AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Michał Kapustka

2. Dyplomy i stopnie naukowe

- Tytuł Privat Docent oraz dyplom Venia Legendi, Uniwersytet w Zurychu, Wydział Matematyki i Nauk Przyrodniczych, 2014.

  Tytuł rozprawy habilitacyjnej: "Calabi–Yau threefolds and Mukai varieties"

  Komisja: Prof. K. Hulek (LU Hannover, DE)
  Prof. A. Kresch (UZH Zürich, CH)
  Prof. Ch. Okonek (UZH Zürich, CH)
  Prof. A. Wüstholz (ETH Zürich, CH)
  Recenzenci: Czworo anonimowych międzynarodowych ekspertów
- Stopień doktora w zakresie nauk matematycznych w zakresie matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, 2007.

  Tytuł rozprawy doktorskiej: "Arithmetic and geometric properties of some Calabi–Yau threefolds".

  Promotor: Prof. S. Cynk (UJ Kraków, PL)
  Recenzenci: Prof. A. Langer (UW Warszawa, PL)
  Prof. T. Szemberg (UP Kraków, PL)
- Dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Fizyki, 2003.

3. Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych

06.2009 do teraz	Adiunkt na Uniwersytecie Jagiellońskim
02.2015 do teraz	Profesor nadzwyczajny na Uniwersytecie w Stavanger
05.2013 do 05.2014	Stypendysta podoktorski na Uniwersytecie w Zurychu
07.2010 do 05.2013	Stażysta podoktorski na Uniwersytecie w Zurychu
02.2009 do 02.2010	Stypendysta podoktorski na Uniwersytecie w Oslo
10.2007 do 06.2009	Asystent na Uniwersytecie Jagiellońskim

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.).

a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Trójwymiarowe rozmaitości Calabi–Yau oraz rozmaitości Mukai

b) Prace stanowiące osiągnięcie naukowe (w odwrotnym porządku chronologicznym)

[H1] S. Dinew, G. Kapustka, M. Kapustka, Remarks on Mukai threefolds admitting $\mathbb{C}^*$ action, *Moscow. Math. J.* vol. 17(1):15-33, 2017.
[H2] S. Coughlan, G. Kapustka, M. Kapustka, Ł. Gołębiowski, Arithmetically Gorenstein Calabi-Yau threefolds in $\mathbb{P}^7$, *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 23: 52-68, 2016.
[H3] G. Kapustka, M. Kapustka. Bilinkage in codimension 3 and canonical surfaces of degree 18 in $\mathbb{P}^5$ *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* XVI:767-787, 2016.
[H4] G. Kapustka, M. Kapustka. Calabi–Yau threefolds in $\mathbb{P}^6$. *Ann. Mat. Pura Appl.*,195(2):529-556, 2016.
[H5] M. Kapustka, K. Ranestad. Vector bundles on Fano varieties of genus ten. *Math. Ann.*, 356(2):439–467, 2013.
[H6] M. Kapustka. Some degenerations of G_2 and Calabi-Yau varieties. In *Contributions to algebraic geometry*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 359–373. Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.
[H7] M. Kapustka. Geometric transitions between Calabi–Yau threefolds related to Kustin-Miller unprojections. *J. Geom. Phys.*, 61(8):1309–1318, 2011.
[H8] G. Kapustka, M. Kapustka. A cascade of determinantal Calabi–Yau threefolds. *Math. Nachr.*, 283(12):1795–1809, 2010.

c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Niniejsza prezentacja oprócz omówienia wyników powyższych prac zawiera opis następujących ściśle z nimi związanych preprintów. Preprinty te zostały zawarte w mojej rozprawie habilitacyjnej na Uniwersytecie w Zurychu i zostały sprawdzone przez jej recenzentów.

[HP1] M. Kapustka. Mirror symmetry for Pfaffian Calabi–Yau 3-folds via conifold transitions. arXiv:1310.2304, 2013, złożona do druku.
[HP2] M. Kapustka. Projections of Mukai varieties. arXiv:1005.5557, 2013, złożona do druku.
[HP3] G. Kapustka, M. Kapustka. Tonoli Calabi–Yau threefolds revisited arXiv:1310.0774, 2015, złożona do druku.

Wstęp do rozprawy służy nam do omówienia kontekstu powyższych artykułów, zarysowania ich głównych wyników oraz ich znaczenia dla rozwoju dziedziny. Bardziej szczegółowe omówienie znajduje się w dalszych jej częściach.

Wstęp

Tematem przewodnim omawianych prac jest badanie explicite trójwymiarowych rozmaitości nieogólnego typu. Koncentrujemy się głównie na badaniu trzy-rozmaitości Calabi–Yau oraz rozmaitości Fano.

Badanie explicite rozumiemy w duchu Cortiego oraz Reida (zob. [39]) jako takie badanie, które nie zatrzymuje się na otrzymaniu ogólnych abstrakcyjnych twierdzeń, ale idzie dalej szukając konkretnego opisu rozmaitości, na przykład za pomocą równań, w celu wydobycia jak najjaśniejszego obrazu ich własności geometrycznych.

Wyniki niniejszej rozprawy są podzielone na dwie części. Pierwsza dotyczy badania rozmaitości Calabi–Yau, które nie są pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych. Druga część natomiast rozpatruje rozmaitości Fano oraz powierzchnie K3 wraz z przestrzeniami moduli wiązek wektorowych na nich poprzez badanie tzw. rozmaitości Mukai. Obie części mają wspólne korzenie historyczne wywodzące się z badań na temat geometrii powierzchni K3 oraz ich przestrzeni moduli. Ponadto teorie rozmaitości Calabi–Yau, rozmaitości Fano oraz powierzchni K3 przenikają się i współgrają na wielu poziomach: począwszy od najbardziej podstawowych relacji pomiędzy ich konstrukcjami takimi jak fakt, że wiele rozmaitości Calabi–Yau oraz powierzchni K3 powstaje jako anty-kanoniczne cięcia rozmaitości Fano, aż po bardziej zaawansowane relacje, jak na przykład hipoteza symetrii lustrzanej która ma swoją interpretację dla każdej z tych klas rozmaitości. Wzajemna zależność pomiędzy rozmaitościami Calabi–Yau oraz Fano różnych wymiarów jest wszechobecna w omawianej rozprawie. Co więcej, stanowi ona główny drogowskaz w całej naszej pracy badawczej. Zwróćmy uwagę na kilka relacji pojawiających się w naszych pracach:

- badanie zanurzeń powierzchni del Pezzo w rozmaitościach Calabi–Yau jest głównym składnikiem naszych konstrukcji za pomocą odrzutowań;
- nasze studium wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau jest oparte na analogii z opisami wyznacznikowymi powierzchni del Pezzo;
- nasze podejście do klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ opiera się na powiązaniu tych rozmaitości ze zrzutowanymi powierzchniami del Pezzo oraz del Pezzo trzy-rozmaitościami;
- badamy rozmaitości Calabi–Yau z listy Borcea, rozpatrując rozmaitości Mukai, których są one kwadratowymi cięciami;
- używamy idei geometrycznych przejść pomiędzy rozmaitościami Calabi–Yau do studiowania modeli Landaua–Ginburga trzy-rozmaitości Fano–Mukai.

Pomimo, że obie części rozprawy wzajemnie się przenikają, zachowujemy podział na dwie części, oparty na różnicy w motywacjach i charakterze otrzymanych wyników. Dodatkowo wyróżniamy trzecią część rozprawy dotyczącą klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$, ze względu na jej rozmiar oraz dodatkowe motywacje. Reszta niniejszego omówienia jest podzielona na trzy adekwatne części.

Rozmaitości Calabi–Yau

Rozmaitości Calabi–Yau są rozmaitościami o trywialnej pierwszej klasie Cherna i znikających pośrednich kohomologiach snopa strukturalnego. Stanowią one jedno z uogólnień powierzchni K3 na wyższe wymiary. Ponadto Twierdzenie Beauville'a–Bogomolova [13, 20] mówi, że za pomocą rozmaitości Calabi–Yau, rozmaitości hiper-Kählerowskich i zespolonych torusów, poprzez branie produktów oraz nakryć étalnych, można otrzymać każdą gładką zespoloną rozmaitość Kählerowską o trywialnej pierwszej klasie Cherna. Natomiast w klasyfikacji rozmaitości zespolonych rozmaitości ze znikającą pierwszą klasą Cherna znajdują się w bardzo szczególnym miejscu: na granicy pomiędzy uporządkowanym światem rozmaitości typu Fano oraz światem rozmaitości typu ogólnego zbyt obszernym i chaotycznym, by można go było w ogólności zrozumieć. Z tego powodu rozmaitości Calabi–Yau stanowią centralne obiekty z punktu widzenia klasyfikacji rozmaitości zespolonych. Klasyfikację rozmaitości Calabi–Yau można prowadzić w różnym stopniu dokładności:

- z dokładnością do homeomorfizmu topologicznego;
- z dokładnością do deformacji;
- z dokładnością do biwymierności;
- z dokładnością do izomorfizmu.

Podstawowymi niezmiennikami topologicznymi rozmaitości Calabi–Yau są ich liczby Hodge'a

$$h^{1,1}(X) = \dim H^1(X, \Omega_X^1), \quad h^{1,2}(X) = \dim H^1(X, \Omega_X^2),$$

oraz topologiczna charakterystyka Eulera $\chi(X)$ powiązana z nimi wzorem:

$$\chi(X) = 2(h^{1,1}(X) - h^{1,2}(X)).$$

Liczby $h^{1,1}(X)$ oraz $h^{1,2}(X)$ mają również swoją interpretację algebraiczną odpowiednio jako rząd grupy Picarda (liczba Picarda) oraz wymiar przestrzeni deformacji.

Najprostsze pytania dotyczące rozmaitości Calabi–Yau pozostają szeroko otwarte. Nie wiemy w szczególności, czy liczby Hodge'a lub charakterystyki Eulera rozmaitości Calabi–Yau są ograniczone, ani czy jest skończenie wiele rodzin deformacyjnych rozmaitości Calabi–Yau. Zdania ekspertów w tych kwestiach są mocno podzielone. W szczególności sam Yau uważa, że jest skończenie wiele rodzin rozmaitości Calabi–Yau, natomiast Reid (zob. [136]) jest zdania przeciwnego.

Jednym z najciekawszych podejść do klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau jest tzw. hipoteza sieci (zob. [135, 63]). Proponuje ona zaaranżować wszystkie trzy-rozmaitości Calabi–Yau w olbrzymi zorientowany graf, którego wierzchołkami są rodziny deformacyjne rozmaitości Calabi–Yau, natomiast strzałkami są tzw. geometryczne przejścia pomiędzy elementami tych rodzin. Hipoteza postuluje, że tak stworzony graf jest spójny. Do tej pory pokazano, że większość standardowych przykładów jest połączona siecią z kwintyką w $\mathbb{P}^4$ (zob. [60, 38]). Mamy zatem olbrzymi spójny fragment grafu, który nazywamy siecią i pytamy czy wszystkie trzy-rozmaitości Calabi–Yau można do tej sieci podłączyć.

Badanie trzy-rozmaitości Calabi–Yau jest dodatkowo silnie umotywowane zastosowaniami w fizyce teoretycznej, a dokładniej w teorii super-strun. W tej teorii podstawowym budulcem wszechświata są malutkie struny, których wibracje determinują rodzaj cząstek, które te struny reprezentują. Żeby taka teoria była spójna z wiedzą jaką posiadamy, struny te muszą wibrować wewnątrz małych trzy-rozmaitości Calabi–Yau. Z tego punktu widzenia znajdywanie dobrze opisanych trzy-rozmaitości Calabi–Yau jest istotne, ponieważ stanowi ono źródło przykładów testujących hipotezy mające swoje odzwierciedlenie w fizyce. Najistotniejszymi spośród nich są hipotezy symetrii lustrzanej.

Symetria lustrzana jest w istocie głównym źródłem zainteresowania trzy-rozmaitościami Calabi–Yau. Jest ona również motorem jednego z najbardziej spektakularnych postępów w nowoczesnej matematyce. Z punktu widzenia fizyki (zob. [61]) postuluje ona, że trzy-rozmaitości Calabi–Yau pojawiają się w parach, które indukują tę samą teorię strun. Obserwacja ta ma głęboko idące konsekwencje w całej teorii trzy-rozmaitości Calabi–Yau. Konsekwencje te formułowane są na różnych poziomach ogólności. Na poziomie topologicznym lustrzana para rozmaitości Calabi–Yau ma zamienione liczby Hodge'a. Najbardziej intrygujące dla matematyków zajmujących się symetrią lustrzaną jest jednak to, że istnieje konkretne powiązanie umożliwiające policzyć liczbę krzywych wymiernych danego stopnia na rozmaitości Calabi–Yau za pomocą badania tzw. okresu, czyli pewnej kanonicznej multisekcji wiązki wektorowej indukowanej przez środkowe kohomologie na przestrzeni deformacji jej lustra (zob. [30]).

Ogólna teoria rozmaitości Calabi–Yau jest wciąż na początku swojego rozwoju i nadal stawia więcej pytań niż odpowiedzi. Dlatego teoria ta ma mocno rozwiniętą część poświęconą konstrukcji, badaniu przykładów oraz relacji pomiędzy nimi, celem której jest zrozumienie prawdziwego znaczenia głównych hipotez oraz podłożenie podwalin pod przyszłą ogólną teorię. Jest to również punkt widzenia jaki przyjmujemy w naszych badaniach naukowych.

Rozmaitości Calabi–Yau są głównym obiektem badań niniejszej rozprawy, który determinuje kierunek badań wszystkich omawianych prac. Naszym nadrzędnym celem jest rozszerzenie klasy dobrze opisanych trzy-rozmaitości Calabi–Yau; cel ten zawiera zarówno konstruowanie nowych przykładów, jak i dogłębniejsze badanie tych przykładów, o których wiadomo, że istnieją, jednak nasza wiedza o ich własnościach geometrycznych jest wciąż niewystarczająca. Kładziemy specjalny nacisk na to, żeby rozmaitości były dobrze opisane; mając na myśli, że muszą mieć dogłębnie zrozumianą geometrię (w terminach równań, niezmienników, stożków Kählera, deformacji), ale również być wygodne do badania z punktu widzenia hipotez związanych z fizyką. Z takim zamiarem w [H7] wprowadzamy nową metodę konstrukcji konkretnie opisanych rozmaitości Calabi–Yau, bazując na teorii geometrycznych przejść oraz tzw. odrzutowań Kustina–Millera. Jest to uogólnienie metod z prac [D3, 86], posiadające tę zaletę, że dzięki wykorzystaniu teorii odrzutowań, otrzymywane przykłady posiadają opisy explicite. Oprócz konstrukcji nowych przykładów, metoda ta jest również skuteczna w badaniu już znanych rozmaitości Calabi–Yau. Okazuje się bowiem, że wiele rozmaitości Calabi–Yau opisanych innymi metodami powstaje również w wyniku naszej konstrukcji. Otrzymujemy w ten sposób nowe narzędzie do ich badania. Na przykład w pracy [H8], używając metody geometrycznych przejść opartych na odrzutowaniach, przeprowadzamy dogłębną analizę trzy-rozmaitości Calabi–Yau opisanych jako miejsca degeneracji odwzorowań pomiędzy rozkładalnymi wiązkami wektorowymi (czyli tzw. wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau, które pojawiły się po raz pierwszy w pracy [65]). Wynikiem naszych starań jest rozszerzenie klasy dobrze zrozumianych przykładów rozmaitości Calabi–Yau, która dotąd składała się prawie wyłącznie z pełnych przecięć w rozmaitościach torycznych. W szczególności dodajemy do nich rozmaitości zadane przez Pfaffiany w ważonych przestrzeniach rzutowych oraz wyznacznikowe rozmaitości Calabi–Yau. Co prawda liczba nowych dobrze zbadanych przez nas przykładów, jest mała w stosunku do liczebności klasy rozmaitości Calabi–Yau pochodzących z konstrukcji torycznych. Są to jednak przykłady nie mniej ważne. W tej teorii bowiem kluczowe jest rozróżnienie tych hipotez które są prawdziwe dla wszystkich rozmaitości Calabi–Yau od tych, które zależne są od specyfiki konstrukcji pochodzących z geometrii torycznej. Rzeczywiście, w ostatnim czasie rośnie zainteresowanie, zarówno od strony matematyki jak i fizyki, badaniem takich trzy-rozmaitości Calabi–Yau, które mają opis wyznacznikowy lub Pfaffianowy (por. [151, 85, 81, 82, 144, 78, 12]) i większość tych prac wykorzystuje nasze wyniki z [H8], [H7] lub [HP1]. Zainteresowanie to wzmocnione jest przekonaniem, że powinno być więcej rozmaitości Calabi–Yau, które nie są pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych niż tych, które nimi są. Szczególnie istotne jest zrozumienie symetrii lustrzanej dla takich rozmaitości. Mając to na myśli, w pracy [HP1], robimy krok w kierunku konstrukcji lustrzanych rodzin dla czterech nowych przykładów odkrytych po raz pierwszy w [H7] (oraz niezależnie [85]) oraz opisanych za pomocą równań Pfaffianowych.

Zwróćmy uwagę na fakt, że niektóre rozmaitości skonstruowane przez nas w pracach objętych rozprawą służą nie tylko jako modele do testowania ogólnych hipotez, ale wykazują też własności, które są bardzo nietypowe wśród rozmaitości Calabi–Yau. W szczególności rozmaitości wyznacznikowe i Pfaffianowe stanowią, jak dotąd, jedyne źródło par rozmaitości Calabi–Yau, które nie są biwymierne, a mimo to ich kategorie pochodne są równoważne ([138, 68, 81, 82]). Jest to zjawisko interpretowane w fizycznej teorii GLSM. Ponadto używając naszego przykładu, w pracy [80] została skonstruowana para rozmaitości Calabi–Yau, których różnica anihiluje klasę prostej afinicznej w pierścieniu Grothendiecka rozmaitości dając kontrprzykład do słynnej hipotezy skracania w pierścieniu Grothendiecka. Jest to również jedyny znany obecnie kontrprzykład do osłabionej wersji hipotezy skracania, która implikowałaby (zob [56]) niewymierność ogólnej czterowymiarowej kubiki.

Rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$

Drugim celem naszych badań nad rozmaitościami Calabi–Yau jest rozwiązanie następującego problemu:

Problem 1 (**Okonek** [124])**.** *Sklasyfikować z dokładnością do izomorfizmu wszystkie rozmaitości Calabi–Yau, które posiadają zanurzenie w* $\mathbb{P}^6$.

Żeby zobrazować znaczenie rozmaitości Calabi–Yau posiadających zanurzenie w $\mathbb{P}^6$ w teorii rozmaitości Calabi–Yau zwróćmy uwagę na następujący fakt: dla większości znanych przykładów (skonstruowanych w [151, 18] i ponownie rozważanych w [H4, HP3, H3]) pomimo posiadania przez nich dokładnego opisu zarówno z punktu widzenia algebraicznego jak i geometrycznego, nie istnieje w całej ogromnej bazie danych równań typu Calabi–Yau [152] takie równanie, które mogłoby być kandydatem na równanie opisujące okres ich ewentualnego lustra.

Oprócz wpływania zarówno na klasyfikację rozmaitości Calabi–Yau, jak i na problem konstrukcji nowych niestandardowych przykładów, ten projekt wpisuje się w długą historię badań zmierzających do klasyfikacji rozmaitości rzutowych wymiaru będącego połową wymiaru przestrzeni otaczającej. Naturalność takich rozmaitości wynika z faktu, że każdą gładką rzutową rozmaitość wymiaru n można zanurzyć w przestrzeń rzutową wymiaru $2n+1$, więc te rozmaitości, które posiadają zanurzenie w $\mathbb{P}^{2n}$, stanowią największą klasę specjalną z tego punktu widzenia. W rozważaniach takich rozmaitości (patrz [53, 141, 127, 16, 49, 48, 5]) można spotkać dwa kierunki badań: pierwszy polega na próbie klasyfikacji takich rozmaitości począwszy od niskiego stopnia, druga na próbie klasyfikacji tych rozmaitości które nie są typu ogólnego. Klasyfikacja rozmaitości nieogólnego typu wymiaru 3 stopnia co najmniej 11 w $\mathbb{P}^6$ jest pierwszym nierozwiązanym problemem, natomiast rozmaitości Calabi–Yau leżą na jego brzegu. W tym przypadku mamy możliwość skorzystania z ogólnego twierdzenia strukturalnego Waltera [158], dotyczącego podkanonicznych rozmaitości kowymiaru 3. W naszym przypadku twierdzenie Waltera implikuje, że rozważane rozmaitości są tzw. rozmaitościami Pfaffianowymi. Problem konstrukcji Pfaffianowych rozmaitości Calabi–Yau został podjęty w pracach [151, 18]. Nasze wyniki odnoszą się do tych konstrukcji.

Rezultaty dotyczące tematu klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau posiadających zanurzenie w $\mathbb{P}^6$ są zawarte w pracach [H4, HP3, H3]. Publikacja [H4] przedstawia ogólny zarys wyników otrzymanych w kierunku częściowej klasyfikacji tych rozmaitości; zawiera ona klasyfikację rozmaitości Calabi–Yau zawartych w pięciowymiarowych kwadrykach oraz takich, które mają stopień ≤ 14. Ponadto dowodzimy wyniku dotyczącego deformacji Pfaffianowych rozmaitości Calabi–Yau, z którego wynika między innymi, że inaczej niż w przypadku pełnych przecięć, minimalny stopień generatorów ideału jednorodnego rozmaitości Pfaffianowej może się zmieniać w gładkich rodzinach deformacyjnych.

W pracy [HP3] zarysowujemy program pełnej klasyfikacji rozmaitości Calabi-Yau w $\mathbb{P}^6$ bazując na zaobserwowanej analogii pomiędzy opisami Pfaffianowych rozmaitości Calabi–Yau oraz opisami rzutów kanonicznych zanurzeń powierzchni del Pezzo na $\mathbb{P}^5$. W szczególności ponownie rozważamy przykłady skonstruowane w [151] otrzymując ich prostą i w pełni geometryczną charakteryzację, unikając podnoszenia z charakterystyki dodatniej. Te przykłady są teraz łatwe do konstruowania i podatne na dalsze badania. Przedstawiamy również relację pomiędzy rozmaitościami Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ oraz rozmaitościami Fano indeksu 2 w terminach tzw. biliaison. Nasze konstrukcje w kontekście badania rozmaitości Calabi–Yau kowymiaru 3 są uogólnieniem konstrukcji z [H7]. Idea interpretacji odrzutowań jako specjalnych biliaison jest nową koncepcją ogólną, która jest dla nas również punktem wyjścia do omawianej dalej pracy [H2].

W pracy [H3] przedstawiamy pierwszy krok prowadzący do konstrukcji rozmaitości Calabi–Yau stopnia 18 w $\mathbb{P}^6$. Według naszej hipotezy jest to potencjalnie jedyny brakujący przykład Pfaffianowej rozmaitości Calabi–Yau. Punktem wyjścia naszych rozważań jest zauważenie, że ogólnym hiperpłaskim cięciem takiej hipotetycznej rozmaitości musi być powierzchnia ogólnego typu stopnia 18 w swoim zanurzeniu kanonicznym w $\mathbb{P}^5$. Konstrukcja takich powierzchni jest więc istotnym krokiem w kierunku znalezienia rozmaitości Calabi–Yau stopnia 18 w $\mathbb{P}^6$. W pracy [H3] otrzymujemy rodzinę takich powierzchni kanonicznych stopnia 18 w $\mathbb{P}^5$ używając metody biliaison dla specjalnych rzutowań rozmaitości Veronese. Zwróćmy uwagę, że powierzchnie kanoniczne niskiego genusu leżą w kręgu zainteresowań wielu geometrów algebraicznych zajmujących się klasyczną geometrią. W szczególności powierzchnie kanoniczne genusu 6, czyli takie, których odwzorowanie kanoniczne zadaje morfizm w $\mathbb{P}^5$, zostały sklasyfikowane do stopnia 17 w pracy [31]. Jako komentarz do hipotezy zawartej w [H3], w pracach [32, 33] pojawiły się konstrukcje takich powierzchni wyższych stopni, jednak wszystkie one zostały wykluczone z naszych rozważań wynikami z [H4], jako na pewno nie rozszerzające się do rozmaitości Calabi–Yau.

Praca [H2] jest kontynuacją naszych rozważań dotyczących rozmaitości Calabi–Yau dopuszczających specjalne zanurzenia. Rozważamy w niej rozmaitości Calabi–Yau, które posiadają zanurzenie jako rozmaitości rzutowo normalne w $\mathbb{P}^7$, czyli takie, które nie są rzutami z ważonych przestrzeni rzutowych wyższego wymiaru. W tym przypadku sytuacja jest nieco odmienna od sytuacji kowymiaru 3 ze względu na brak twierdzenia strukturalnego w kowymiarze 4. Niemniej, otrzymujemy podobnymi metodami do przypadku kowymiaru 3 hipotetycznie pełną listę takich rozmaitości. W szczególności wypełniamy wszystkie możliwe stopnie ich zanurzenia. Otrzymane przykłady służą z jednej strony do wypełnienia zadań pierwszej części rozprawy, z drugiej mogą służyć za drogowskaz do znalezienia ogólnej struktury rozmaitości Gorensteina kowymiaru 4, rozwijając metody [137].

Rozmaitości Mukai

Część badań przedstawionej rozprawy prowadzona jest w kontekście rozmaitości Mukai, rozmaitości używanych przez Mukai do klasyfikacji trzy-rozmaitości Fano–Mukai. Rozmaitości Fano–Mukai są rozmaitościami pierwszymi o koindeksie Fano równym 3. Dokładniej znaczy to, że są to rozmaitości F wymiaru n o liczbie Picarda 1 na których istnieje dywizor szeroki H taki, że zachodzi $-K_X = (n-2)H$ (tu K_X jest dywizorem kanonicznym). Istotnym niezmiennikiem rozmaitości Fano–Mukai jest ich genus ,czyli genus krzywej powstającej jako pełne przecięcie dywizorów z systemu H lub równoważnie liczba $g = \frac{1}{2}(H^2+2)$.

Geometria rozmaitości Mukai stała się istotna dla ogólnego badania rozmaitości Fano oraz przestrzeni moduli powierzchni K3 po cyklu prac Mukai [110, 112, 113, 115, 111, 109] oraz ich uzpełnieniu [102] autorstwa Melli.

W tej części omawianej rozprawy rozwijamy piękne geometryczne idee Mukai, Kuznetsova, Ilieva, Markushevicha i Ranestada, dotyczące badania powierzchni K3, Fano trzy-rozmaitości oraz geometrii przestrzeni moduli wiązek na tych rozmaitościach. Idee te oparte zostały na rozważaniu relacji pomiędzy rozmaitościami Mukai. Punktem wyjściowym całej teorii jest twierdzenie Mukai mówiące, że niektóre przestrzenie moduli wiązek wektorowych na powierzchniach K3 są również powierzchniami K3. Konstrukcja ta indukuje zatem tzw. transformacje Fourier-Mukai, czyli równoważność kategorii pochodnych pomiędzy różnymi powierzchniami K3. Używając twierdzenie Torelliego, Mukai znalazł kilka takich równoważności. Następnie w [94, 92, 91] Kuznetsov rozważał kategorie pochodne rozmaitości Fano–Mukai sekcyjnego genusu $g \leq 12$ w kierunku badania zjawiska homologicznej rzutowej dualności. W tym celu Kuznetsov za pomocą metod algebry homologicznej skonstruował na każdym liniowym cięciu rozmaitości Mukai wiązki wektorowe, które odgrywały kluczową rolę w jego dowodzie homologicznej rzutowej dualności.

Od strony geometrycznej w [75, 76], Iliev, Markushevich i Ranestad podali geometryczne konstrukcje przestrzeni moduli wiązek wektorowych na powierzchniach K3 oraz trzy-rozmaitościach Fano sekcyjnego genusu 7 oraz 9. W szczególności podali oni geometryczną interpretację transformacji Fourier–Mukai w tych przypadkach oraz geometryczną konstrukcję wiązek znalezionych w [92]. Głównym składnikiem konstrukcji w [76] jest dowód twierdzenia mówiącego, że ogólne cięcie rozmaitości Mukai genusu sekcyjnego 9 posiadające jeden zwykły punkt osobliwy, zrzutowane z tego punktu osobliwego jest izomorficzne z pewnym cięciem liniowym rozmaitości Mukai genus o jeden mniejszego. Otrzymany wynik umożliwił przyporządkowanie każdej wiązce wektorowej z pewnym ustalonym wektorem Mukai na rozmaitości Mukai M_g dla $g = 9$ punktu na rozmaitości rzutowo dualnej do M_g. W ten sposób badana przestrzeń moduli wiązek została skonstruowana jako liniowe cięcie rozmaitości rzutowo dualnej do M_g. Ponadto w pracach [134, 76] autorzy przedstawili hipotezę, że wynik dotyczący rzutowania osobliwych cięć rozmaitości Mukai rozszerza się na wszystkie przypadki.

W pracy [HP2], dowodzimy powyższej hipotezy Ilieva i Ranestada. Nasze metody opierają się na teorii reprezentacji i pozwalają skonstruować explicite szukane izomorfizmy. Następnie rekonstruujemy wiązki Kuznetsova cofając wiązkę uniwersalną docelowej rozmaitości Mukai przez restrykcję do liniowego cięcia, a następnie przez nasz izomorfizm. W szczególności odtwarzamy wyniki [75, 76] z naszego alternatywnego punktu widzenia. Podobnie jak w pracach [76], otrzymujemy konsekwencje dotyczące przestrzeni moduli pewnych wiązek wektorowych na cięciach rozmaitości Mukai wszystkich genusów.

Z punktu widzenia naszych badań dotyczących rozmaitości Calabi–Yau otrzymany wynik ma jeszcze jedną motywację. Mianowicie umożliwia on nam konstrukcję kaskady geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach, jak w opisanej wyżej pracy [H7], łączącej wszystkie rozmaitości Calabi-Yau z listy Borcea. W ten sposób praca [HP2] wpisuje się w główne motywacje naszej rozprawy. Otrzymujemy również analogiczną kaskadę łączącą trzy-rozmaitości Fano Mukai genus co najwyżej 10. Takie połączenia rozmaitości Fano za pomocą przejść składających się z degeneracji złożonych z rzutowaniami a następnie wygładzeniami poszukiwane są przez matematyków zajmujących się teorią modeli Landaua-Ginzburga, będącą instancją hipotezy symetrii lustrzanej dla trzy-rozmaitości Fano.

W pracy [H5] skupiamy się na najciekawszym z przypadków hipotezy Ilieva i Ranestada. Jest to przypadek osobliwych cięć rozmaitości Mukai genus 10 oznaczanej jako M_{10}. Z pracy [HP2] wiemy, że ogólne osobliwe cięcie liniowe M_{10} rzutuje się na liniowe cięcie rozmaitości M_9. W pracy [H5] idziemy krok dalej dowodząc, że ogólne gładkie cięcie rozmaitości M_{10} dopuszcza jedyne zanurzenie w Grassmannian $G(3, 6)$. W ten sposób nie tylko konstruujemy geometrycznie wiązki z pracy Kuznetsova [92], ale dowodzimy również ich jedyności.

Z naszych rozważań wynika również geometryczna konstrukcja przestrzeni moduli wiązek o wektorze Mukai $(3, L, 3)$ na powierzchni K3 genusu 10 jako powierzchni K3 genusu 2. W tym przypadku nasza konstrukcja daje równoważność pomiędzy kategorią pochodną powierzchni K3 genusu 10 ze skręconą kategorią pochodną pewnej powierzchni K3 genusu 2 skręconej przez pewną specjalną dwutorsyjną klasę Brauera. Badanie konkretnej klasy Brauera, która bierze udział w naszej konstrukcji jest przedmiotem pracy [101], opartej na naszych wynikach. Jest to jeden z trzech typów, sklasyfikowanych przez van Geemena w [154], dwutorsyjnych klas Brauera pojawiających się na powierzchni K3 stopnia 2. Inny rodzaj związany jest z klasyczną dualnością pomiędzy powierzchniami K3 stopni 8 oraz 2. Interpretacja geometryczna ostatniego typu dwutorsyjnych klas Brauera w terminach równoważności kategorii pochodnych jest przedstawiona w omawianej niżej pracy [OP1].

Nasze wyniki zawarte w [H5] oparte są na dogłębnym zbadaniu geometrii rozmaitości Mukai M_{10}, najbardziej tajemniczej z rozmaitości Mukai.

W pracy [H6] kontynuujemy nasze badania rozmaitości M_{10}, z myślą o zastosowaniu wyników do symetrii lustrzanej rozmaitości Calabi–Yau zgodnie z głównymi motywacjami naszej rozprawy. Dokładniej, praca [H6] dotyczy konstrukcji tzw. małych degeneracji torycznych rozmaitości Mukai M_{10}. Pojęcie małych degeneracji torycznych zostało wprowadzone przez Batyreva [7] jako narzędzie do konstruowania rodzin lustrzanych rozmaitości Calabi–Yau, które nie są pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych. Metoda ta została następnie uogólniona do tzw. torycznych degeneracji Gorensteina. Z myślą o potencjalnych zastosowaniach w symetrii lustrzanej wiele wysiłku zostało włożone w znalezienie takich degeneracji dla różnych klas rozmaitości Fano. W szczególności toryczne degeneracje Gorensteina zostały skonstruowane dla większości tzw. rozmaitości sferycznych w [2]. Pośród rozmaitości jednorodnych M_{10} jest jedną z kilku rozmaitości, dla której metody [2] zawodzą. Spośród rozmaitości Mukai jest to jedyna taka rozmaitość. W pracy [H6] rozwiązujemy ten problem konstruując niezależną małą toryczną degenerację rozmaitości M_{10}. Jako zastosowanie naszych wyników otrzymujemy dobrze opisaną rodzinę która jest kandydatem na lustro rozmaitości Calabi–Yau stopnia 36 z listy Borcea.

Praca [H1] uzupełnia nasze wyniki o badanie geometrii rozmaitości Fano–Mukai genusu 12. Rozmaitości te nie powstają jako cięcia liniowe wyżej wymiarowych rozmaitości. Wciąż jednak stowarzyszone są z nimi rozmaitości Calabi–Yau będące ich podwójnymi nakryciami. W ten sposób otrzymujemy pewne rozszerzenie listy Borcea o rozmaitości Calabi–Yau stopnia 44, których polaryzacja jest hipereliptyczna. Nasze prace w tym temacie są motywowane dodatkowo pochodzącym z analizy zespolonej problemem istnienia tzw. metryk Kählera–Einsteina na tych rozmaitościach. W toku badań uzyskujemy opisy explicite ciekawych gładkich degeneracji rozmaitości Fano–Mukai genusu 12 z dużą grupą automorfizmów oraz opis dywizorów niezmienniczych ze względu na tę grupę. W ten sposób otrzymujemy specjalne degeneracje rozmaitości Calabi–Yau stopnia 44, które docelowo powinny pomóc w rozstrzygnięciu symetrii lustrzanej dla tej kolejnej niestandardowej rodziny trzy-rozmaitości Calabi–Yau.

Poboczne wyniki i rozwinięte narzędzia

Opisaliśmy powyżej zarys głównych motywacji naszych badań w tej rozprawie. Warto jednak zaznaczyć, że każda z podjętych prac doprowadziła nas do rozwinięcia nowych narzędzi które niezależnie mogą być wykorzystane w innych tematach. Na przykład w pracach [H8, H7, H2] rozwijamy ogólna teorię odrzutowań przydatną w badaniu różnych typów rozmaitości. W pracach [H4, HP3, H3, H2] powiększamy nasze pojmowanie ogólnej teorii biliaison oraz jej powiązań z odrzutowaniami. Ponadto otrzymujemy wyniki dotyczące ogólnej klasyfikacji powierzchni ogólnego typu z $p_g = 6$. W pracy [H5], otrzymujemy wiele niezależnych wyników dotyczących geometrii Grassmannianów $G(3, 6)$ oraz $G(2, 7)$, oraz ich liniowych sekcji. W szczególności opisujemy ich schematy Hilberta prostych oraz stożkowych, wpisując się w zainteresowania klasycznej geometrii algebraicznej. Wyniki [H6] znajdują zastosowanie w klasyfikacji powierzchni K3 genusu 10. Natomiast w pracy [H1] podejmujemy problem istnienia metryk Kählera–Einsteina na rozmaitościach Fano.

Istnienie specjalnych rzutowań rozmaitości Veronese, których używamy w [H3] do konstrukcji powierzchni generalnego typu w $\mathbb{P}^5$, jest bardzo zaskakujące i wpisuje się w problemy klasycznej geometrii algebraicznej. Mają one również zaskakujące związki z teorią wygładzalności schematów skończonych na przestrzeni rzutowej, co będzie przedmiotem naszych dalszych badań.

Przejdźmy teraz do bardziej szczegółowego omówienia naszych wyników.

Rozmaitości Calabi–Yau i symetria lustrzana

Nasze badania na temat trzy-rozmaitości Calabi–Yau zmierzają do zrozumienie nowych klas przykładów, szczególnie choć nie jedynie, rozmaitości Calabi–Yau o liczbie Picarda 1. Nasze cele w tej części rozprawy można podsumować następująco:

(1) Znalezienie nowych metod konstrukcji oraz opisu rodzin rozmaitości Calabi–Yau o liczbie Picarda 1 za pomocą równań w przestrzeniach rzutowych z wagami.
(2) Badanie geometrii oraz hipotezy sieci dla już opisanych rozmaitości Calabi–Yau.

(3) Studiowanie symetrii lustrzanej dla jeszcze niezbadanych klas rozmaitości Calabi–Yau, które nie są pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych.

Pozostała część rozdziału będzie podzielona adekwatnie do powyższych celów.

Konstrukcje i rekonstrukcje za pomocą równań

Z punktu widzenia geometrii explicite, rozmaitości Calabi–Yau o liczbie Picarda 1 są szczególnie ważną podklasą wszystkich rozmaitości Calabi–Yau. Przede wszystkim mają najmniejszą liczbę Picarda i przez to są pierwsze do badania. Ponadto, zważając na doświadczenie z teorii rozmaitości Fano, powinny być najtrudniejsze do skonstruowania. Również, z punktu widzenia hipotezy sieci, rozmaitości te są tzw. prymitywnymi rozmaitościami Calabi–Yau, czyli takimi rozmaitościami, które leżą na końcach grafu geometrycznych przekształceń; wynika to z tego, że ze względu na zbyt niską liczbę Picarda nie dopuszczają one kontrakcji. Co więcej, na podstawie rozważań [63] można przypuszczać, że jest jedynie kilka sporadycznych rodzin prymitywnych rozmaitości Calabi–Yau, które mają wyższą liczbę Picarda. Można zatem stwierdzić, że do klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau wystarczy sklasyfikować wszystkie rozmaitości Calabi–Yau o liczbie Picarda 1, a pozostałe otrzymamy z nich przez geometryczne przejścia. Podobnie teoria Mori umożliwiła klasyfikację wszystkich trzy-rozmaitości Fano startując z klasyfikacji Fano trzy-rozmaitości o liczbie Picarda 1 o łagodnych osobliwościach. W końcu rozmaitości o liczbie Picarda 1 są również wyróżnione z punktu widzenia symetrii lustrzanej, ponieważ ich lustra mają jednoparametrową rodzinę deformacji. Lustra te mogą zatem być studiowane explicite w terminach równań Picarda–Fuchsa, które w tym wypadku są równaniami różniczkowymi jednej zmiennej.

Do tej pory znaleziono tysiące rodzin rozmaitości Calabi–Yau (zob m.in. [8, 18, 24, 28, 40, 41, 42, 85, 84, 86, D1, 140, 88, 98, 96, 125, 133, 151]), a nowe konstrukcje wciąż pojawiają się w literaturze. Za pomocą równań opisano jednak jedynie następujące rodziny rozmaitości Calabi–Yau o liczbie Picarda jeden:

(1) Pełne przecięcia w przestrzeniach rzutowych z wagami;
(2) Pełne przecięcia w rozmaitościach jednorodnych (Borcea [22]);
(3) Rozmaitości Pfaffianowe w sześciowymiarowej przestrzeni rzutowej (Tonoli [151], Rødland [138]);
(4) Niektóre rozmaitości wyznacznikowe (Gross–Popescu [65]);
(5) Podwójne nakrycia $\mathbb{Q}$-Fano trzy-rozmaitości (Lee [96]).

Oprócz powyższego jest też szeroka klasa przykładów, których istnienie zostało udowodnione, ale ich efektywne konstrukcje nie są znane. Co prawda z samych wyników dotyczących istnienia można często wywnioskować pewne informacje o ich geometrii, ale pracowanie z takimi przykładami jest bardzo trudne. Z drugiej strony jest bardzo niewiele dobrze opisanych przykładów, które nie są pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych.

Mając na myśli powyższe motywacje, w pracy [H7] wprowadzamy metodę konstrukcji nowych rodzin rozmaitości Calabi–Yau, która również służy nam do opisania już znanych przykładów za pomocą równań. Metoda jest zainspirowana programem Takagiego klasyfikacji $\mathbb{Q}$-Fano trzy-rozmaitości (patrz [4, 148, 149]). Oparta jest ona na teorii odrzutowań Kustina–Millera, teorii rozwiniętej przez Papadakisa i Reida w [128, 129] oraz ideach prac [D3, 86]. Konstrukcje, które wprowadzamy w [H7] są w rzeczywistości uogólnieniem wyników zawartych w [D3, 86]. Naszym głównym celem nie jest jednak konstrukcja dużej liczby nowych przykładów w stosunku do tych znalezionych przez G. Kapustkę w [86]. Głównym celem, dla którego korzystamy z odrzutowań jest otrzymanie przykładów wraz z ich opisem za pomocą równań. Podkreślmy również fakt, że pomimo, iż praca [H7] nie zawiera wielu ogólnych wyników, jej idee służą nam jako drogowskaz w większości prac zawartych w tej rozprawie. Precyzując, nasza praca [H7] prezentuje ogólną metodę konstrukcji rozmaitości Calabi–Yau za pomocą odrzutowań i pokazuje jak metoda działa w najprostszych przypadkach, takich jak pełne przecięcia oraz Pfaffiany wiązek rozkładalnych. Żeby metoda miała szerszy zakres działania w kontekście doprowadzania do konkretnych równań potrzebujemy rozszerzenia wyników dotyczących teorii odrzutowań. Robimy to między innymi w pracach [H8, HP3, H3, H2, HP2].

Zanim przejdziemy do omówienia naszej konstrukcji, zacznijmy od wprowadzenia podstawowych faktów na temat odrzutowań (detale można znaleźć w pracach, [128, 129]). Odrzutowanie jest to odwzorowanie odwrotne do pewnego biwymiernego rzutowania. Będziemy rozważać odrzutowania powstające w następujący sposób.

Niech $D \subset X \subset \mathbb{P}^n$ będą dwiema rozmaitościami rzutowo Gorensteina takimi, że D ma kowymiar 1 w X. Niech $\omega_X = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(k_X)|_X$ oraz $\omega_D = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(k_D)|_D$ będą snopami dualizującymi X oraz D odpowiednio, tak, że $k_X, k_D \in \mathbb{Z}$. Przypuśćmy, że $k_X > k_D$. Na podstawie [129, Thm 5.2] istnieje wtedy sekcja wymierna s wiązki $O_X(k_X - k_D)$ z biegunami wzdłuż D, która definiuje odwzorowanie biwymierne

$$\varphi : X \dashrightarrow Y \subset \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n, s]$$

ściągające D do punktu $P_s := (0 : \cdots : 0 : 1)$. Ponadto Y jest również rozmaitością rzutowo Gorensteina. Odwzorowaniem odwrotnym do φ jest rzutowanie Y z punktu P_s.

Definicja 2. *Powyżej opisane odwzorowanie φ nazywamy odrzutowaniem Kustina–Millera o dywizorze wyróżnionym D oraz odrzutowanej rozmaitości X.*

Bazując na powyższej definicji odrzutowania, w pracy [H7] wprowadzamy następującą relację pomiędzy rozmaitościami Calabi–Yau.

Definicja 3 ([H7])**.** *Geometrycznym dwuprzejściem z trzy-rozmaitości Calabi–Yau X do trzy-rozmaitości Calabi–Yau Y, opartym na odrzutowaniu, jest para dwóch geometrycznych przejść z pewnej rozmaitości Calabi–Yau Z do X oraz Y odpowiednio takie, że kontrakcje rozmaitości Z w obu przejściach tworzą rezolwentę pewnego odrzutowania. Dokładniej mamy diagram:*

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & & \\
X & X' \arrow[l, squiggly, "\mathscr{F}"'] \arrow[rr, dashed, "\pi"] & & Y' \arrow[r, squiggly, "\mathscr{G}"] & Y
\end{tikzcd}$$

gdzie p, q są kontrakcjami o obrazach X', Y' odpowiednio; π jest odrzutowaniem natomiast $\mathscr{F}$ oraz $\mathscr{G}$ są wygładzeniami rozmaitości X' oraz Y'.

Powyższa relacja pomiędzy rozmaitościami Calabi–Yau jest wzmocnieniem własności bycia połączonym przez przejścia geometryczne. Geometryczne dwuprzejścia oparte na odrzutowaniach konstruujemy w następujący sposób. Zaczynamy od powierzchni del Pezzo D zanurzonej w (ważonej) przestrzeni rzutowej T w taki sposób, że zawężenia hiperpłaszczyzn z T tworzą pełny anty-kanoniczny system liniowy na D (powierzchnia D może być zawarta w hiperpłaszczyźnie). Rozważamy ponadto rodzinę $\mathscr{X}$ trzy-rozmaitości Calabi–Yau zanurzonych w tej samej przestrzeni T. Zakładamy, że istnieje rozmaitość rzutowo Gorensteina X otrzymana jako płaska granica rodziny $\mathscr{X}$ taka, że $D \subset X$. Ponieważ zarówno D jak i X są rzutowo Gorensteina, z teorii odrzutowań Kustina–Millera istnieje wymierna sekcja wiązki $\mathscr{O}_X(1)$ z biegunami wzdłuż D. Domknięcie wykresu tej sekcji (w stożku $\operatorname{Cone}(T)$) jest rozmaitością rzutowo Gorensteina Y biwymierną z X, która ma trywialny snop dualizujący oraz izolowaną osobliwość analitycznie równoważną ze stożkiem nad powierzchnie del Pezzo D. W wielu przypadkach Y jest opisane explicite za pomocą równań w Cone(T) oraz możemy znaleźć wygładzenie w tej samej przestrzeni. Otrzymujemy wtedy nową rodzinę trzy-rozmaitości Calabi–Yau.

Za pomocą powyższej metody:

- konstruujemy nowe rodziny trzy-rozmaitości Calabi–Yau;
- opisujemy explicite rodziny których istnienie było udowodnione;
- rekonstruujemy znane rodziny.

Nowe przykłady

Pierwsze niestandardowe rodziny rozmaitości Calabi–Yau otrzymane w naszej konstrukcji to następujące rodziny.

Przykład 1 ([H7]). *Rodziny* $\mathscr{X}_5, \mathscr{X}_7, \mathscr{X}_{10}$ *składają się z trzy-rozmaitości Calabi–Yau stopni* 5, 7, 10 *w przestrzeniach rzutowych z wagami* $\mathbb{P}(1^4, 2^3)$, $\mathbb{P}(1^5, 2^2)$, $\mathbb{P}(1^6, 2)$. *Opisane są one za pomocą równań będących Pfaffianami ogólnych skośnie-symetrycznych macierzy* 5×5 *o wyrazach będących ogólnymi wielomianami stopni ważonych opisanych odpowiednio diagramami:*

$$\begin{pmatrix} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ & & 2 & 2 & 2 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & & 2 \\ & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & 1 & 2 & 2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & & 3 \\ & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 & 2 \\ & & & 2 & 2 \\ & & & & 2 \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

Przykład 2 ([H7]). *Rodzina* $\mathscr{X}_{25}$ *oznaczająca rodzinę rozmaitości w* $\mathbb{P}^9$ *otrzymanych jako przecięcie dwóch rozmaitości liniowo równoważnych z Grassmannianem* $G(2,5)$ *w zanurzeniu Plückera jest również rodziną rozmaitości Calabi–Yau.*

Obserwacja 4. Istnienie rodzin $\mathscr{X}_{25}$ oraz $\mathscr{X}_{10}$ zostało pokazane w [86], natomiast w [H7] został podany ich opis. Rodzina $\mathscr{X}_7$ po raz pierwszy pojawiła się wraz z opisem w pracy [H7]. Rodzina $\mathscr{X}_5$ pojawiła się po raz pierwszy w [85] (została przeoczona w [H7] a następnie opisana w terminach geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach w [HP1]), gdzie pozostałe z powyższych rodzin zostały wynalezione niezależnie bezpośrednio rozważając rezolwenty Pfaffianowe w przestrzeniach rzutowych z wagami. [H7]

Ponadto w pracy [H7] dowodzimy, że wszystkie 15 nowych rodzin rozmaitości Calabi–Yau, których istnienie zostało pokazane w [86] można otrzymać startując z pełnych przecięć za pomocą geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach. Teoria odrzutowań może zatem zostać użyta do odkrycia ich opisu za pomocą równań. Do zrealizowania tego celu w wysokim kowymiarze potrzebny będzie dalszy postęp efektywnej teorii odrzutowań.

Geometria i teoria sieci

Powyżej wprowadziliśmy metodę konstrukcji rozmaitości za pomocą geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach. Okazuje się, że metoda ta może zostać również użyta do badania geometrii już znanych rozmaitości. Żeby w ten sposób rozważać rodzinę rozmaitości Calabi–Yau można połączyć ją za pomocą ciągu dwuprzejść geometrycznych opartych na odrzutowaniach do znanego i dobrze opisanego przykładu. Okazuje się, że w ten sposób zaczynając na przykład od kwintyki w $\mathbb{P}^4$ można otrzymywać szerokie klasy przykładów: od pełnych przecięć przez Pfaffiany rozmaitości wyznacznikowe oraz Borcea po bardziej skomplikowane rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^7$. Zalety skorzystania z takiego połączenia są następujące:

- dwuprzejście jest sposobem na dołączenie badanej rodziny do sieci rozmaitości Calabi–Yau;
- można prześledzić jak geometria (np. niezmienniki) rozmaitości zmienia się przy dwuprzejściu.
- dwuprzejścia są hipotetycznie kompatybilne z symetrią lustrzaną (zob. [107]).

Poniżej omawiamy szczegóły zastosowania niestandardowych geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach do studiowania rozmaitości Calabi–Yau. Omawiane wyniki dotyczą prac [H8], [H7], [HP2] oraz [H3].

Niezmienniki polaryzacji. Niezmienniki polaryzacji rozmaitości Calabi–Yau połączonych geometrycznym dwuprzejściem są opisane następującym lematem.

Lemat 5. *Niech $\pi\colon X_0 \to Y_0$ będzie odrzutowaniem łączącym dwie rodziny trzy-rozmaitości Calabi–Yau $\mathscr{X}$ oraz $\mathscr{Y}$ tak, że π ściąga powierzchnię Del Pezzo D stopnia d. Niech $X \in \mathscr{X}$ oraz $Y \in \mathscr{Y}$ będą ogólnymi elementami odpowiednich rodzin. Wtedy zachodzą następujące relacje pomiędzy niezmiennikami X oraz Y:*

(i) $\dim(|H_Y|) = \dim(|H_X|) + 1$;
(ii) $H_Y^3 = H_X^3 - d$;
(iii) $c_2(Y) \cdot H_Y = c_2(X) \cdot H_X - 12 + 2d$.

Liczenie liczb Hodge'a jest nieco delikatniejsze i będzie robione osobno w zależności od badanych klas przykładów.

Rozmaitości Calabi–Yau Borcea. W [H7] opierając się na wynikach [HP2], dowodzimy, że rozmaitości Borcea Calabi–Yau opisane w [22] są połączone z kwintyką za pomocą geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach. Dokładniej dowodzimy, że tworzą one tzw. kaskadę (łańcuch w grafie) geometrycznych dwuprzejść opartą na odrzutowaniach powierzchni del Pezzo stopnia 4. Przypomnijmy, że rozmaitości Borcea są przecięciami czterowymiarowych rozmaitości Mukai z kwadrykami. Otrzymujemy następującą tabelę, zawierającą w szczególności niezmienniki polaryzacji H generującej grupę Picarda.

H^3	χ	$c_2 \cdot H$	$dim\|H\|$	Description
4	-256	52	5	$X_{2,6} \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,1,3)$
8	-176	56	6	$X_{2,4} \subset \mathbb{P}^5$
12	-144	60	7	$X_{2,2,3} \subset \mathbb{P}^6$
16	-128	64	8	$X_{2,2,2,2} \subset \mathbb{P}^7$
20	-120	68	9	$X_{1,2,2} \subset G(2,5)$
24	-116	72	10	$X_{1,1,1,1,1,1,2} \subset S_{10}$
28	-116	76	11	$X_{1,1,1,1,2} \subset G(2,6)$
32	-116	80	12	$X_{1,1,2} \subset LG(3,6)$
36	-120	84	13	$X_{1,2} \subset G_2$

Tabela 1: Trzy-rozmaitości Borcea Calabi–Yau oraz ich niezmienniki

Indeksy przy X oznaczają stopnie równań, których pełne przecięcie w rozmaitości otaczającej jest rozpatrywaną rozmaitością Calabi–Yau. Dokładniej dowodzimy:

Propozycja 6 ([H7])**.** *Dla $2 \leq k \leq 9$, trzy-rozmaitość Borcea Calabi–Yau X_{4k} stopnia $4k$ jest połączony z trzy-rozmaitością X_{4k-4} stopnia $4k-4$ przez geometryczne dwuprzejście oparte na odrzutowaniu powierzchni del Pezzo stopnia 4.*

Dowód dla $k \leq 5$ wynika ze standardowej teorii odrzutowań Kustina–Millera. Da $k \geq 6$ propozycja jest bezpośrednią konsekwencją omawianego dalej Twierdzenia 36 udowodnionego w pracy [HP2]. W pracy [H5] natomiast zauważamy, że kaskady tej nie da się przedłużyć używając powierzchni del Pezzo stopnia 4. Jednak podczas naszych badań nad degeneracjami rozmaitości $M_{10} = G_2$ w pracy [H6] znajdujemy piękne geometryczne dwuprzejście, które opiera się kontrakcjach typu I (czyli małej kontrakcji prostych do punktów) oraz typu III (kontrakcji powierzchni do krzywej) i zamyka naszą kaskadę w cykl. Dokładniej niech $C \subset \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ będzie skręconą kubiką. Niech ponadto $Q_2 \subset \mathbb{P}^5$ będzie generyczną kwadryką zawierającą C, a $Q_4 \subset \mathbb{P}^5$ ogólną kwartyką osobliwą w C. Wtedy $X_1 = Q_2 \cap Q_4$ jest osobliwą rozmaitością Calabi–Yau o zwykłych punktach podwójnych. W końcu niech $\phi : \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^{13}$ będzie odwzorowaniem zadanym przez kwadryki zawierające C. Obraz $X_2 = \phi(Q_2 \cap Q_4)$ jest również osobliwą rozmaitością Calabi–Yau stopnia 36 posiadającą dwa zwykłe punkty podwójne. W pracy [H6] dowodzimy, że odwzorowanie $\phi|_{Q_2 \cap Q_4}$ jest odwzorowaniem wymiernym rozwiązanym przez dwie kontrakcje pewnej rozmaitości Calabi–Yau Y: pierwsza pochodzi od rozdmuchania $Y \to X_1$ skręconej kubiki C, natomiast druga od małego rozwiązania $Y \to X_2$ punktów podwójnych. W [H6] dowodzimy ponadto, że obrazy X_1 oraz X_2 obu kontrakcji mają wygładzenia: jeden do ogólnego pełnego przecięcia kwadryki z kwartyką, drugi natomiast do rozmaitości Calabi–Yau Borcea stopnia 36. W ten sposób skonstruowaliśmy geometryczne przejście pomiędzy drugim i ostatnim wierszem w Tabeli 1.

Wyznacznikowe rozmaitości Calabi–Yau. W pracy [H8] badamy wyznacznikowe rozmaitości Calabi–Yau, wprowadzone w [65]. Używamy geometrycznych dwuprzejść opartych na odrzutowaniach, żeby połączyć je z siecią rozmaitości Calabi–Yau, następnie wyznaczamy nieznane dotąd niezmienniki Hodge'a tych rozmaitości. W końcu dla tych rozmaitości, które mają liczbę Picarda wyższą od 1 badamy stożek Kählera oraz kontrakcje odpowiadające jego krawędziom. Otrzymane wyniki stanowią pierwszy istotny krok w kierunku badania symetrii lustrzanej dla wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau. Zwróćmy uwagę, że do tej pory lustra dla wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau nie zostały skonstruowane. Nowe podejście do tej kwestii oparte między innymi na wynikach pracy pracy [H8] oraz ideach fizycznej teorii GLSM (odpowiadającej homologicznej rzutowej dualności Kuznetsova rozważanej między innymi w naszych badaniach nad rozmaitościami Mukai) jest przedmiotem prac [81, 82].

Punktem wyjścia naszych rozważań nad wyznacznikowymi rozmaitościami Calabi–Yau, jest tajemnicza analogia zauważona przez Grossa i Popescu w [65] pomiędzy opisami wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau oraz opisami powierzchni del Pezzo. Analogia ta przedstawiona jest w Tabeli 2.

W Tabeli 2 w kolumnie i podajemy stopień powierzchni del Pezzo. Jako, że są dwie powierzchnie del Pezzo stopnia 8 używamy dla nich oznaczeń 8 oraz 8'. Wyjaśnienie analogii w terminach odrzutowań znajduje się w naszej pracy [H8]. Dowodzimy mianowicie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7 ([H8])**.** *Niech $\mathscr{D}_i$ oznaczają rodziny rozmaitości Calabi–Yau opisane w wierszu i tabeli. Wtedy dla każdego $i \in \{3, \ldots, 8\}$ rodzina $\mathscr{D}_i$ jest połączona z rodziną $\mathscr{D}_{i-1}$ przez dwuprzejście geometryczne oparte na odrzutowaniu powierzchni del Pezzo D_i stopnia i*

Opisane odrzutowania tworzą kaskadę równoległą do kaskady odrzutowań prostych na powierzchniach del Pezzo. Jako, że proste również mogą zostać opisane wyznacznikowo, tłumaczy to rozważaną analogię.

i	powierzchnie del Pezzo D'	trzy-rozmaitości Calabi–Yau X'
1	$D_6 \subset \mathbb{P}(1,1,2,3)$	
2	$D_4 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2)$	$X_8 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,4)$
3	$D_3 \subset \mathbb{P}^3$	$X_5 \subset \mathbb{P}^4$
4	$D_{2,2} \subset \mathbb{P}^4$	$X_{3,3} \subset \mathbb{P}^5$
5	4×4 Pfaffiany 5×5 macierzy skośnie-symetrycznej	6×6 Pfaffiany 7×7 macierzy skośnie-symetrycznej
6	2×2 minory 3×3 macierzy	3×3 minory 4×4 macierzy
7	2×2 minory 3×4 macierzy otrzymane przez wymazanie wiersza z macierzy symetrycznej	3×3 minory 4×5 macierzy otrzymane przez wymazanie wiersza z macierzy symetrycznej
8	2×2 minory 4×4 macierzy symetrycznej	3×3 minors of a 5×5 macierzy symetrycznej
8'	2×2 minory 3×5 macierzy podwójnie-symetrycznej	3×3 minory 4×6 macierzy podwójnie-symetrycznej

Tabela 2. Analogia pomiędzy wyznacznikowymi rozmaitościami Calabi–Yau a powierzchniami del Pezzo

Otrzymany wynik wykorzystujemy do badania rodzin $\mathscr{D}_i$ dla $i \geq 6$. Przypadek $i = 5$ dotyczy rozmaitości Pfaffianowych opisanych poniżej, natomiast pozostałe są standardowymi dobrze zbadanymi przykładami. Rodziny $\mathscr{D}_i$ dla $i \geq 6$ badamy za pomocą teorii rozdmuchań Grassmannianowych oraz teorii Namikawy z pracy [116]. Otrzymujemy w ten sposób następujące liczby Hodge'a:

i	$h^{1,1}$	$h^{1,2}$
6	2	34
7	2	25
8	1	26

Dowodzimy również, że rozmaitości z rodziny $\mathscr{D}_{8'}$ są zawsze osobliwe. Ponadto, z Lematu 5 dla rodzin rozmaitości Calabi–Yau otrzymujemy następujące niezmienniki polaryzacji zadającej zanurzenie rozważane w opisie.

i	H^3	$c_2 \cdot H$	$dim\|H\|$
6	20	56	7
7	27	54	8
8	35	50	9

W szczególności dwie z rozważanych rodzin są rodzinami o liczbie Picarda 2. Wyznaczamy zatem ich stożki Kählera, oraz kontrakcje odpowiadające jego brzegom tzw. kontrakcje ekstremalne. W ten sposób jesteśmy w stanie znaleźć wszystkie modele biwymierne badanych rozmaitości. Dochodzimy do następujących wniosków.

- W przypadku $X \in \mathscr{D}_6$ każda kontrakcja ekstremalna jest małą kontrakcją 56 prostych do zwykłych punktów podwójnych na obrazie kontrakcji, który jest pełnym przecięciem kwadryki z kwartyką w $\mathbb{P}^5$.
- Rozmaitości z rodziny $\mathscr{D}_7$ mają jedną kontrakcję 63 prostych do punktów podwójnych pełnego przecięcia kwadryki i kwartyki w $\mathbb{P}^5$. Druga kontrakcja ściąga kwadrykę do punktu na rozmaitości będącej degeneracją rozmaitości z rodziny $\mathscr{D}_8$. Oznacza to w szczególności, że dwuprzejście geometryczne pomiędzy $\mathscr{D}_7$ a $\mathscr{D}_8$ jest tak naprawdę pojedynczym przejściem geometrycznym.

Jako wynik naszych rozważań otrzymujemy również stożki Kählera dla rozmaitości o liczbie Picarda 3, które wchodzą w skład naszych dwuprzejść geometrycznych.

Pfaffianowe rozmaitości Calabi–Yau. Geometryczne dwuprzejścia oparte na odrzutowaniach są również używane do połączenia Pfaffianowych rozmaitości Calabi–Yau do sieci. Będziemy tu używać języka rozmaitości Pfaffianowych wprowadzonego pokrótce niżej w części dotyczącej rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ (np. Definicja 10). Następujący wynik opisuje odrzutowania rozmaitości Pfaffianowych.

Propozycja 8 ([H7] oraz [H3])**.** *Niech D będzie rozmaitością Pfaffianową $\mathbb{P}^n$ zadaną przez rozkładalną wiązkę E. Niech X będzie pełnym przecięciem dwóch hiperpowierzchni zawierających D. Wtedy odrzutowanie D w X jest Pfaffianową rozmaitością Calabi–Yau w $\mathbb{P}^{n+1}$ odpowiadającą wiązce $\tilde{E} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(a_1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(a_2)$ gdzie $\tilde{E}$ jest rozkładalnym rozszerzeniem wiązki E do $\mathbb{P}^{n+1}$.*

Jako, że pełne przecięcie trzech hiperpowierzchni można również zapisać jako rozmaitość Pfaffianową wiązki rozkładalnej rangi 3, powyższy wynik jest uogólnieniem standardowego odrzutowania Kustina–Millera pełnego przecięcia D trzech hiperpowierzchni w pełnym przecięciu X dwóch hiperpowierzchni.

Z omawianej niżej pracy [H4], wiemy, że są jedynie dwie rodziny Pfaffianowych rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$, które odpowiadają rozkładalnym wiązkom. Są to rodziny rozmaitości stopnia 13 oraz 14, zrekonstruowane za pomocą dwuprzejść opartych na odrzutowaniach w pracach [H7] oraz [H8] odpowiednio.

Propozycja 8 jest również prawdziwa w przestrzeniach rzutowych z wagami. Jednak poza przypadkiem gdy D jest pełnym przecięciem, który daje rodziny $\mathscr{X}_5$, $\mathscr{X}_7$, $\mathscr{X}_{10}$, nie znaleźliśmy konstrukcji, która by prowadziła do rozmaitości Calabi–Yau. Używając Lematu 5 oraz wyników pracy [D3] otrzymujemy następującą tabelę niezmienników

i	$h^{1,1}$	$h^{1,2}$	H^3	c_2H	χ
5	1	51	5	38	-100
7	1	61	7	46	-120
10	1	59	10	52	-116
25	1	51	25	70	-100

Powyższe niezmienniki zostały później potwierdzone niezależnie w pracy [85].

W pracy [H3], podejmujemy również próbę konstrukcji Pfaffianowych rozmaitości Calabi–Yau, których stowarzyszone wiązki nie są rozkładalne. W takim wypadku potrzebna powierzchnia del Pezzo D nie może być rzutowo Gorensteina. W szczególności, nie możemy przeprowadzić odrzutowania Kustina–Millera. Mimo to możemy przeprowadzić konstrukcję analogiczną do tej opisanej w Propozycji 8, wynik będzie wtedy rozmaitością Y, która nie jest rzutowo Gorensteina. Odrzutowania takie nazywamy odrzutowaniami nie-Gorensteina. Otrzymana rozmaitość Y jako rozmaitość nie-Gorensteina nie jest opisana jako rozmaitość Pfaffianowa. Nie ma jednak przeszkód do tego, żeby Y miało wygładzenie które już jest Pfaffianowe.

W związku z tym w pracy [H3] rozważamy następujący przykład:

Przykład 3 ([H3])**.** *Niech D będzie powierzchnią del Pezzo zanurzoną w $\mathbb{P}^5$ przez podsystem systemu anty-kanonicznego. Niech X będzie rozmaitością będąca pełnym przecięciem kubik zawierających D. Istnieje rozmaitość nie-Gorensteina $Y \subset \mathbb{P}^6$, otrzymana jako odrzutowanie nie-Gorensteina D w X taka, że Y dopuszcza wygładzenie, które jest trzy-rozmaitością Calabi–Yau Z stopnia 15 w $\mathbb{P}^6$. Ponadto rozmaitość Z jest rozmaitością Pfaffianową stowarzyszoną z wiązką $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}$.*

Małe degeneracje toryczne i symetria lustrzana

W niniejszej rozprawie zajmujemy się również badaniem nowo otrzymanych przykładów trzy-rozmaitości Calabi–Yau za pomocą metod symetrii lustrzanej. Geometryczne dwuprzejście pomiędzy rozmaitościami zgodnie z ogólna hipotezą Morrisona może zostać również użyte do konstrukcji lustra. Hipoteza Morrisona mówi mianowicie, że każde przejście geometryczne pomiędzy z rozmaitości X do Y indukuje przejście geometryczne z $\hat{Y}$ do $\hat{X}$, gdzie $\hat{X}$ i $\hat{Y}$ są odpowiednimi lustrami X oraz Y. Jednak, żeby to zrobić efektywnie potrzebne jest zrozumienie osobliwości pojawiających się w lustrzanym dwuprzejściu, co w przypadku osobliwości pochodzących z kontrakcji powierzchni del Pezzo nie jest nawet hipotetycznie zbadane. Zamiast iść tą drogą, dla rodzin $\mathscr{X}_5$, $\mathscr{X}_7$, $\mathscr{X}_{10}$, $\mathscr{X}_{13}$, $\mathscr{X}_{25}$ oraz rodziny Borcea $\mathscr{X}_{36}$ konstruujemy nowe przejścia geometryczne tzw. conifold, które łączą badane przez nas rozmaitości z już zrozumianymi przykładami. Przejścia conifold są przejściami geometrycznymi, w których kontrakcja wchodząca w ich skład jest małą kontrakcją czyli ściągnięciem pewnej liczby prostych do prostych punktów podwójnych. Przejścia conifold zarówno w fizyce jaki i matematyce zajmują specjalne miejsce wśród przejść geometrycznych (zob [147, 145]). Dla nas główną zaletą korzystania z takich przejść jest wzmocniona hipoteza Morrisona, której dowód został zapowiedziany przez Ruddata i Seiberta i która pozwala przewidzieć lustrzane przejście conifold również jako przejście conifold. Ściśle związany z tą hipotezą (de facto nieco osłabioną wersją tej hipotezy) jest "ansatz" Batyreva dotyczący konstrukcji luster przez tzw. małe toryczne degeneracje (zob [7]), czyli takie degeneracje toryczne, które w szczególności dopuszczają jedynie proste punkty podwójne. Podejście to okazało się skuteczne w wielu przypadkach (zob. np [9, 10, 11]).

Symetria lustrzana dla ważonych Pfaffianów. W pracy [HP1] przedstawiamy konstrukcje luster dla rodzin $\mathscr{X}_5$, $\mathscr{X}_7$, $\mathscr{X}_{10}$, $\mathscr{X}_{13}$ $\mathscr{X}_{25}$ wprowadzonych w Przykładach 1 oraz 2, opisanych za pomocą Pfaffianowych równań w ważonych przestrzeniach z wagami. Rozważamy również klasyczną rodzinę $\mathscr{X}_{13}$ rozmaitości stopnia 13 w $\mathbb{P}^6$. Rozważanie akurat tych rozmaitości jest istotne, ponieważ są to najprostsze rozmaitości Calabi–Yau, które nie są pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych. Poza tym są to rozmaitości, które nie są połączone przez pojedyncze przejścia conifold z hiperpowierzchniami w rozmaitościach torycznych. Tworzą one zatem klasę rozmaitości, która jest następna do zbadania z punktu widzenia symetrii lustrzanej.

Pewne wyniki w kierunku konstrukcji luster powyższych przykładów zostały otrzymane w pracy [85] za pomocą metody tropikalizacji wprowadzonej w [23]. W pracy [HP1] wracamy do podejścia do symetrii lustrzanej za pomocą przejść conifold opisanego w pracy. Głównym naszym wynikiem jest konstrukcja przejść conifold pomiędzy powyższymi pięcioma rodzinami a pewnymi pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych Gorensteina.

Propozycja 9 ([HP1])**.** *Dla każdego $i \in \{5, 7, 10, 13, 25\}$, istnieje płaska rodzina $f_i : \mathscr{Y}_i \to \Delta$ nad dyskiem jednostkowym Δ taka, że dla $t \in \Delta \setminus \{0\}$ włókno $f_i^{-1}(t)$ nad t jest trzy-rozmaitością Calabi–Yau z rodziny $\mathscr{X}_i$, a włókno nad $t = 0$ jest osobliwą trzy-rozmaitością Calabi–Yau $\tilde{X}$ o osobliwościach będących zwykłymi punktami podwójnymi, która jest izomorficzna z rozmaitością będącą pełnym przecięciem w terminalnej rozmaitości torycznej Fano Gorensteina F_i o liczbie Picarda 1. Ponadto, $\tilde{X}$ posiada małe rozwiązanie indukowane przez małe rozwiązanie rozmaitości F_i.*

Otrzymujemy konkretnie opisane rodziny f_i. Dla $i = 5, 7, 10, 13$ uogólniamy metodę degeneracji Grassmannianu znalezioną przez Sturmfelsa i opisaną w [146] do ważonych Grassmannianów. Degeneracja dla $i = 25$ jest nieco bardziej skomplikowana. Rozpatrując ten przypadek wprowadzamy ogólna metodę małych degeneracji rozmaitości, które są otrzymane jako transwersalne przecięcie dwóch rozmaitości, z których każda dopuszcza małą degenerację toryczną.

Mając rozmaitości F_i opisane za pomocą równań otrzymujemy opis ich wachlarza. Następnie korzystamy z metod [7] do opisania kandydata na rodzinę lustrzaną. Za każdym razem otrzymujemy rodzinę rozmaitości osobliwych, których ogólny element hipotetycznie posiada jedynie zwykłe punkty podwójne i który posiada małe rozwiązanie osobliwości, które jest rozmaitością Calabi–Yau. Na podstawie hipotezy Morrisona (której dowód został zapowiedziany przez Ruddata i Seiberta) otrzymujemy wtedy rodzinę lustrzaną dla $\mathscr{X}_i$. W zestawieniu z konstrukcją Kanazawy ([85]) nasze podejście ma tę zaletę, że opieramy się na hipotezie Morrisona, dzięki której otrzymujemy rodzinę gładkich rozmaitości Calabi–Yau jako lustro. Natomiast w [85] rodzina kandydatów na lustro posiada skomplikowane osobliwości, których rozwiązanie nie jest znane.

Niezależnie od zapowiedzianego dowodu hipotezy Morrisona, jesteśmy w stanie obliczyć równanie Picarda Fuchsa dla otrzymanych przez nas kandydatów na rodziny lustrzane. Dla rodzin $\mathscr{X}_5$, $\mathscr{X}_7$, $\mathscr{X}_{10}$, $\mathscr{X}_{13}$, otrzymujemy te same operatory co [85]. W przypadku $\mathscr{X}_{25}$ (nie badanym w [85]) otrzymany przez nas operator jest również zgodny z przewidywaniami obszernej bazy danych [153]. Co ciekawe na podstawie naszej metody degeneracji przecięć rozmaitości Fano otrzymujemy również wzór ogólny na równanie Picarda–Fuchsa lustra takiego przecięcia.

Zwróćmy uwagę, że otrzymane przez nas rodziny lustrzane mają ciekawą dodatkową własność: w przypadkach $i = 5, 10, 13, 25$ posiadają one dwa punkty maksymalnej unipotentnej monodromii. To znaczy, że rodziny te są hipotetycznymi lustrami dla dwóch różnych rozmaitości Calabi–Yau. Na podstawie homologicznej symetrii lustrzanej implikuje to istnienie rozmaitości o równoważnych kategoriach pochodnych z rozmaitościami z rodzin $\mathscr{X}_i$ dla $i = 5, 10, 13, 25$ tzw. rozmaitości do nich Fourier–Mukai dualnych. Takie dualności znajdują również interpretację w fizycznej teorii nieabelowych GLSM, które są obecnie w centrum zainteresowania teorii super-strun (zob. m.in. [81, 82]). Przypadek $\mathscr{X}_{25}$ jest szczególnie interesujący w tym kontekście. Wynika to z tego, że równanie Picarda–Fuchsa, które otrzymaliśmy w tym przypadku jest samo-dualne, co znaczy, że po odpowiedniej zmianie zmiennych zamieniającej punkty maksymalnej unipotentnej monodromii, otrzymujemy to samo równanie. Sugeruje to, że rozmaitości z rodziny $\mathscr{X}_{25}$ albo posiadają nietrywialne automorfizmy Fourier–Mukai albo pojawiają się w parach o równoważnych kategoriach pochodnych. Przypuszczalnie samo-dualność rodziny $\mathscr{X}_{25}$ wynika z samo-rzutowej-dualności Grassmannianu $G(2, 5)$ jednak dokładny opis tego zjawiska wymaga dalszych badań. Wyjaśnienie zjawiska samo-dualności rodziny $\mathscr{X}_{25}$ zostało zapowiedziane przez Addingtona i Ottema. Wyjaśnienie tego zjawiska w terminach tzw. teorii GLSM jest również jednym z głównych celów doktoratu mojego podopiecznego Marco Rampazzo (Uniwersytet w Stavanger). Zauważmy dodatkowo, że opierając się na wynikach pracy [H4] dowodzimy również w [HP1], że rodzina $\mathscr{X}_25$ dopuszcza gładkie degeneracje do rozmaitości opisanych jako zera sekcji wiązki rangi 3 na Grassmannianie. Otrzymaną rodzinę degeneracji możemy traktować jako podrodzinę $\mathscr{X}_{25}$. Pozwala to na alternatywny dowód hipotezy symetrii lustrzanej dla $\mathscr{X}_{25}$, opierający się na zapowiedzianych wynikach Galkina.

Symetria lustrzana dla rozmaitości Borcea X_{36}. Kolejną rodziną znanych trzy-rozmaitości Calabi–Yau o liczbie Picarda 1, dla których rodzina lustrzana nie była do tej pory znana jest rodzina $\mathscr{X}_{36}$ rozmaitości Borcea, otrzymanych jako pełne przecięcia kwadryki oraz formy liniowej z rozmaitością Mukai M_{10} oznaczaną G_2. W pracy [H6] prezentujemy hipotetyczną konstrukcję ponownie opierając się na hipotezie Morrisona. Dokładniej, konstruujemy małe toryczne degeneracje T_1 oraz T_2 rozmaitości G_2, które opiszemy dokładniej w części dotyczącej rozmaitości Mukai. Rozmaitości otrzymane przez przecięcie $T_1, T_2 \subset \mathbb{P}^{13}$ z ogólną kwadryką oraz hiperpłaszczyzną, mają odpowiednio 6 oraz 8 prostych punktów podwójnych. Posiadają one rozwiązania, które są rozmaitościami Calabi–Yau opisanymi jako pełne przecięcia w pięciowymiarowych torycznych rozmaitościach Fano. W ten sposób za pomocą przejść conifold łączymy rodzinę $\mathscr{X}_{36}$ z powyższymi dwiema rodzinami pełnych przecięć w rozmaitościach torycznych. Następnie stosujemy metody [7] do wyznaczenia rodziny lustrzanej oraz odpowiadającego jej równania Picarda-Fuchsa. Otrzymane równanie jest stowarzyszone z operatorem przewidzianym w [153] jako odpowiadającym rozmaitości Calabi–Yau X_{36}.

Rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$

W pracach [H4, HP3, H3] przedstawiamy uzyskany postęp w kierunku klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. Nasze wyniki są podzielone na trzy rodzaje:

(1) Ogólne twierdzenia, skończoność problemu oraz własności klasyfikowanych rozmaitości;
(2) Konstrukcje przykładów;
(3) Zupełność klasyfikacji.

Zacznijmy od przypomnienia definicji rozmaitości Pfaffianowych oraz Twierdzenia strukturalnego Waltera. Przypomnijmy, że rozmaitość $X \subset \mathbb{P}^n$ nazywamy podkanoniczną jeżeli snop dualizujący $\omega_X = \mathscr{O}_X(kH)$, dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Ponadto mamy następującą definicję:

Definicja 10. *Rozmaitość kowymiaru 3 X w przestrzeni rzutowej nazywamy Pfaffianową, jeżeli opisana jest jako zbiór degeneracji $X = D_{2r-1}(\phi)$, gdzie $\phi : E^\vee \to E(t)$ jest odwzorowaniem liniowym anty-symetrycznym pomiędzy wiązką E rangi $2r+1$ oraz jej wiązką dualną skręconą a $t \in \mathbb{Z}$. Piszemy wtedy $X = Pf(\phi)$.*

Twierdzenie Waltera mówi:

Twierdzenie 11 (Walter [158])**.** *Jeżeli X jest rozmaitością podkanoniczną kowymiaru 3 w $\mathbb{P}^{N+3}$ oraz $N \in \mathbb{N}$ jest liczbą naturalną niepodzielną przez 4, to X jest rozmaitością Pfaffianową.*

Ponieważ rozmaitości Calabi–Yau są podkanoniczne, to dzięki twierdzeniu Waltera, klasyfikacja trzy-rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ sprowadza się do klasyfikacji wiązek wektorowych, posiadających określone cechy. Zwróćmy uwagę, że zastępując E przez jej skręcenie, w przypadku rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$, wystarczy rozważać $t = 1$ zgodnie z oznaczeniami definicji10. Zanim przejdziemy do naszych wyników przypomnijmy w następującej tabeli znane konstrukcje rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ przez podanie odpowiadających im wiązek wektorowych.

d	E
12	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6} \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$
13	$4\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$
14	$7\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}$ or $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$
15	$\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}$
16	$\ker(\psi)$, gdzie $\psi\colon 13\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6} \to 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ jest ogólnym odwzorowaniem
17	$\ker(\psi)$, gdzie $\psi\colon 16\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6} \to 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ jest jednym z trzech rodzajów odwzorowań podanych w [151]

Tabela 4: Wiązki wektorowe stowarzyszone z trzy-rozmaitościami Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$

Ogólne wyniki

Zacznijmy od przedstawienia naszych ogólnych wyników dotyczących własności rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$, a także teorii bilinkage w kowymiarze 3.

Skończoność. Nasze rozważania nad trzy-rozmaitościami Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ zaczynamy od obserwacji podstawowych ich własności. Następujący wynik jest wnioskiem z klasyfikacji Fujity trzy-rozmaitości nie liniowo normalnych w $\mathbb{P}^6$.

Propozycja 12 ([H4]). *Niech $X \subset \mathbb{P}^6$ będzie trzy-rozmaitością Calabi–Yau. Wtedy X jest liniowo normalne tzn. naturalna restrykcja $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)) \to H^0(\mathscr{O}_X(1))$ jest surjektywna.*

Następnie pokazujemy, że jest skończenie wiele rodzin rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. Do tego zauważamy najpierw, że wielomian Hilberta (X, H), gdzie X jest zawężeniem hiperpłaszczyzny z $\mathbb{P}^6$, wyznaczony jest przez liczby $d = H^3$ oraz $H \cdot c_2(X)$. Liczby te z kolei wyznaczone są przez stopień d oraz wymiar $h^0(\mathscr{O}_X(H))$ przestrzeni rozpiętej przez X. By udowodnić skończoność liczby rodzin wystarczy zatem ograniczyć stopień rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$.

Propozycja 13 ([H4]). *Stopień d trzy-rozmaitości Calabi–Yau $X \subset \mathbb{P}^6$, która nie jest zawarta w hiperpłaszczyźnie, jest ograniczony pomiędzy $11 \leq d \leq 42$.*

Dowód opiera się na twierdzeniu Riemanna–Rocha oraz nierówności Bogomolova–Miyaoki–Yau.

Zwróćmy uwagę, że rozmaitości Calabi–Yau , które są zawarte w $\mathbb{P}^5$ zostały sklasyfikowane w [6] i są zawsze pełnymi przecięciami.

Rodziny deformacyjne i ich wymiary. Jako, że badamy deformacyjne rodziny trzy-rozmaitości Calabi–Yau istotne jest zrozumienie relacji pomiędzy opisem Pfaffianowym a deformacjami. Rozważmy zatem możliwe płaskie deformacje rozmaitości Pfaffianowej $X = Pf(E, \phi) \subset \mathbb{P}^6$ dla pewnej wiązki wektorowej E na $\mathbb{P}^6$ oraz sekcji $\varphi \in H^0(\bigwedge^2 E(1))$, zadającej morfizm antysymetryczny $\tilde{\varphi} : E^{\vee}(-1) \to E$. Otrzymujemy płaską rodzinę, zachowując wiązkę, a zmieniając sekcję w otwartym podzbiorze (tak by wymiar miejsca degeneracji się zachował). Przy dodatkowych założeniach na temat wiązki możemy również policzyć wymiar otrzymanej rodziny deformacyjnej rozmaitości. W niniejszej rozprawie interesują nas wiązki otrzymane jako jądro $\ker(k\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to l\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ odwzorowania zadanego przez macierz form liniowych.

Propozycja 14 ([HP3]). *Wymiar rodziny spolaryzowanych Pfaffianowych rozmaitości Calabi–Yau stowarzyszonych z wiązką $E = \ker(k\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to l\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$, dla $k, l \in \mathbb{N}$ wynosi $h^0(\bigwedge^2 E(1)) - \dim \operatorname{Hom}(E, E)$.*

Rodziny stowarzyszone z jedną wiązką nie są ogólnie lokalnie pełnymi rodzinami rozmaitości, czyli nie wypełniają otwartego podzbioru w przestrzeni moduli spolaryzowanych rozmaitości. W szczególności można często rozszerzyć takie rodziny przez ruszanie wiązki. Najprostszy sposób opisany jest następującym lematem.

Lemat 15 ([HP3]). *Niech $\mathscr{E}$ będzie wiązką wektorową na $\mathbb{P}^n \times U$ dla pewnej gładkiej rozmaitości afinicznej U. Rozważmy dla każdego $x \in U$ wiązkę zawężoną $\mathscr{E}|_{\mathbb{P}^n \times \{x\}}$ i oznaczmy ją $\mathscr{E}_x$. Załóżmy, że dla pewnego podzbioru otwartego $V \subset H^0((\bigwedge^2 \mathscr{E})(1))$ każda sekcja $s \in V$ zawężona do każdego włókna $s|_{\mathbb{P}^n \times \{x\}}$ definiuje rozmaitość Pfaffianową (czyli kowymiaru 3). Wtedy rodzina rozmaitości Pfaffianowych w $\mathbb{P}^n$, zdefiniowanych przez restrykcje sekcji parametryzowanych przez $V \times U$, jest płaska.*

W tym przypadku mamy następujący rachunek wymiarów.

Wniosek 16 ([HP3]). *Niech U będzie rozmaitością afiniczną oraz niech $\pi : \mathbb{P}^n \times U \to U$ będziemy rzutowaniem na drugą współrzędną. Niech $\mathscr{E} = \ker(k\pi^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \to l\pi^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)))$, dla $k, l \in \mathbb{N}$ będzie rodziną stabilnych wiązek wektorowych, czyli $\mathscr{E}|_{\mathbb{P}^n \times \{x\}}$ jest stabilna dla wszystkich $x \in U$. Przypuśćmy, że $V = H^0((\bigwedge^2 \mathscr{E})(1))$ spełnia założenia Lematu 15. Przypuśćmy ponadto, że rodzina $\mathscr{F}$, skonstruowana za pomocą Lematu 15, jest rodziną trzy-rozmaitości Calabi–Yau. Wtedy wymiar $dim(\mathscr{F})$ obrazu rodziny $\mathscr{F}$ w uniwersalnej przestrzeni deformacji każdego ze swoich włókien (lub równoważnie rząd odwzorowania Kodairy–Spencera) liczymy następująco:*

$$dim(\mathscr{F}) = dim(\mathscr{E}) + \dim(\mathbb{P}(H^0((\bigwedge^2 \mathscr{E})(1)))),$$

gdzie $dim(\mathscr{E})$ jest wymiarem rodziny $\mathscr{E}$ w przestrzeni moduli wiązek stabilnych.

Rozważamy również następujące rodziny deformacyjne. Niech E, F będą wiązkami na $\mathbb{P}^6$, które tworzą ciąg dokładny:

$$0 \to E \to F \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1) \to 0. \tag{1}$$

Rozważmy ciąg dokładny ich potęg zewnętrznych skręconych o $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$

$$0 \to (\bigwedge^2 E)(1) \to (\bigwedge^2 F)(1) \to E(2) \to 0, \tag{2}$$

oraz stowarzyszony ciąg kohomologii

$$0 \to H^0((\bigwedge^2 E)(1)) \xrightarrow{\eta} H^0((\bigwedge^2 F)(1)) \xrightarrow{\pi} H^0(E(2)) \xrightarrow{\delta} H^1((\bigwedge^2 E)(1)). \tag{3}$$

Załóżmy, że odwzorowanie π jest suriektywne oraz, że Pfaffianowe rozmaitości Calabi–Yau $X_{s,E}$ and $X_{s',F}$ stowarzyszone z ogólnymi sekcjami $s \in H^0((\bigwedge^2 E)(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1))$ oraz $s' \in H^0((\bigwedge^2 F)(1))$, są nierozkładalne i kowymiaru 3, będącego kowymiarem oczekiwanym.

Propozycja 17 ([H4]). *Przy powyższych założeniach dla ogólnej sekcji $s \in H^0((\bigwedge^2(E \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)))(1))$ istnieje rodzina sekcji $s'_\lambda \in H^0((\bigwedge^2 F)(1))$ sparametryzowana przez $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ taka, że rodzina*

$$X_\lambda = \begin{cases} \mathrm{Pf}(s'_\lambda, F) & \text{for } \lambda \neq 0 \\ \mathrm{Pf}(s, E \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)) & \text{for } \lambda = 0 \end{cases},$$

jest płaską rodziną rozmaitości w $\mathbb{P}^6$.

W ten sposób, opierając się na ciągu Eulera dla $\mathbb{P}^6$, otrzymujemy degenerację klasycznej rodziny Rødlanda Pfaffianowych trzy-rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 w $\mathbb{P}^6$ do gładkich trzy-rozmaitości Calabi–Yau stowarzyszonych z wiązką $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$. Zwróćmy uwagę, że ta zaskakująca degeneracja pełniła główną rolę w pracy [80].

Powyższe konstrukcje mają również zastosowanie gdy zamienimy $\mathbb{P}^6$ przez inną gładką rozmaitość oraz wiązkę $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ w ciągu (1) przez inną wiązkę wektorową. W szczególności w pracy [HP1] stosujemy ten sam argument, opierając się na uniwersalnym ciągu dokładnym dla Grassmannianu $G(2,5)$ do konstrukcji degeneracji rozmaitości z rodziny $\mathscr{X}_{25}$ do gładkich rozmaitości, które są zerami sekcji wiązki rangi 3 na Grassmannianie.

Biliaison w kowymiarze 3. Z myślą o zastosowaniu do badania rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ zgłębiamy również teorię biliaison rozmaitości Pfaffianowych w pełnych przecięciach. Takie rozważania mają swoją wartość niezależną od teorii rozmaitości Calabi–Yau jako, że teoria biliaison ma swoje wyrobione miejsce w geometrii algebraicznej (zob. książkę [103] i referencje w niej zawarte), a w kowymiarze trzy nie jest jeszcze dostatecznie zbadane. Zacznijmy od definicji

Definicja 18. *Niech $X \subset \mathbb{P}^n$ będzie podrozmaitością wymiaru k. Niech Y będzie pełnym przecięciem wymiaru $k+1$ zawierającym X. Jeżeli Z jest podrozmaitością w $\mathbb{P}^n$ taką, że $X \cup Z$ jest pełnym przecięciem Y z hiperpowierzchnią stopnia l, mówimy, że Z oraz X połączone są przez linkage w pełnym przecięciu Y. Jeżeli dla X oraz Z istnieje T, które jest połączone z X oraz Z przez linkage mówimy, że X oraz Z są połączone przez bilinkage.*

Korzystając z [67] wiemy, że pojęcie bilinkage w pełnym przecięciu jest równoważne pojęciu biliaison. Dokładniej, mówimy, że X oraz Z połączone są przez biliaison, jeżeli istnieje pełne przecięcie Y zawierające X i Z, oraz liczba całkowita $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $|X| = |Z + kH|$, gdzie H jest klasą hiperpłaskiego cięcia na Y. Metoda linkage oraz bilinkage jest obecnie powszechnie wykorzystywana w geometrii algebraicznej do konstrukcji rozmaitości różnych wymiarów i kowymiarów o zadanych własnościach. Nasze studium trzy-rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ używając bilinkage jest pierwszą próbą zastosowania tej teorii do szerszego badania rozmaitości Calabi–Yau. Przedstawmy poniżej wyniki otrzymane w pracy [H3] dotyczące teorii bilinkage w kowymiarze 3.

Niech $X \subset \mathbb{P}^N$ będzie rozmaitością Pfaffianową zdefiniowaną przez sekcję $\varphi \in H^0(\bigwedge^2 E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t))$, gdzie E jest wiązką wektorową rangi $2r+1$ oraz $t \in \mathbb{Z}$. Niech $s = c_1(E) + rt$. Rozważamy rezolwentę Pfaffianową

$$0 \to \mathcal{O}_X(-2s-t) \to E^*(-s-t) \xrightarrow{\varphi} E(-s) \xrightarrow{\psi} \mathcal{I}_X \to 0.$$

Odwzorowanie φ jest tu utożsamiane z sekcją

$$\varphi \in H^0(\mathbb{P}^N, \bigwedge^2 E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(t)),$$

natomiast ψ jest odwzorowaniem

$$E(-s) \to \mathcal{I}_X = \mathrm{Im}(\psi) \subset \bigwedge^{2r+1} E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(rt-s) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n},$$

zdefiniowanym za pomocą iloczynu zewnętrznego

$$\frac{1}{r!}(\varphi \wedge \varphi \wedge \cdots \wedge \varphi) \in H^0(\mathbb{P}^N, \bigwedge^{2r} E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(rt)).$$

Założenie 1. *Załóżmy, że E jest otrzymana jako jądro odwzorowania pomiędzy wiązkami rozkładalnymi.*

Zakładając 1 zauważamy, że każda hiperpowierzchnia stopnia d zawierająca X opisana jest Pfaffianem sekcji wiązki $\bigwedge^2(E \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d-s-t)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(t)$ rangi $2r+2$. Następujący lemat opisuje wynik bilinkage rozmaitości Pfaffianowej przy naszych założeniach.

Lemat 19 ([H3])**.** *Niech X, E, r, s, φ będą jak wyżej (w szczególności E spełnia założenie 1). Załóżmy, że X zawarte jest w dwóch hiperpowierzchniach H_{d_1} oraz H_{d_2} stopni odpowiednio d_1, d_2. Niech $\mathbf{s}_i$ będzie sekcją $H^0(E(d_i - s))$, odpowiadającą H_{d_i} dla $i = 1, 2$. W takim wypadku $H_{d_1} \cap H_{d_2}$ jest pełnym przecięciem kowymiaru 2 wtedy i tylko wtedy, gdy sekcja $(\varphi, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{l})$ w rozkładzie*

$$H^0(\bigwedge^2(E \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(d_1-s-t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(d_2-s-t))(t)) =$$
$$H^0(\bigwedge^2 E(t)) \oplus H^0(E(d_1-s)) \oplus H^0(E(d_2-s)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(d_1+d_2-2s-t))$$

zadaje rozmaitość Pfaffianową kowymiaru 3, dla ogólnych $\mathbf{l} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(d_1+d_2-2s-t))$. Ponadto jeżeli Y jest rozmaitością Pfaffianową zdefiniowaną przez sekcję $(\varphi, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{l})$, *wtedy Y jest połączone z X przez bilinkage w pełnym przecięciu hiperpowierzchni H_{d_1} oraz H_{d_2}.*

Konstrukcje rozmaitości kowymiaru 3

Kolejnym etapem klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ są konstrukcje przykładów. Poniżej omawiamy nasze konstrukcje z prac [HP3, H3].

Rekonstrukcje przykładów Tonoliego. Przypomnijmy, że w pracy [151] Tonoli skonstruował nowe ciekawe przykłady Pfaffianowych trzy-rozmaitości Calabi–Yau o liczbie Picarda 1. Przykłady te są słabo zbadane pomimo, że wzbudzają zainteresowanie ekspertów jako rozmaitości, których niezmienniki nie znajdują się na liście [153]. Głównym problemem w ich badaniu jest zawiłość ich konstrukcji. W [HP3] próbujemy naprawić ten problem, znajdując proste alternatywne konstrukcje rozmaitości Tonoliego, dzięki którym rozmaitości te stają się bardziej dostępne. W konstrukcji Tonoliego (z [151]) wiązki, odpowiadające trzy-rozmaitościom Calabi–Yau stopnia 17 w $\mathbb{P}^6$, są opisane jako jądra specjalnych odwzorowań $\psi : 16\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6} \to 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$. Charakteryzacja tych specjalnych odwzorowań podana jest w terminach przestrzeni rozpiętej przez kolumny macierzy form liniowych zadającej ψ w 21 wymiarowej przestrzeni trójek form liniowych na $\mathbb{P}^6$. Urzutowienie tej przestrzeni zawiera w szczególności naturalny iloczyn Segre $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^6$. Nasza charakteryzacja również używa powyższego opisu, przy czym przedstawia jak konstruować explicite takie wiązki. Dowodzimy mianowicie, że E jest wiązką zadającą rozmaitość Tonoliego stopnia 17, jeżeli odpowiadająca jej przestrzeń rzutowa $\mathbb{P}^{15}$ rozpięta przez kolumny ψ przecina iloczyn Segre $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^6$ w rozmaitości zawierającej jedno z następujących:

(1) wykres liniowego zanurzenia $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^6$;
(2) wykres podwójnego zanurzenia Veronese $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^6$;
(3) domknięcie wykresu odwzorowania biwymiernego $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^6$ zdefiniowanego przez system kubik przechodzących przez punkt.

Powyższe trzy rodziny odtwarzają wszystkie trzy rodziny rozmaitości stopnia 17 Tonoliego z [151] odpowiadające w notacji Tonoliego $k = 11, 9, 8$. Liczymy ponadto, używając Wniosku 16, wymiar tych rodzin i poprawiamy wyniki Tonoliego w przypadku $k = 11$. W szczególności przypadek Tonoliego stopnia 17 z $k = 11$ okazuje się jedynym znanym przypadkiem rozmaitości Pfaffianowej, której liczba Picarda jest wyższa niż 1.

Rekonstrukcje za pomocą bilinkage. W pracy [HP3] interpretujemy również znane konstrukcje rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ za pomocą bilinkage. Wprowadzamy w tym celu następującą konstrukcję:

Definicja 20 ([HP3])**.** *Jeżeli zachodzi*

$$\mathbb{P}^n \supset F \rightrightarrows X' \rightsquigarrow X \subset \mathbb{P}^n,$$

gdzie $F \rightrightarrows X'$ oznacza, że F oraz X' są połączone przez bilinkage natomiast $X' \rightsquigarrow X$ oznacza, że X' jest degeneracją X, wtedy mówimy, że X powstaje z F przez konstrukcję bilinkage.

Zauważmy, że w przypadku kowymiaru 3 powyższa definicja jest uogólnieniem definicji geometrycznego przejścia opartego na odrzutowaniu. Mianowicie w [H2] dowodzimy, że jeżeli $X \subset \mathbb{P}^6$ jest wygładzeniem odrzutowania $D \subset \mathbb{P}^5$ w pełnym przecięciu $Y \subset \mathbb{P}^5$, wtedy jest również wygładzeniem rozmaitości otrzymanej przez bilinkage ze stożka nad D w stożku nad Y w $\mathbb{P}^6$.

Otrzymujemy następujący wynik wykorzystujący Definicję 20.

Propozycja 21 ([HP3])**.** *Dla $d \leq 7$ każda gładka del Pezzo trzy-rozmaitość T_d stopnia d w $\mathbb{P}^6$ jest połączona konstrukcją bilinkage z definicji 20 z gładką trzy-rozmaitością Calabi–Yau stopnia $d + 9$ w $\mathbb{P}^6$.*

Dla $d = 8$ sytuacja jest bardziej delikatna.

Propozycja 22 ([HP3]). *Niech T_9 będzie trzy-rozmaitością del Pezzo stopnia 9 w $\mathbb{P}^9$. Istnieje wtedy takie rzutowanie $T_9 \to \mathbb{P}^6$, które jest połączone przez bilinkage w pełnym przecięciu dwóch kubik w $\mathbb{P}^6$ z trzy-rozmaitością Calabi–Yau Gorensteina (niekoniecznie normalną) X' stopnia 17. Ponadto, można tak wybrać X' żeby miało wygładzenie rozmaitości Calabi–Yau Tonoliego z $k = 9$.*

Powierzchnia kanoniczna stopnia 18 w $\mathbb{P}^5$. Głównym osiągnięciem naszych badań nad rozmaitościami Pfaffianowymi za pomocą metody bilinkage jest konstrukcja w [H3] powierzchni ogólnego typu S takiej, że $p_g = H^0(S, K_S) = 6$ oraz, że K_S jest bardzo szeroka stopnia $K_S^2 = 18$. Jest to pierwsza taka powierzchnia, którą się udało skonstruować. Jest to również kolejny krok w kierunku klasyfikacji wszystkich powierzchni kanonicznych w $\mathbb{P}^5$, problemu, który zajmuje klasycznych geometrów algebraicznych (zob. [31, 32, 33]).

Nasza konstrukcja opiera się na bilinkage z powierzchnią del Pezzo stopnia 9 zanurzoną w $\mathbb{P}^5$ za pomocą systemu anty-kanonicznego. Bilinkage w takim wypadku musi zostać przeprowadzony w dwóch pełnym przecięciu dwóch kubik. W przypadku ogólnego zanurzenia w $\mathbb{P}^5$ nie ma jednak wystarczającej przestrzeni kubik w ideale rozważanej powierzchni del Pezzo. Potrzebuje zatem rozważać rodzinę specjalnych zanurzeń.

Propozycja 23 ([H3]). *Niech $D_9 \subset \mathbb{P}^9$ będzie obrazem potrójnego zanurzenia Veronese $\mathbb{P}^2$. Istnieje wtedy 3 wymiarowa przestrzeń liniowa $\Lambda \subset \mathbb{P}^9$ definiująca rzutowanie $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^9 \to \mathbb{P}^5$ takie, że zachodzą następujące stwierdzenia:*

(1) odwzorowanie zawężone $\pi_\Lambda|_{D_9}$ jest dobrze zdefiniowanym morfizmem, który jest izomorfizmem na obraz;
(2) powierzchnia $D_9^\Lambda = \pi_\Lambda(D_9)$ jest zawarta w pełnym przecięciu Y_Λ dwóch hiperpowierzchni stopnia 3;
(3) osobliwości Y_Λ składają się z 60 izolowanych punktów.

Szukanie specjalnych rzutowań powierzchni Veronese wpisuje się w klasyczne rozważania geometrii algebraicznej oraz ma związek z teorią schematów skończonych wygładzalnych na przestrzeni rzutowej. Jest to temat, który kontynuujemy wspólnie z G. Kapustką i J. Jelisiejewem.

Gdy wybierzemy ogólne Λ takie jak w Propozycji 23, możemy przeprowadzić bilinkage w Y_Λ. Otrzymujemy:

Twierdzenie 24 ([H3]). *Powierzchnia D_9^Λ jest połączona przez bilinkage w Y_Λ z gładką powierzchnią kanoniczną S_0 stopnia*18.

Dowodzi to w szczególności, że przestrzeń moduli powierzchni ogólnego typu z $p_g = 6$ i stopnia 18 jest niepusta oraz, że dywizor kanoniczny ogólnej takiej powierzchni jest bardzo szeroki. Otrzymana w ten sposób rodzina nie wypełnia jednak całej przestrzeni moduli, mimo to sama niepustość rodziny dowodzi istnienie 36 wymiarowej rodziny takich powierzchni.

Częściowa klasyfikacja rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$

Poniżej zbieramy otrzymane wyniki dotyczące klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ zawarte w pracach [H4, HP3]. Rozważamy rozmaitości, które nie są zawarte w hiperpłaszczyźnie.

Klasyfikacja w kwadrykach. Głównym technicznym twierdzeniem pracy [H4] jest następujący wynik.

Twierdzenie 25 ([H4]). *Stopień rozmaitości Calabi–Yau $X \subset Q \subset \mathbb{P}^6$ gdzie Q jest hiperpowierzchnią stopnia 2 wynosi* 12, 13 *lub* 14.

W szczególności dowodzimy, że nie ma trzy-rozmaitości Calabi–Yau stopnia 11 w $\mathbb{P}^6$. Dalej, badamy możliwe rangi kwadryk zawierających rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$.

Propozycja 26 ([H4]). *Jeżeli Q jest kwadryką zawierającą rozmaitość Calabi–Yau wtedy* $\operatorname{rk}(Q) \geq 5$. *Ponadto gładka kwadryka (i.e., czyli rangi 7) nie może zawierać trzy-rozmaitości Calabi–Yau stopnia* 13.

Prowadzi nas to do pełnej klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau zawartych w pięciowymiarowej kwadryce.

Twierdzenie 27 ([H4]). *Niech $X \subset \mathbb{P}^6$ będzie trzy-rozmaitością Calabi–Yau taką, że istnieje kwadryka Q, która ją zawiera. Wtedy Xjest albo pełnym przecięciem dwóch kwadryk i kubiki albo jest rozmaitością Pfaffianową stowarzyszoną z sekcją wiązki $\bigwedge^2 E(1)$ gdzie E jest izomorficzna z $4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ lub $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$. Trzy możliwości odpowiadają stopniu X będącemu 12, 13 oraz 14 odpowiednio.*

Badamy dalej geometrię rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 w kwadryce i otrzymujemy ich opis jako zero sekcji skręconej wiązki Cayleya (słynnej rodziny nierozkładalnych wiązek, zob [126]) na gładkiej kwadryce wymiaru 5. Z tego punktu widzenia są to bardzo naturalne obiekty do badania. W szczególności, są to jedyne gładkie trzy-rozmaitości Calabi–Yau zawarte w gładkiej kwadryce.

Klasyfikacja do stopnia 14. Otrzymujemy również klasyfikację wszystkich rozmaitości Calabi–Yau stopnia co najwyżej 14 w $\mathbb{P}^6$. Mianowicie mamy trzy możliwe stopnie 12, 13 oraz 14, dla których mamy następujące przypadki.

Propozycja 28 ([H4]). *Każda trzy-rozmaitość Calabi–Yau stopnia* 12 *w* $\mathbb{P}^6$ *jest pełnym przecięciem dwóch kwadryk i kubiki. Każda trzy-rozmaitość Calabi–Yau stopnia* 12 *w* $\mathbb{P}^6$ *jest zadana przez zerowanie się* 4×4 *Pfaffianów skośnie symetrycznej macierzy* 5×5 *form liniowych poza jednym rzędem i kolumną wielomianów stopnia 2.*

Dla stopnia 14 mamy:

Twierdzenie 29 ([H4]). *Jeżeli $X \subset \mathbb{P}^6$jest rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 w $\mathbb{P}^6$, to X jest rozmaitością Pfaffianową stowarzyszoną z sekcją $\bigwedge^2 E(1)$, gdzie E jest izomorficzne z $7\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}$ lub $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$.*

W pracy [H4] podajemy również pełną klasyfikację trzy-rozmaitości Calabi–Yau tzw. quasi-Buchsbauma, czyli takich które mają prosty moduł Hartshorne'a–Rao. Oprócz wszystkich powyższych dochodzi do niej rodzina rozmaitości stopnia 15 stowarzyszonych z wiązką $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}$.

Klasyfikacja deformacyjna do stopnia 14. Klasyfikację do stopnia 14 uzupełniamy o klasyfikację z dokładnością do deformacji. Propozycja 17 implikuje, że każda trzy-rozmaitość Calabi–Yau stopnia 14 skonstruowana w [18] jako rozmaitość Pfaffianowa stowarzyszona z wiązką $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ jest gładką degeneracją rodziny trzy-rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 skonstruowanych przez Rødlanda (odpowiadających wiązce $7\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}$). W szczególności, inaczej niż w przypadku pełnych przecięć, w przypadku Pfaffianów najmniejszy stopień generatora ideału może się zmieniać w rodzinach deformacyjnych trzy-rozmaitości Calabi–Yau.

Wniosek 30 ([H4]). *Dla każdego $d \leq 14$ istnieje dokładnie jedna rodzina trzy-rozmaitości Calabi–Yau stopnia d w $\mathbb{P}^6$.*

Program pełnej klasyfikacji

Kończymy nasze rozważania trzy-rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ przedstawiając program pełnej ich klasyfikacji zarysowany w pracy [HP3]. Opiera się on na zaobserwowanej analogii pomiędzy znanymi opisami trzy-rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ oraz opisami powierzchni del Pezzo w $\mathbb{P}^5$. Dokładniej, znajdujemy następujący opis powierzchni del Pezzo zanurzonych przez podsystem systemu kanonicznego w $\mathbb{P}^5$ za pomocą Pfaffianów wiązek i zauważamy kompletną analogię ze znanymi opisami trzy-rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$.

stopień	wiązka stowarzyszona z powierzchnią del Pezzo $\mathbb{P}^5$
3	$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-1) \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}$
4	$2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(1)$
5	$5\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}$
6	$\Omega^1_{\mathbb{P}^5}(1) \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}$
7	$\ker(\psi)$, gdzie $\psi\colon 11\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5} \to 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(1)$ jest ogólnym odwzorowaniem
8	$\ker(\psi)$, gdzie $\psi\colon 14\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5} \to 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(1)$ jest specjalnym odwzorowaniem
9	$\ker(\psi)$, gdzie $\psi\colon 17\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5} \to 4\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(1)$ jest bardzo specjalnym odwzorowaniem

Analogia jest opisana przez następujące twierdzenie.

Twierdzenie 31 ([HP3]). *Niech $X \subset \mathbb{P}^6$ będzie ogólnym elementem rodziny Pfaffianowych trzy-rozmaitości Calabi–Yau Tonoliego i niech E_d będzie odpowiadającą mu wiązką. Istnieje wtedy odwzorowanie $E_d \to 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^6}$ takie, że jego jądro F zawężone do dowolnej $\mathbb{P}^5$ definiuje przez Pfaffian powierzchnię del Pezzo stopnia* $\deg(X) - 9$. *Odwrotnie, dla ogólnej powierzchni del Pezzo $D \subset \mathbb{P}^5$ ze stowarzyszoną wiązką E_D istnieje rozszerzenie E'_D wiązki E_D do $\mathbb{P}^6$, takie, że ogólna wiązka $F \in \mathrm{Ext}^1(E'_D, 2\mathscr{O})$ definiuje przez Pfaffian trzy-rozmaitości Calabi–Yau stopnia* $\deg(D) + 9$ *w $\mathbb{P}^6$.*

Również skonstruowana przez nas rodzina powierzchni stopnia 18 w $\mathbb{P}^5$ jest ściśle stowarzyszona z powierzchnią del Pezzo stopnia 9 w $\mathbb{P}^5$. Jako wniosek z powyższych obserwacji formułujemy następującą hipotezę:

Hipoteza 1 ([HP3]). *Jeżeli X jest rozmaitością Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$, to jej stopień $d_X \leq 18$.*

Rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^7$

Problem klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ rozpatrywany w naszych pracach ma naturalną kontynuację do wyższych kowymiarów. Przypomnijmy, że każda gładka trzy-rozmaitość, w szczególności każda trzy-rozmaitość Calabi–Yau posiada zanurzenie w $\mathbb{P}^7$. Zanurzenie takie pochodzi jednak zazwyczaj z rzutowania zanurzenia w większą przestrzeń rzutową. W takim wypadku $\mathbb{P}^7$ nie może zostać uznane za naturalną przestrzeń otaczającą dla naszej rozmaitości. Dobrym sposobem na sformalizowanie własności (ważonej) przestrzeni rzutowej do bycia naturalna przestrzenią otaczającą dla swojej podrozmaitości jest pojęcie rzutowej normalności.

Definicja 32. *Mówimy, że $X \subset \mathbb{P}^n$ jest rzutowo normalne, jeżeli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zawężenie:*
$H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) \to H^0(X, \mathscr{O}_X(k))$ *jest suriektywne.*

Pojawia się zatem naturalny problem:

Problem 33. *Sklasyfikować trzy-rozmaitości Calabi–Yau, które są rzutowo normalne w $\mathbb{P}^7$.*

Problem ma podobne motywacje do problemu klasyfikacji trzy-rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. Ponadto, oprócz dostarczania nowych niestandardowych trzy-rozmaitości Calabi–Yau problem ten wpisuje się w próby zainicjowane przez Reida (zob. [137]) znalezienia ogólnego twierdzenia strukturalnego dla rozmaitości Gorensteina kowymiaru 4. Twierdzenie takie służyłoby jako uogólnienie twierdzenia Buchsbauma–Eisenbuda w kowymiarze 3 i mogłoby potencjalnie zostać dalej uogólnione do odpowiednika twierdzenia strukturalnego Waltera.

Jako częściową odpowiedź na problem klasyfikacji, przedstawiamy hipotetycznie zupełną listę trzy-rozmaitości Calabi–Yau, które są rzutowo normalne w $\mathbb{P}^7$. Nasze metody są podobne do metod używanych przy klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. W szczególności, szacujemy możliwe stopnie za pomocą twierdzenia Riemanna–Rocha oraz nierówności Miyaoki–Yau.

Lemat 34 ([H2]). *Stopień d rzutowo normalnej rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^7$, która nie zawiera się w hiperpłaszczyźnie spełnia* $14 \leq d \leq 20$

Następnie, konstruujemy rozmaitości za pomocą metody bilinkage oraz jako zera wiązek rangi dwa na skrollach. Otrzymana lista przykładów podsumowana jest następującą tabelą.

No.	Deg.	$h^{1,1}$	$h^{1,2}$	Opis
1	14	2	86	$(2,4)$ dywizor w $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$
2	15	1	76	$G(2,5) \cap X_3 \cap \mathbb{P}^7$
3	16	1	65	$X_{2,2,2,2}$
4	17	1	55	bilinkowany na $Y_{2,2,2}$ do $\mathbb{P}^3$
5	17	2	58	2×2 minory 3×3 macierzy o stopniach wyrazów $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$
6	17	2	54	kowymiar 2 w skrollu kubicznym
7	18	1	46	bilinkowany na $Y_{2,2,3} \subset \mathbb{P}^7$ do F_1
8	18	1	45	bilinkowany na $Y_{2,2,3} \subset \mathbb{P}^7$ do F_2
9	19	2	37	bilinkowany na specjalnym Pf_{13} do F_1
10	19	2	36	bilinkowany na specjalnym Pf_{13} do F_2
11	20	2	34	3×3 minory macierzy 4×4 form liniowych w $\mathbb{P}^7$

Tabela 6. Rzutowo normalne rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^7$

W Tabeli 6 piszemy $\mathrm{Pf}_{13} \subset \mathbb{P}^7$ mając na myśli rozmaitość kowymiaru 3 zadaną przez skośną macierz form liniowych z rzędem (i kolumną) kwadryk; F_1 oznacza trójwymiarową rozmaitość del Pezzo stopnia 8 opisaną jako $D_{(1,1)} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, natomiast F_2 trójwymiarową rozmaitość del Pezzo $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Obserwacja 35. Przykłady 2, 4, 5 oraz 11 były badane w artykule [18], przykłady 4, 7 oraz 8 w pracy [86] oraz 1 w [97]. Przykłady 6, 9 i 10 są nowymi rodzinami trójwymiarowych rozmaitości Calabi–Yau.

Badamy geometrię tych przykładów opisując ich biwymierne kontrakcje i stożki Kähler'a. W celu analizy przykładu stopnia 19 używamy odwzorowania Cremony zdefiniowanego przez kwadryki zawierające zanurzenie Segre $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ w $\mathbb{P}^8$. Pokazujemy, że powyższa tabela przedstawia pełną listę arytmetyczne Gorensteina rozmaitości Calabi–Yau w stopniach ≤ 17.

Hipoteza 2. [H2] *Powyższa tabela przedstawia pełną listę rzutowo normalnych rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^7$.*

Rozmaitości Mukai

Nasze badania dotyczące rozmaitości służą nam jako narzędzie do powyższych rozważań na temat rozmaitości Calabi–Yau, szczególnie do badania trzy-rozmaitości Calabi–Yau z listy Borcea. Badania te posiadają również swoje motywacje pochodzące z teorii rozmaitości Fano oraz K3 powierzchni. Znaczenie rozmaitości Mukai dla klasyfikacji rozmaitości Fano można podsumować przedstawioną tabelą zawierającą opisy rozmaitości Fano–Mukai genusu $g \leq 10$.

genus	Anti-canonical model of a prime Fano threefold of index 1 and given genus
2	$X_6 \subset \mathbb{P}(1^4, 3)$
3	$X_4 \subset \mathbb{P}^4$
4	$X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$
5	$X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$
6	$X_{1,1} \subset Q_2 \cap G(2,5) =: M_6^5$
7	$X_{1,1,1,1,1,1,1} \subset OG(5,10) =: M_7^{10}$
8	$X_{1,1,1,1,1} \subset G(2,6) =: M_8^8$
9	$X_{1,1,1} \subset LG(3,6) =: M_9^6$
10	$X_{1,1} \subset G_2 =: M_{10}^5$

Tabela 7: Ogólne trzy-rozmaitości Fano–Mukai genusu $g \leq 10$.

W Tabeli 7 stosujemy notację $X_{i_1,..,i_n}$ dla ogólnego pełnego przecięcia ustalonych stopni. Rozmaitość Q_2 jest ogólna hiperpowierzchnią stopnia 2. Notacja $G(2,n)$ oznacza Grassmannian prostych w $n-1$ wymiarowej przestrzeni rzutowej w swoim zanurzeniu Plückera. Rozmaitość $OG(5,10)$ jest ortogonalnym Grassmannianem. Jest to składowa zbioru podprzestrzeni liniowych wymiaru 4 zawartych w gładkiej ośmiowymiarowej kwadryce w $\mathbb{P}^9$ w zanurzeniu spinorowym. Rozmaitość $LG(3,6)$ jest Lagrange'owskim Grassmannianem, jest to specjalne linowe cięcie Grassmannianu $G(3,6)$ w zanurzeniu Plückera parametryzujące trzywymiarowe podprzestrzenie wektorowe przestrzeni sześciowymiarowej izotropiczne względem wybranej dwu-formy symplektycznej. Rozmaitość G_2 jest specjalnym linowym cięciem Grassmannianu $G(5,7)$ w zanurzeniu Plückera paramatryzującym pięciowymiarowe podprzestrzenie wektorowe przestrzeni siedmiowymiarowej izotropiczne ze względu na ustaloną ogólna cztero-formę. Notacja M_g oraz nazwa rozmaitości Mukai jest obecnie standardowa w tym kontekście. Górny index przy M_g oznacza wymiar rozmaitości Mukai i będzie pomijany.

Tabela 7 daje klasyfikację (zob. [110, 111, 102]) ogólnych rozmaitości Fano–Mukai, zwróćmy jednak uwagę, że w przypadku $g = 6$ istnieją również gładkie rozmaitości Fano które nie są zawarte w tabeli, ale pojawiają się jako degeneracje cięć rozmaitości Mukai.

Mukai udowodnił również, że jest tylko jeden dodatkowy przypadek dla rozmaitości Fano–Mukai. Są to trzy-rozmaitości Fano–Mukai genusu 12, otrzymane przez przecięcie trzech rozmaitości $Z_1, Z_2, Z_3 \subset G(3,7)$ z których każda jest otrzymana jako zbiór zer ogólnej sekcji wiązki dualnej do wiązki uniwersalnej na Grassmannianie $G(3,7)$. Zwróćmy uwagę, że rozmaitości Fano–Mukai genusu 12 nie pojawiają się jako cięcia liniowe jednej wspólnej gładkiej rozmaitości. De facto żadna z nich nie jest hiperpłaskim cięciem żadnej gładkiej rozmaitości.

Otrzymane przez nas wyniki dotyczące rozmaitości Mukai dzielimy na pięć części:

(1) badanie zależności pomiędzy rozmaitościami Mukai;
(2) realizowanie Fourier–Mukai dualnych par rozmaitości;
(3) zrozumienie geometrii najbardziej tajemniczej rozmaitości Mukai M_{10};
(4) zastosowanie do badania rozmaitości Calabi–Yau z listy Borcea;
(5) konstrukcja tzw. kluczowych rozmaitości do klasyfikacji powierzchni K3.

Większość naszych badań w tej części rozprawy dotyczy badania geometrii rozmaitości Mukai oraz zależności pomiędzy nimi. Zacznijmy od omówienia tych rezultatów, następnie przejdziemy do opisania głównych zastosowań.

Relacje pomiędzy rozmaitościami Mukai

Naszym głównym wynikiem dotyczącym rozmaitości Mukai w ogólności jest dowód hipotezy Ilieva i Ranestada oraz jej konsekwencje geometryczne. Dowód hipotezy w pełnej ogólności zawiera się w pracy [HP2]. Dokładniej, dla g spełniającego $7 \leq g \leq 10$, niech M_g będzie rozmaitością Mukai genusu g wprowadzoną powyżej. Zauważamy, że gdy $g \neq 8$ rozmaitość M_g dopuszcza hiperpłaskie cięcie osobliwe w jedynym punkcie podwójnym. Natomiast gdy $g = 8$, cięciem liniowym maksymalnego wymiaru, które posiada zwykły punkt podwójny jako osobliwość (tzw. node) jest cięciem kowymiaru 5. Dla każdego g wybieramy takie nodalne liniowe cięcie L_g oraz oznaczamy punkt osobliwy przez p_{L_g}.

Twierdzenie 36 ([HP2])**.** *Dla $7 \leq g \leq 10$ rzut rozmaitości L_g z punktu p_{L_g} jest pełnym cięciem liniowym rozmaitości M_{g-1} posiadającym gładką kwadrykę jako Weil dywizor. Odwrotnie, jeżeli L jest ogólnym cięciem liniowym rozmaitości M_{g-1} zawierającym gładką kwadrykę maksymalnego wymiaru w M_{g-1} jako Weil dywizor, to L powstaje jako rzut osobliwego jedno nodalnego cięcia liniowego rozmaitości M_g ze swojego jedynego punktu osobliwego.*

Dowód twierdzenia opiera się na teorii reprezentacji oraz analizie równań badanych rozmaitości w naturalnych współrzędnych wyznaczonych przez reprezentacje. Przypomnijmy, że dowód przypadku $g = 9$ jest przedmiotem pracy [76]. Przypadek ten dowodzimy również naszą alternatywną metodą.

Jako bezpośrednie zastosowanie Twierdzenia 36 otrzymujemy transformacje łączące rodziny trzy-rozmaitości Fano–Mukai analogiczne do dwuprzejść geometrycznych opartych na odrzutowaniach. Opisujemy w szczególności opis wszystkich osobliwości biorących udział w takim przejściu.

Propozycja 37 ([HP2])**.** *Niech F_g będzie trójwymiarową rozmaitością Fano powstającą jako pełne cięcie liniowe M_g oraz posiadającą prosty punkt podwójny p jako jedyną osobliwość. Wtedy osobliwości rzutów $\hat{F}_{g-1}$ rozmaitości F_g z punktu p są również prostymi punktami podwójnymi. Ponadto dla $g = 7, 8, 9, 10$, liczba prostych punktów podwójnych na $\hat{F}_{g-1}$ jest odpowiednio $5, 4, 4, 3$.*

To znaczy, że w przypadku trzy-rozmaitości Fano–Mukai nasza konstrukcja dostarcza najprostszego rodzaju połączenia pomiędzy rozmaitościami Fano o liczbie Picarda 1. Te dwuprzejścia składają się z degeneracji do rozmaitości z jednym prostym punktem podwójnym rozwiązanie osobliwości ściągniecie pewnej liczby prostych do prostych punktów podwójnych a następnie ich wygładzenie. Takie połączenia są hipotetycznie kompatybilne z teorią modeli Landaua–Ginzburga tak jak przejścia geometryczne są kompatybilne z symetrią lustrzaną. Nasze wyniki stanowią zatem istotny krok w kierunku zrozumienia teorii modeli Landaua–Ginzburga dla rozmaitości Fano–Mukai w całej ogólności. Twierdzenie 36 ma również zastosowanie dla symetrii lustrzanej rozmaitości Calabi–Yau Borcea o czym pisaliśmy w stosownym miejscu powyżej.

Geometria rozmaitości Fano–Mukai genusu 10

Istotna część naszych badań na temat rozmaitości Fano–Mukai skupia się na rozmaitościach genusu 10. Są to najtrudniejsze do zrozumienia rozmaitości Fano–Mukai. Nasze wyniki dają głęboki wgląd w ich geometrię. W tej części dla większej jasności, rozmaitość Mukai M_{10} będziemy oznaczać G_2.

Naszym głównym wynikiem w tym kontekście jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 38 ([H5])**.** *Ogólne hiperpłaskie cięcie F rozmaitości Mukai $M_{10} = G_2$ dopuszcza jedyne liniowe zanurzenie jako liniowe cięcie Grassmannianu $G(3, 6)$.*

Twierdzenie to można interpretować jako uzupełnienie Twierdzenia 36 w przypadku $g = 10$. Razem z twierdzeniem Mukai o klasyfikacji rozmaitości Fano oznacza ono, że każda cztero-rozmaitość Fano genusu 10 oraz indeksu 2 posiada jedyne zanurzenie liniowe w $G(3, 6)$. W pracy [H5] zauważamy również, że sama rozmaitość G_2 nie posiada liniowego zanurzenia w $G(3, 6)$. Twierdzenie 36 jest w istocie najważniejszym wynikiem jaki otrzymaliśmy w kontekście rozmaitości Mukai. W szczególności ma ono bezpośrednie zastosowania w teorii przestrzeni moduli wiązek na powierzchniach K3. Mianowicie Twierdzenie 36 pozwala na geometryczną konstrukcję dualności Fourier–Mukai pomiędzy K3 powierzchnią genusu 10 oraz K3 powierzchnią genusu 2 dając geometryczną interpretację dla wyników Kuznetsova. Ponadto do dowodu tego twierdzenia potrzebujemy dogłębnie zrozumieć geometrię rozmaitości G_2 oraz jej liniowych cięć, co znacznie ułatwia pracowanie nad konstrukcjami które tę rozmaitość wykorzystują (zob. zastosowania w [95, 101]).

Dowód Twierdzenia 36 jest podzielony na dwie części. W pierwszej części konstruujemy zanurzenia, natomiast w drugiej dowodzimy jedyności. Konstrukcja zanurzeń jest robiona explicite, wykorzystując równania reprezentantów wszystkich orbit hiperpłaskich cięć ze względu na działanie grupy $\mathbb{G}_2$. Dokładniej $G_2 \subset \mathbb{P}^{13}$ jest domkniętą orbitą urzutowienia reprezentacji dołączonej do grupy Liego $\mathbb{G}_2$. Mamy zatem działanie $\mathbb{G}_2$ na przestrzeni dualnej $(\mathbb{P}^{13})^*$. Hiperpłaskie cięcia G_2 odpowiadające hiperpłaszczyznom w tej samej orbicie są oczywiście liniowo równoważne. Wystarczy zatem pokazać zanurzenie dla jednego reprezentanta każdej orbity odpowiadającej gładkim cięciom. Jest jednoparametrową rodziną takich orbit a my znajdujemy konkretne zanurzenie zależne od parametru.

Dowód jedyności w Twierdzeniu 38 opiera się na badaniu krzywych niskiego stopnia zawartych w G_2.

Propozycja 39 ([H5])**.** *Rozmaitość G_2 nie zawiera płaszczyzn ani powierzchni stopnia 2. Ponadto przez każde dwa punkty $p_1, p_2 \in G_2$ przechodzi prosta lub jedyna stożkowa zawarta w G_2.*

Niech teraz F będzie gładkim hiperpłaskim cięciem rozmaitości G_2. Głównym krokiem w dowodzie jedyności jest następująca propozycja.

Propozycja 40 ([H5])**.** *Schemat Hilberta stożkowych zawartych w F jest izomorficzny z wykresem odwzorowania Cremony $\mathbb{P}^5$ zdefiniowanego przez system liniowy kwadryk zawierających powierzchnię Veronese. Schemat Hilberta dwuwymiarowych kubicznych skrollów zawartych w F jest izomorficzny z rozłączną suma dwóch płaszczyzn rzutowych.*

Powyższe odwzorowanie Cremony jest ściśle związane z zanurzeniem F w $G(3, 6)$. Mianowicie, jeżeli F jest zanurzone w $G(3, U)$ dla pewnej przestrzeni wektorowej U wymiaru 6, wtedy każda stożkowa $C \subset F$ determinuje jedyną parę (v, V), gdzie $v \in \mathbb{P}(U)$ $V \in \mathbb{P}(U^*)$, taką że C jest zawarte w rozmaitoci flag $F(v, 3, V) \subset G(3, U)$ parametryzującej trzy-wymiarowe podprzestrzenie U które zawierają jednowymiarową podprzestrzeń v oraz są zawarte w podprzestrzeni V kowymiaru jeden. Schemat Hilberta stożkowych jest zatem zawarty naturalnie w $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(U^*)$, w szczególności dopuszcza rzutowania na $\mathbb{P}(U)$ oraz $\mathbb{P}(U^*)$. Powierzchnie kubiczne będące skrollami pokryte są przez stożkowe, które są ściągnięte przez jedno z dwóch rzutowań. Dostajemy w ten sposób opis schematu Hilberta stożkowych jako wykres odwzorowania Cremony $\mathbb{P}(U) \to \mathbb{P}(U^*)$.

Dzięki powiązaniu odwzorowania Cremony z zanurzeniem F w $G(3, 6)$ wnioskujemy w [H5], że jedyność transformacji Cremony determinuje również jedyność zanurzenia F w $G(3, 6)$.

Rozszerzamy analizę krzywych niskiego stopnia analizując schemat Hilberta prostych na F. Otrzymujemy następujący wyniki zasugerowany nam przez Hana.

Propozycja 41 ([H5]). *Schemat Hilberta prostych zawartych w F jest izomorficzny z gładkim dywizorem dwustopnia $(1, 1)$ w $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.*

Uzupełniamy również rozważania schematów Hilberta na sekcjach liniowych G_2 do trzy-rozmaitości.

Wniosek 42 ([H5]). *Schemat Hilberta stożkowych na gładkiej trzy-rozmaitości Fano–Mukai genusu 10 jest izomorficzny z Jacobianem krzywej genusu 2.*

Zauważmy, że powyższe krzywe mogą zostać użyte do konstrukcji fibracji schematu Hilberta dwóch punktów na powierzchni $K3$ genusu 10. Mianowicie jeżeli S jest ogólna powierzchnią $K3$ genusu 10, to S powstaje jako przecięcie G_2 z przestrzenią rzutową wymiaru 10. Z własności G_2 wiemy, że przez każdy schemat skończony długości 2 na S przechodzi dokładnie jedna stożkowa w G_2. Stożkowa ta rozpina wraz z powierzchnią S przestrzeń rzutową wymiaru 11, która przecina G_2 w trzy-rozmaitości Fano. Ponadto każda stożkowa w trzy-rozmaitości Fano genusu 10 w G_2 zawierającej S przecina S w schemacie długości 2. Schemat Hilberta dwóch punktów na powierzchni $K3$ genusu 10 jest zatem izomorficzny ze schematem stożkowych zawartych w pewnej trzy-rozmaitości Fano genus 10 zawierającej S. Takie rozmaitości są parametryzowane przez $\mathbb{P}^2$ i w każdej z nich schemat Hilberta stożkowych jest izomorficzny z Jacobianem krzywej genusu 2. W ten sposób otrzymujemy fibrację na schemacie Hilberta $S^{[2]}$. Jest to fibracja Lagrange'owska badana w pracach [139, 100].

Po udowodnieniu Twierdzenia 38, ciekawe jest zidentyfikowanie tych liniowych sekcji Grassmannianu $G(3, 6)$, które zadają hiperpłaskie cięcia G_2. Opis otrzymujemy używając kwadryk rangi 12 w ideale Grassmannianu $G(3, 6)$, która odkrywa fascynującą zależność pomiędzy opisem rozmaitości F w $G(3, 6)$ oraz opisem G_2 w $G(2, 7)$. Analogia ta daje nam nowe spojrzenie na słynną dualność pomiędzy $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ oraz $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nazwaną "Tom i Jerry". Dokładniej mamy następujący opis rozmaitości G_2 jako cięcie liniowe Grassmannianu $G(2, 7)$.

Propozycja 43 ([H5]). *Niech V będzie siedmiowymiarową przestrzenią wektorową. Niech Q będzie ogólną kwadryką rangi 12 zawierającą Grassmannian $G(2, V)$ w zanurzeniu Plückera. Niech $\mathscr{R}_1$ oraz $\mathscr{R}_2$ będą dwiema izomorficznymi rodzinami przestrzeni wymiaru 14 zawartych w Q. Wtedy zachodzą następujące stwierdzenia:*

- *Zbiór osobliwy Q przecina $G(2, V)$ w cztero-rozmaitości Z_{22} rzutowo równoważnej z $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$;*
- *jeżeli R jest ogólną przestrzenią wymiaru 14 z rodziny $\mathscr{R}_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2\}$, wtedy $R \cap G(2, V)$ rozkłada się na $G \cup Z_{22}$, gdzie G jest izomorficzne z G_2, lub jest pięcio-rozmaitością stopnia 24 zawierającą Z_{22}.*

Podobne twierdzenie zachodzi dla zanurzenia F w $G(3,6)$.

Propozycja 44 ([H5]). *Niech V będzie szeciowymiarową przestrzenią wektorową. Niech Q będzie ogólną kwadryką rangi 12 zawierającą Grassmannian $G(3,U)$ w zanurzeniu Plückera. Niech $\mathscr{R}_1$ oraz $\mathscr{R}_2$ będą dwiema izomorficznymi rodzinami przestrzeni wymiaru 13 zawartych w Q. Wtedy zachodzą następujące stwierdzenia:*

- *Zbiór osobliwy Q przecina $G(3,U)$ w cztero-rozmaitości Σ_{111} rzutowo równoważnej z $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;*
- *jeżeli R jest ogólną przestrzenią wymiaru 14 z rodziny $\mathscr{R}_i$ dla pewnego $i \in \{1,2\}$, wtedy $R \cap G(3,U)$ rozkłada się na $F \cup \Sigma_{111}$, gdzie F jest izomorficzne z gładką rozmaitością Fano–Mukai wymiaru 4 indeksu 2 oraz genusu 10, lub jest czterowymiarową rozmaitością stopnia 24 zawierającą Σ_{111}.*

Ponadto każda rozmaitość Fano Mukai genusu 10 powstaje w wyniku takiej konstrukcji.

Rozmaitości stopnia 24 oraz F w $G(3,6)$ są bardzo ciekawe z punktu widzenia kongruencji liniowych i są przedmiotem dalszych badań w pracy [43].

Powodem dla którego korzystamy z kwadryk rzędu 12 jest to, że w obu przypadkach wszystkie kwadryki zawierające Grassmannian oraz przestrzeń rozpiętą przez rozmaitość Fano–Mukai genusu 10 są rzędu 12. Otrzymujemy zatem siedmiowymiarowe przestrzenie wektorowe składające się z kwadryk stałego rzędu 12. Są to ponadto wszystkie siedmiowymiarowe przestrzenie kwadryk stałej rangi 12 zawierające Grassmannian $G(2,7)$.

Degeneracje rozmaitości Mukai genusu 10

W pracy [H6] kontynuujemy nasze badania rozmaitości G_2, tym razem z punktu widzenia degeneracji. Otrzymane wyniki mają zastosowanie w badaniu symetrii lustrzanej dla rozmaitości Calabi–Yau Borcea stopnia 36 z listy Borcea, co jest naszą główną motywacją tych badań. W tym celu znajdujemy małą degenerację toryczną Gorensteina rozmaitości G_2. Zaczynamy od konstrukcji następującej naturalnej degeneracji $\hat{G}_2$ rozmaitości G_2. Przypomnijmy, że rozmaitość G_2 posiada opis jako podrozmaitość Grassmannianu $G(5,V_7)$, gdzie V_7 jest siedmiowymiarową przestrzenią wektorową. W tym zanurzeniu G_2 parametryzuje pięciowymiarowe podprzestrzenie izotropiczne względem wybranej ogólnej czteroformy na V_7. Na podstawie [1] wiemy, że w $\mathbb{P}(\bigwedge^4 V_7^\vee)$ istnieje otwarta orbita ze względu na działanie grupy $GL(7)$. Ponadto dopełnienie tej orbity jest hiperpowierzchnia stopnia 7. Hiperpowierzchnia jest domknięciem zbioru czteroform, które można zapisać jako sumę trzech czteroform rozkładalnych. Zwróćmy uwagę, że oczekiwana liczba form rozkładalnych potrzebnych do rozkładu ogólnej czteroformy jest również, nasz przypadek jest więc defektywny. Jest to jedyny przypadek (razem ze swoim dualnym odpowiadającym trzy-formom na siedmiowymiarowej przestrzeni) gdzie dla $3 \leq k \leq n-3$ ogólna k-forma na n-wymiarowej przestrzeni nie posiada rozkładu na sumę oczekiwanej liczby form rozkładalnych.

Definiujemy rozmaitość $\hat{G}_2$ jako podrozmaitość $G(5,7)$ parametryzującą formy izotropiczne ze względu na czteroformę odpowiadającą punktowi z orbity stanowiącej podzbiór otwarty w powyższej hiperpowierzchni stopnia 7, czyli ogólną zdegenerowaną czteroformę. W ten sposób $\hat{G}_2$ jest pewnym niepełnym cięciem liniowym Grassmannianu $G(5,7)$ w zanurzeniu Plückera. Znajdujemy inny opis rozmaitości $\hat{G}_2$.

Propozycja 45 ([H6]). *Rozmaitość $\hat{G}_2$ jest rzutowo równoważna z domknięciem obrazu $\mathbb{P}^5$ przez system kwadryk zawierających skręconą kubikę.*

Następnie badamy dalsze degeneracje $\hat{G}_2$ indukowane przez degenerację skręconej kubiki do rozkładalnej krzywej stopnia 3. Wszystkie takie degeneracje są również degeneracjami G_2. Tylko jedna z nich posiada również opis jako niepełne cięcie liniowe Grassmannianu $G(5, V_7)$, nazwijmy ją C_2. Z jednej strony C_2 jest obrazem $\mathbb{P}^5$ przez system kwadryk zawierających sumę prostej i stożkowej przecinających się w jednym punkcie. Z drugiej strony powstaje ona jako podzbiór $G(5, V_7)$ parametryzujący pięciowymiarowe przestrzenie izotropiczne względem formy odpowiadającej punktowi w rozmaitości stycznej do Grassmannianu $G(4, V_7^\vee) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^4 V_7^\vee)$.

Oznaczamy przez T_1 oraz T_2 rozmaitości otrzymane jako domknięcie obrazu $\mathbb{P}^5$ przez odwzorowanie zadane przez system kwadryk zawierających odpowiednio następujące konfiguracje prostych:

- trzy proste przechodzące przez punkt;
- łańcuch trzech prostych.

Wtedy zarówno T_1 jak i T_2 są degeneracjami G_2. Ponadto obie te rozmaitości są rozmaitościami torycznymi. Obliczamy explicite rodzinę deformacyjną i otrzymujemy następującą propozycję.

Propozycja 46 ([H6]). *Rozmaitości toryczne T_1 oraz T_2 mają terminalne osobliwości Gorensteina. Ponadto istnieją degeneracje rozmaitości G_2 do T_1 oraz T_2, które są małymi degeneracjami torycznymi.*

Wiązki wektorowe na rozmaitościach Fano–Mukai

Poniżej omawiamy nasze wyniki opisujące niektóre przestrzenie moduli wiązek na rozmaitościach Fano–Mukai.

Przypadek genusu 10. Przejdźmy teraz do opisu najciekawszego wniosku z naszych rozważań nad rozmaitościami Mukai, to jest geometrycznej konstrukcji pewnej przestrzeni moduli wiązek wektorowych na K3 powierzchniach oraz trzy-rozmaitościach Fano–Mukai sekcyjnego genusu 10. Nasze podejście opiera się na Twierdzeniu 38 i 36 oraz jest podobne do idei Ilieva, Markushevicha i Ranestada z prac [75, 76]. Zwróćmy uwagę, że przypadek genusu 10 jest jedynym pozostałym przypadkiem rozmaitości Fano–Mukai, dla którego to podejście może dać dualność Mukai pomiędzy powierzchniami K3. Mianowicie w przypadku powierzchni K3 sekcyjnego genusu 8 nie istnieje wektor Mukai, dla którego przestrzeń moduli wiązek o tym wektorze Mukai jest powierzchnią.

W przypadku K3 powierzchni genusu 10 konstrukcja jest nieco bardziej skomplikowana od rozważanych w [75, 76]; może to mięć związek z faktem, że w tym przypadku przestrzeń moduli jest nie jest przestrzenią moduli "fine". Konstrukcja wygląda następująco.

Niech (S, L) będzie ogólną spolaryzowaną powierzchnią K3 genusu 10 (czyli stopnia $L^2 = 18$), wtedy na podstawie twierdzenia Mukai ([110]) rozmaitość (S, L) powstaje jako liniowe cięcie rozmaitości Mukai $M_{10} = G_2 \subset \mathbb{P}^{13}$ przez ogólną dziesięciowymiarową przestrzeń rzutową Π. Rozmaitość rzutowo dualna do G_2 jest hiperpowierzchnią stopnia 6, którą oznaczymy $\check{G}_2$. Wiemy zatem, że płaszczyzna $\Pi^\perp \subset (\mathbb{P}^{13})^*$ prostopadła do $\Pi \subset \mathbb{P}^{13}$ przecina $\check{G}_2$ w krzywej płaskiej stopnia 6, którą oznaczymy C.

Korzystając z Twierdzeń 38 oraz 36, każdemu punktowi $w \in \Pi^\perp$ możemy przyporządkować odwzorowanie $\alpha_w : S \to G(3, 6)$. Jeżeli $w \notin C$, wtedy α_w jest zawężeniem zanurzenia $< w >^\perp \cap G_2 \to G(3, 6)$ z Twierdzenia 38. Natomiast, gdy $w \in C$, rozmaitość $< w >^\perp \cap G_2 \to G(3, 6)$ ma jedyny punkt osobliwy p_w i jest on prostym punktem podwójnym. Odwzorowanie α_w jest wtedy zawężeniem do S rzutowania z p_w na Lagrange'owski Grassmannian $LG(3, 6) \subset G(3, 6)$. