Warszawa, 25 kwietnia 2018

prof. dr hab. Rafał Latała
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Michała Świętka
"Regular subspaces of Bourgain-Delbain Spaces"

Przedstawiona rozprawa doktorska dotyczy struktury podprzestrzeni i algebry ciągłych operatorów w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha. Od lat matematyków zajmujących się analizą funkcjonalną interesowały fundamentalne pytania - czy każda przestrzeń Banacha zawiera regularną podprzestrzeń (np. c_0, l_p lub przestrzeń z bazą bezwarunkową), czy ma bazę Schaudera lub chociaż ciąg bazowy, czy istnieje na niej nietrywialny rzut, czy istnieje operator, który nie jest zwartym zaburzeniem wielokrotności operatora identycznościowego? Wszystkie te pytania zostały rozstrzygnięte w sposób negatywny – na przestrzeni kilku dekad konstruowano pomysłowe i stopniowo coraz bardziej skomplikowane technicznie przykłady przestrzeni o bardzo nieoczekiwanych własnościach.

Boris Tsirelson w 1974 podał przykład przestrzeni Banacha, która nie zawierała kopii l_p i c_0. Konstrukcja Tsirelsona była modyfikowana, w szczególności Thomas Schlumprecht w 1991 użył klasy tzw. mieszanych przestrzeni Tsirelsona by rozwiązać problem zaburzalności normy na przestrzeniach Banacha ("distortion problem").

Jean Bourgain i Freddy Delbaen podali w 1980 nowy schemat konstrukcji ośrodkowych przestrzeni typu $\mathcal{L}_\infty$, który okazał się bardzo przydatny do budowania ciekawych przykładów przestrzeni Banacha. Konkretna przestrzeń skonstruowana przez Bourgaina i Delbaena była predualna do l_1 i nie zawierała kopii c_0, była też nasycona przestrzeniami refleksywnymi (tzn. każda nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń zawierała podprzestrzeń refleksywną, później Haydon wykazał, że można ją nawet nasycić przestrzeniami ℓ_p z odpowiednio dobranym p).

Bazując na konstrukcji Schlumprechta, Timothy Gowers and Bernard Maurey w 1993 roku skonstruowali dziedzicznie nierozkładalną przestrzeń Banacha, tzn. przestrzeń w której wszystkie podprzestrzenie nie są izomorficzne z sumą prostą swoich nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni. Ponadto każdy operator na przestrzeni Gowersa-Maureya jest postaci $\lambda\mathrm{Id} + S$, gdzie S jest operatorem ściśle singularnym.

Spiros Argyros i Richard Haydon poprawili wynik Gowersa i Maureya, rozwiązując długo otwarty problem istnienia przestrzeni o własności skalar-plus-zwarty. W opublikowanej w roku 2011 przełomowej pracy skonstruowali nieskończenie wymiarową przestrzeń Banacha typu BD, na której każdy ciągły operator liniowy jest zwartym zaburzeniem skalarnej wielokrotności operatora identycznościowego. Przestrzeń z pracy Argyrosa i Haydona była dziedzicznie nierozkładalna. Była też pierwszym przykładem przestrzeni Banacha, w którym każdy ograniczony operator liniowy ma nietrywialną podprzestrzeń niezmienniczą.

W 2012 Argyros, Freeman, Haydon, Odell, Raikoftsalis, Schlumprecht i Zisimopoulou wykazali, że każdą ośrodkową, jednostajnie wypukłą przestrzeń można zanurzyć w przestrzeń Banacha z własnością skalar-plus-zwarty. Wynik ten pokazuje, że przestrzeń z małą algebrą operatorów może mieć bardzo regularne podprzestrzenie (np hilbertowskie). Podobne pytania są zadawane w doktoracie - jakie podprzestrzenie mogą nasysać przestrzeń typu BD, czy własność skalar-plus-zwarty wymusza pewną nieregularność podprzestrzeni?

Muszę zaznaczyć, że nie jestem specjalistą w tematyce nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha. Jako uczestnik warszawskiego seminarium z analizy funkcjonalnej oraz kilku konferencji obejmujących swoim zakresem również teorię przestrzeni Banacha, oczywiście słyszałem o przestrzeniach typu Tsirelsona oraz o słynnym wyniku Argyrosa i Haydena. Trudno mi jednak w pełni ocenić niuanse techniczne związane z modyfikacjami poprzednich konstrukcji i rozumowań. O ile w Polsce grupa osób zajmujących się zbliżoną tematyką jest niewielka, to na świecie jest kilka silnych grup podejmujących podobne zagadnienia. Rozprawa została napisana w języku angielskim i można było ją przesłać do dużo bardziej kompetentnego zagranicznego recenzenta.

Rozprawa doktorska powstała w oparciu o dwa artykuły naukowe:

[1] A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, M. Świętek, *An uncontitionally saturated Banach space with the scalar-plus-compact property*, J. Funct. Anal 272 (2017), 4944–4983

[2] M. Świętek, *Regular subspaces of a Bourgain-Delbaen space* $\mathcal{B}_{mT}$, arXiv:1709.06841.

W marcu zostały mi dostarczone zeskanowane oświadczenia współautorów [1] - w obu swój wkład współautorzy oceniają na 33%.

Rozprawa składa się ze wstępu i trzech rozdziałów. W rozdziale pierwszym zebrano podstawowe definicje i sformułowano kilka faktów, do których odwołują się dalsze części. W szczególności zdefiniowano tam kluczową przestrzeń typu Bourgaina-Delbaena $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$, która jest modyfikacją przestrzeni $\mathcal{B}_{mT}$.

Rozdział drugi jest oparty o samodzielną, wg mojej najlepszej wiedzy nieopublikowaną, pracę Doktoranta [2]. Główny wynik tej części to Twierdzenie 2.10, mówiący o nasyconości przestrzeni $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$ ciągami bazowymi równoważnymi odpowiednim średnim ważonym ciągu bazowego w mieszanej przestrzeni Tsirelsona $\mathcal{T}[(\mathcal{A}_{n_j}, m_j^{-1})_j]$. Metoda dowodu (jak zauważono w Uwadze 2.13) implikuje, że przestrzeń $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$ jest ciągowo minimalna.

Rozdział trzeci zawiera wyniki z [1]. Definiuje się w nim odpowiednią podprzestrzeń ilorazową $\mathfrak{X}_{Kus}$ przestrzeni $\mathfrak{X}_{\bar{\Gamma}}$ i dowodzi jej własności. Główny wynik tego rozdziału, a zarazem całego doktoratu to Twierdzenie 3.1. Wymienia ono trzy podstawowe własności skonstruowanej przestrzeni:
i) Każdy operator ciągły na $\mathfrak{X}_{Kus}$ jest postaci $T = \lambda \mathrm{Id} + K$, gdzie K jest operatorem zwartym,
ii) przestrzeń $\mathfrak{X}_{Kus}$ jest nasycona przestrzeniami z bazą bezwarunkową (tzn. w każdej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni da się znaleźć bezwarunkowy ciąg bazowy)
iii) przestrzeń dualna do $\mathfrak{X}_{Kus}$ jest izomorficzna z przestrzenią ℓ_1.

Najciekawsze jest tu połączenie i) i ii). Oczywiście każda przestrzeń o własności skalar plus zwarty jest nierozkładalna, czyli nie ma nietrywialnych rzutów. Przestrzeń skonstruowana przez Argyrosa i Haydona była dziedzicznie nierozkładalna, tzn. każda z jej nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni była nierozkładalna. Tymczasem $\mathfrak{X}_{Kus}$, a nawet każda jej podprzestrzeń, ma dużo podprzestrzeni z bazą bezwarunową, czyli o bardzo bogatej strukturze nietrywialnych rzutów.

Dowody są oparte o bardzo techniczną analizę funkcjonałów normujących. Podobnie też jak w poprzednich pracach dotyczących mieszanych przestrzeni Tsirelsona kluczowym narzędziem są tak zwane szybko rosnące ciągi, Doktorant w rozdziale 2 wprowadza też klasę dwupoziomowych szybko rosnących ciągów.

Autor rozprawy nie ułatwił zadania recenzentowi i nie dochował należytej staranności w redakcji. Już kilka pierwszych definicji i sformułowań zawiera błędy. Oto lista uwag dotyczących sekcji 1.1.

- Autor przypomina co to jest nośnik wektora, ale mniej oczywistej definicjej definicji zakresu (*range*) już nie podaje.
- W Definicji 1.1 brakuje założenia, że ciąg przestrzeni F_n jest rosnący.

- W Definicji 1.2 oczywiście $\mathcal{M}_n$ to nie zwarte podzbiory $\mathbb{N}$, ale zwarte rodziny podzbiorów $\mathbb{N}$.

- Podane sformułowanie Theorem 1.5 jest mocno nieczytelne i nieprawidłowe – w drugim członie alternatywy z pierwszej części tezy nie występuje bowiem żaden ciąg r_{n_k}.

- W ostatniej własności Definicji 1.6 brakuje warunku o odpowiednim ustawieniu nośników wektorów $(f_s)_{s \in S_t}$.

- W wydzielonym wzorze Faktu 1.8 powinno być $\frac{m_k}{n_k}$ zamiast $\frac{m_j}{n_j}$.

- W Definicji 1.9 operator włożenia i działa z $\ell_\infty(\Gamma_0)$ w $\ell_\infty(\Gamma_1)$ a nie z Γ_0 w Γ_1 (podobna uwaga dotyczy operatorów i_q z Definicji 1.10).

- Autor nie może się zdecydować czy zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ zaczyna się od 0 czy 1 (Definicja 1.11 sugeruje, że od 1, a Definicja 1.16, że od 0).

Nie będę tej listy kontynuował i wypisywał wszystkich znalezionych w dalszej części literówek czy pomyłek. Jest ich nieco mniej w częściach pochodzących z opublikowanej pracy [1] (choć tam też od początku ich nie brakuje - np. podane ciągi m_j n_j i l_j nie spełniają warunku (3) Założenia 1.20 dla $j = 1$, funcjonał $\bar{c}^*_\gamma$ jest określony wzorem (21) dla $\gamma \in \bar{\Delta}_{q+1}$, a nie $\gamma \in \bar{\Delta}_q$, przestrzeń $\bar{M}_q$ powinna być zdefiniowana za pomocą operatora $\bar{i}_q$, a nie $\bar{i}_{\max \bar{\Delta}_q}$ itp). Recenzowałem już w swoim życiu kilka doktoratów i nie pamiętam żadnego z takim nagromadzeniem usterek. Jest to tym bardziej nieprzyjemne, że podane rozumowania są bardzo techniczne i jednoczesna kontrola kilku własności i korygowanie nieścisłości jest bardzo trudne.

Nie byłem w stanie sprawdzić szczegółów wszystkich rozumowań – gdybym chciał to zrobić skończyłbym pisanie recenzji z przynajmniej półrocznym opóźnieniem. Prześledziłem kilka wybranych rozumowań oraz, na ile mogłem, starałem się zrozumieć koncepcję głównych dowodów. Poważnych błędów nie znalazłem, ale nie mogę ręczyć, że ich tam nie ma. Praca [1] została opublikowana w renomowanym piśmie, przykładającym wagę do rzetelności recenzji, co daje dodatkową gwarancję prawdziwości wyników z rozdziału trzeciego. Warto też zaznaczyć, że Promotor rozprawy dr hab. Anna Pelczar-Barwacz jest uznanym specjalistą w teorii przestrzeni Banacha i, o ile mogła nie zwrócić uwagi na proste pomyłki dotyczące oczywistych dla ekspertów szczegółów, to z pewnością kontrolowała całościową strategię dowodów.

Tematyka rozprawy jest ciekawa i wymagająca. Od konstrukcji specjalnych przestrzeni Banacha zaczynali swoją karierę późniejsi laureaci medalu

Fieldsa Jean Bourgain i Timothy Gowers. Problemy rozważane w rozprawie są naturalne, a główne twierdzenia mają relatywnie proste sformułowania. Sama jednak konstrukcja odpowiednich przestrzeni już nie jest taka prosta, a modyfikowanie różnych parametrów i kontrolowanie własności ciągów wektorów oraz rozmaite rozkładanie funkcjonałów wymaga już sporej biegłości technicznej.

Podsumowując uważam, że, mimo poważnych usterek redakcyjnych, przedstawiona rozprawa doktorska spełnia ustawowe oraz zwyczajowe warunki i uzasadnia nadanie magistrowi Michałowi Świętkowi stopnia naukowego doktora nauk matematycznych. Wnoszę o jej przyjęcie oraz dopuszczenie kandydata do dalszej części przewodu doktorskiego.