (2) n występuje w podwójnej roli, co bardzo utrudnia zrozumienie jego istoty;
(iv) Example 1.4: Rodzina podzbiorów $\mathbb{N}$ ustalonej mocy n nie jest zwarta (zwarta jest rodzina podzbiorów mocy $\leq n$);

(v) Definition 1.9-10: nie jest jasne, dlaczego autor pisze $i : \Gamma_0 \to \Gamma$ zamiast $i : \ell_\infty(\Gamma_0) \to \ell_\infty(\Gamma)$ etc.

Warto wspomnieć, że Michał Świętek ma już w swoim dorobku publikacje, które nie weszły w skład jego rozprawy doktorskiej. Jest współautorem interesującej pracy, napisanej wraz z Piotrem Koszmiderem i Saharonem Shelahem, w której przy założeniu GCH pokazano, że istnieją dowolnie duże przestrzenie nierozkładalne (przypomnijmy, że przestrzenie *dziedziczne* nierozkładalne mają gęstość ograniczoną przez $\mathfrak{c}$). Ponadto doktorant opublikował samodzielną pracę w *Posiivity*, poświęconą pewnej wersji dychotomii Gowersa.

W konkluzji mojej recenzji stwierdzam, że rozprawa doktorska Michała Świętka prezentuje oryginalne rozwiązania wartościowych problemów naukowych i tym samym spełnia wymagania ustawowe i wymagania stawiane rozprawom doktorskim przez środowisko matematyczne; wnoszę o dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Najważniejsze wyniki rozprawy przedstawione w rozdziale trzecim pochodzą z pracy wspólnej z Antonisem Manoussakisem i Anną Pelczar-Barwacz. Według oświadczeń współautorów Michał Swiętek miał swój istotny wkład w jej powstanie. Mając na względzie bardzo wysoki poziom naukowy badań, przedstawionych w recenzowanej rozprawie i znaczną złożoność matematycznej materii, rzadko spotykaną w rozprawach doktorskich, uważam, że omawiana rozprawa doktorska **zasługuje na wyróżnienie**.

G. Plebanek