Gdańsk, dnia 18 grudnia 2017 r.

dr hab. Marcin Marciniak
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Pawła Pietrzyckiego pt. „O multiplikatywności modułów potęg operatorów w przestrzeniach Hilberta"

Rozprawa doktorska mgr. Pawła Pietrzyckiego liczy 77 stron, składa się z pięciu rozdziałów oraz bibliografii zawierającej 72 pozycje. Została napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Jana Stochela.

Tematem przewodnim pracy jest problem charakteryzacji operatorów na przestrzeni Hilberta (niekoniecznie ograniczonych, chociaż czasem jest to zakładane), które spełniają warunek normalności lub jego osłabienia takie jak quasinormalność czy hyponormalność. Punktem wyjścia do badań pana Pietrzyckiego jest twierdzenie Embry mówiące, że operator ograniczony jest quasinormalny wtedy i tylko wtedy, gdy moduł dowolnej potęgi naturalnej tego operatora jest równy potędze jego modułu. Warunek ten określany jest w pracy jako multiplikatywność modułów operatora. Autor stawia sobie pytanie, czy można osłabić ten warunek, zakładając, że multiplikatywność zachodzi tylko dla niektórych potęg. Powstaje pytanie, czy taki osłabiony warunek multiplikatywności (być może wzbogacony o inne dodatkowe założenia) w dalszym ciągu implikuje normalność lub quasinormalność. Problem ten autor nazywa w swojej pracy problemem zredukowanej multiplikatywności

Jako przykład rozważań tego typu, autor przywołuje wynik Uchiyamy, który wykazał, że przy założeniu zwartości lub subnormalności operatora warunkiem wystarczającym dla jego normalności jest multiplikatywność modułów dla tylko jednej potęgi z wykładnikiem większym od 1. Ten sam autor pokazał również, że przy założeniu hyponormalności, wystarczy, aby warunek multiplikatywności modułów był spełniony tylko dla dwóch kolejnych potęg, aby operator był quasinormalny. Z kolei, jeśli założy się ośrodkowość przestrzeni Hilberta, na której operator działa, do quasinormalności wystarczy multiplikatywność dla układu trzech lub czterech specyficznie dobranych potęg.

Jednym z celów, jakie autor sobie stawia, jest osłabienie założeń w twierdzeniach Uchiyamy. Innym celem jest podanie pewnych kontrprzykładów na to, że w ogólnym przypadku multiplikatywność modułów ograniczona tylko do jednej potęgi nie jest warunkiem wystarczającym quasinormalności.

Rozdział 1 rozprawy zawiera wstęp, w którym autor stawia problem i opisuje główne motywacje, jak również oznaczenia i terminologię stosowaną w pracy. W szczególności autor definiuje tu różne warunki osłabiające definicję normalności operatora.

W Rozdziale 2 opisane są własności rozkładu polarnego operatorów oraz elementy teorii funkcji operatorowo monotonicznych. W szczególności przytoczone jest twierdzenie Löwnera o reprezentacji całkowej funkcji operatorowo monotonicznych oraz wynikająca z tej reprezentacji nierówność Hansena.

Rozdział 3 poświęcony jest przedstawieniu wybranych klas operatorów. Autor przytacza twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych i jego konsekwencje. Następnie opisuje klasę operatorów quasinormalnych, które za Stochelem i Szafrańcem zdefiniowane są jako te operatory A, które komutują z miarą spektralną operatora $|A|$. Przytacza tutaj (wraz z dowodami) twierdzenie

Stochela-Szafrańca o charakteryzacji nieograniczonych operatorów quasinormalnych jako takich operatorów, dla których czynniki rozkładu polarnego komutują, jak również twierdzenie Jabłońskiego-Junga-Stochela o równoważności definicji Stochela i Szafrańca z definicją Kaufmana (czyli warunkiem zakładającym komutowanie operatorów A i A^*A). Kolejną klasą opisywaną przez autora są operatory klasy $A(k)$ oraz operatory hyponormalne. Ostatnia część tego rozdziału poświęcona jest przesunięciom ważonym na drzewach skierowanych. Autor przytacza wyniki charakteryzujące przesunięcia spełniające warunek multiplikatywności modułów dla pewnej pojedynczej potęgi, jak również przesunięcia będące operatorami quasinormalnymi

