W 1980 roku J. Bourgain i F. Delbaen [4] odkryli nowy, ogólny sposób konstrukcji ośrodkowych $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeni, t.j. przestrzeni postaci $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}$, gdzie $F_n \subset F_{n+1}$ i F_n jest C-izomorficzna do $\ell_\infty^{k_n}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$, uniwersalnej stałej C oraz ciągu $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$. Jako jedno z pierwszych zastosowań tego schematu skonstruowali pierwszy przykład przestrzeni predualnej do ℓ_1 nie zawierającej kopii c_0. Przestrzeń Banacha skonstruowaną za pomocą tego schematu nazywamy obecnie przestrzenią typu Bourgain-Delbaen.

W ostatniej dekadzie schemat Bourgain-Delbaen przyciągnął uwagę wielu badaczy, którzy wykorzystali go do skonstruowania ważnych przykładów nowych przestrzeni oraz udowodnienia wielu głębokich twierdzeń dotyczących struktury przestrzeni Banacha. Oto kilka z nich: w [2] autorzy skonstruowali dziedzicznie nierozkładalną przestrzeń Banacha $\mathfrak{X}_{\mathrm{AH}}$ (tzn. taką, której żadna podprzestrzeń nie jest sumą prostą swoich dwóch domkniętych nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni) z własnością skalar-plus-zwarty (tzn. każdy operator na $\mathfrak{X}_{\mathrm{AH}}$ jest postaci $\lambda Id_{\mathfrak{X}_{\mathrm{AH}}} + K$, gdzie λ jest skalarem, a K jest operatorem zwartym), w [5] autorzy dowodzą uniwersalności ℓ_1 jako przestrzeni dualnej, t.j. dowodzą, że każdą ośrodkową przestrzeń Banacha można zanurzyć w predualną do ℓ_1, natomiast w [1] autorzy dowodzą, że każdą ośrodkową, jednostajnie wypukłą przestrzeń można zanurzyć w przestrzeń z własnością skalar-plus-zwarty.

W dysertacji rozważamy następujące pytanie: jakie regularne podprzestrzenie mogą wystąpić w przestrzeni typu Bourgain-Delbaen? Analizujemy dwa przykłady przestrzeni tego typu, które pokazują, że technika konstrukcji Bourgain-Delbaen kontroluje tylko strukturę całej przestrzeni, ale ma niewielki wpływ na strukturę podprzestrzeni. Ta własność różni tę metodę od klasycznych metod teorii mieszanych przestrzeni Tsirelsona, które generują przestrzenie nasycone zadanymi strukturami.

Jako pierwszy przykład rozważamy przestrzeń typu Bourgain-Delbaen $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$, która jest drobną modyfikacją przestrzeni $\mathfrak{B}_{\mathrm{mT}} = \mathfrak{B}_{\mathrm{mT}}[(m_j)_j, (n_j)_j]$ (dla pewnych ustalonych ciągów $(m_j)_j$, $(n_j)_j$ liczb naturalnych). Przestrzeń $\mathfrak{B}_{\mathrm{mT}}$ jest bazową przestrzenią dla konstrukcji $\mathfrak{X}_{\mathrm{AH}}$ oraz innych przestrzeni typu Bourgain-Delbaen skonstruowanych przy użyciu nasycających norm typu mieszanych-Tsirelsonowskich. Jest to przestrzeń typu Bourgain-Delbaen modelowana na mieszanej przestrzeni Tsirelsona $\mathfrak{T}[(m_j)_j, (n_j)_j]$, która to jest dobrze poznaną przestrzenią bazową dla klasycznych konstrukcji przestrzeni dziedzicznie nierozkładalnych. Prostą konsekwencją takiego modelowania przestrzeni $\mathfrak{B}_{\mathrm{mT}}$ jest brak zawierania izomorficznej kopii c_0 lub ℓ_p dla $p \in [1, \infty)$, ponadto, $\mathfrak{B}_{\mathrm{mT}}$ jest nasycona refleksywnymi podprzestrzeniami z bazą bezwarunkową. W pracy wzmacniamy ten rezultat, pokazując następujące twierdzenie, które jest analogonem twierdzenia R. Haydona z [6] mówiącego, że jeden z pierwszych przykładów skonstruowanych przez J. Bourgain i F. Delbaen w [4] jest nasycony przez ℓ_p dla odpowiedniego $p \in (1, \infty)$.

Twierdzenie. *Niech $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ oznacza standardową bazę przestrzeni $\mathfrak{T}[(m_j)_j, (n_j)_j]$. Każda nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń $Y \subset \mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$ zawiera taki ciąg bloków $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ oraz istnieją takie ciągi liczb naturalnych $(j_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $((k_{i,j})_{j=1}^{n_{j_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, że ciagi $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(\frac{m_{j_i}}{n_{j_i}} \sum_{j=1}^{n_{j_i}} e_{k_{i,j}})_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{T}[(m_j)_j, (n_j)_j]$ są równoważne.*

Drugi rozważany przykład jest skonstruowany z wykorzystaniem przestrzeni $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$ jako przestrzeni bazowej. Tak skonstruowana przestrzeń $\mathfrak{X}_{\mathrm{Kus}}$ typu Bourgain-Delbaen jest nasycona podprzestrzeniami ze słabszą własnością niż w przypadku przestrzeni $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$, mianowicie, podprzestrzeniami z bazą bezwarunkową. Z drugiej strony żądamy dużo silniejszej własności całej przestrzeni, t.j. $\mathfrak{X}_{\mathrm{Kus}}$ ma własnośc skalar-plus-zwarty. W konstrukcji wykorzystujemy technikę z [3], gdzie autorzy skonstruowali nierozkładalną przestrzeń Banacha nasyconą podprzestrzeniami z bazą bezwarunkową. Dowodzimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Istnieje przestrzeń typu Bourgain-Delbaen $\mathfrak{X}_{Kus}$ o następujących własnościach.*

(1) Przestrzeń $\mathfrak{X}_{Kus}$ ma własność skalar-plus-zwarty.
(2) Przestrzeń $\mathfrak{X}_{Kus}$ jest nasycona przestrzeniami z bazą bezwarunkową.
(3) Przestrzeń ℓ_1 jest przestrzenią dualną do przestrzeni $\mathfrak{X}_{Kus}$.

Praca składa się z trzech rozdziałów. Pierwszy rozdział jest wprowadzający. Rozdział drugi zawiera dowód twierdzenia o nasyceniu przestrzeni $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$ i jest oparty na [8]. Rozdział trzeci zawiera konstrukcję przestrzeni $\mathfrak{X}_{\mathrm{Kus}}$ i jest oparty na wspólnej pracy [7] z A. Manoussakisem i A. Pelczar-Barwacz.

Literatura

[1] S.A. Argyos, et. al, *Embedding uniformly convex spaces into spaces with very few operators*, J. Funct. Anal. 262 (2006).

[2] S.A. Argyros, R. Haydon, *A hereditarily indecomposable $\mathscr{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem*, Acta Math. 206 (2011), no. 1, 1–54.

[3] S.A. Argyros, A. Manoussakis, *An indecomposable and unconditionally saturated Banach space*, St. Math. 159 (2003).

[4] J. Bourgain, F. Delbaen, *A class of special $\mathscr{L}_\infty$-spaces*, Acta Math. 145 (1980), no. 3-4, 155–176.

[5] D. Freeman, E. Odell, Th. Schlumprecht, *The universality of ℓ_1 as a dual space*, Math. Ann. 351 (2011), no. 1, 149–186.

[6] R. Haydon, *Subspaces of the Bourgain-Delbaen space*, Studia Math. 139 (2000), no. 3, 275–293.

[7] A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, M. Świętek, *An unconditionally saturated Banach space with the scalar-plus-compact property*, J. Funct. Anal. vol. 272 (12) (2017), 4944-4983.

[8] M. Świętek, *Regular subspaces of a Bourgain-Delbaen space $\mathscr{B}_{mT}$* arXiv:1709.06481