Rozdział 4 przedstawia szczegółowe wprowadzenie do problemu zredukowanej multiplikatywności. W rozdziale tym autor przedstawia aktualny stan wiedzy i wyniki dotychczas opisane w literaturze. W szczególności przytacza warunki wystarczające dla quasinormalności uzyskane przez Uchyiamę (twierdzenia 4.1.5, 4.1.7, 4.1.8) oraz charakteryzację nieograniczonych operatorów quasinormalnych w języku problemu multiplikatywności uzyskaną przez Jabłońskiego, Junga i Stochela (twierdzenie 4.1.10). Przytacza też opisany przez tych samych autorów przykład przesunięcia ważonego na drzewie z korzeniem, które spełnia warunek warunek multiplikatywności modułów z wykładnikiem 2, ale nie spełnia tego warunku dla innych wykładników i nie jest operatorem quasinormalnym (przykład 4.2.2).

Opisane dotychczas rozdziały stanowią formę rozbudowanego wprowadzenia. Zawierają materiał, z którego autor intensywnie korzysta opisując własne wyniki. Wyniki te przedstawione są w ostatnim Rozdziale 5. Stanowią one treść dwóch prac autorstwa pana mgr. Pietrzyckiego, z których jedna jest opublikowana, a druga jest w formie manuskryptu.

Pierwsza część tego rozdziału poświęcona jest analizie własności przesunięć ważonych na drzewach skierowanych. W Twierdzeniu 5.1.3 autor pokazuje, że jeśli ograniczymy się do ograniczonych injektywnych ważonych operatorów przesunięcia na $\ell^2(\mathbb{Z})$, to warunek multiplikatywności modułów dla jednego wykładnika jest wystarczający dla quasinormalności. Wspomniane operatory przesunięcia na $\ell^2(\mathbb{Z})$ autor nazywa przesunięciami ważonymi klasycznymi. Powstaje pytanie, czy to ograniczenie do przesunięć klasycznych jest istotne. Twierdzenie 5.2.5 podaje przykład drzewa skierowanego bez korzeni, na którym istnieje ograniczone injektywne przesunięcie ważone spełniające warunek multiplikatywności modułów dla pojedynczego wykładnika i nie-quasinormalne. W konstrukcji tej w bardzo ciekawy sposób zastosowane jest klasyczne twierdzenie Lindemanna-Weierstrassa.

Kolejne wyniki podane przez autora dotyczą nowych charakteryzacji operatorów normalnych i quasinormalnych. W Twierdzeniu 5.3.2 pokazane jest, że można usunąć założenie o ośrodkowości przestrzeni Hilberta we wspomnianym wcześniej twierdzeniu Uchiyamy. W Twierdzeniach 5.3.4, 5.3.5, 5.3.7, 5.3.9 autor podaje nowe przykłady skończonych podzbiorów $S \subset \mathbb{N}$, o tej własności, że warunek multiplikatywności modułów dla wykładników ze zbioru S (plus czasami dodatkowe założenia, np. injektywność, czy specjalna postać rozkładu polarnego operatora $|A||A^*|$) jest warunkiem równoważnym quasinormalności. Z kolei w twierdzeniu 5.3.13 autor pokazuje, że jeśli jednocześnie operatory A i A^* spełniają warunek multiplikatywności modułów dla dwóch wykładników będących kolejnymi liczbami naturalnymi, to operator A jest normalny. W Twierdzeniu 5.3.15 wykazano, że jeśli operator ograniczony injektywny spełnia warunek multiplikatywności modułów dla wykładnika 2, to jest iloczynem izometrii i pierwiastka kwadratowego z uogólnionego operatora Toeplitza.

Ostatnia część rozdziału 5 przedstawia wyniki dotyczące nierówności między modułami potęg i ich zastosowania do problemu zredukowanej multiplikatywności. Kluczowe twierdzenia to 5.4.7 i 5.4.8. Pokazują one, że warunki multiplikatywności modułów dla pewnych specyficznych układów wykładników implikują nierówności między modułami będące wzmocnieniem nierówności opisanych w literaturze (np. referencja [38]). Pozwala to autorowi podać w Twierdzeniu 5.4.9 jeszcze jeden układ wykładników dla warunku multiplikatywności modułów wystarczającego dla normalności operatora.

Od strony merytorycznej rozprawa pana mgr. Pietrzyckiego reprezentuje bardzo przyzwoity poziom naukowy. Autor uzyskuje ciekawe nowe charakteryzacje operatorów normalnych i quasinormalnych. Zaletą jest systematyczne podejście do problemu. Przeprowadzona jest dyskusja różnych przypadków, znajdujemy tu zarówno wyniki pozytywne, jak i kontrprzykłady. W dowodach używane są zaawansowane narzędzia dostarczane przez analizę funkcjonalną, algebrę liniową czy teorię liczb. Pan Pietrzycki sprawnie posługuje się tymi narzędziami, a niektóre dowody (np. w Twierdzeniu 5.2.5) są bardzo pomysłowe.

Niestety, rozprawa ma również pewne mankamenty. Głównym jest strona edytorska pracy. Wydaje mi się, że autor nie zrobił końcowej korekty. Przykładem jest tutaj sformułowanie jednego z kluczowych dla tej pracy pojęcia miary spektralnej na stronie 21. Użyto tam co najmniej niestandardowych oznaczeń na sumę i iloczyn operatorów. Czytanie pracy bardzo utrudnia zjawisko nagłej zmiany oznaczeń w trakcie dowodu, np. zmiana dużych liter na małe (dowód Lematu 3.2.4), zmiana greckich liter na łacińskie (dowód Twierdzenia 4.1.5). Z kolei w Twierdzeniu 4.1.10 mowa jest o równoważności czterech warunków, podczas gdy w dowodzie wykazywana jest równoważność pięciu warunków. Pewnym uchybieniem są również zdarzające się poważne błędy gramatyczne.

Jeśli chodzi o rzeczy bardziej merytoryczne, to znalazłem w pracy jedną niejasność. Chodzi mianowicie o uwagę poczynioną przez autora w ostatnim akapicie Rozdziału 4 na stronie 44. Dotyczy ona Przykładu 4.2.3, który opisuje przesunięcie ważone na drzewie skierowanym. Autor stwierdza, że ten przykład nie pozwala na skonstruowanie ograniczonego injektywnego operatora kompozycji na $L^2(\mu)$, który spełniałby warunek multiplikatywności modułów dla pojedynczego wykładnika, ale nie byłby quasinormalny, ponieważ pojawiające się tam drzewo skierowane ma korzeń. Jak rozumiem, ta uwaga przedstawia główną motywację dla Twierdzenia 5.2.5. Tymczasem wydaje się, że drzewo $\mathcal{T}_{2,\infty}$ nie ma korzenia. Przykład opisany przez autora zaczerpnięty jest z referencji [44]. W pracy tej znajdujemy uwagę (Remark 5.4), która jest dokładnym zaprzeczeniem uwagi poczynionej przez autora. Od razu jednak zaznaczam, że powyższy wytyk nie umniejsza moim zdaniem wartości Twierdzenia 5.2.5. Dzięki pomysłowości konstrukcji jest to jedno z najciekawszych twierdzeń w tej pracy.

Generalnie moja opinia o recenzowanej pracy jest bardzo pozytywna. Wyniki są oryginalne i stanowią wkład w rozwój wiedzy o operatorach normalnych i quasinormalnych. Autor stosuje zaawansowane techniki dowodzenia, okazuje sprawność, pomysłowość i bez wątpienia dużą kulturę matematyczną. Uważam, że praca ta spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Pawła Pietrzyckiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Marcin Marciniak

Marciniak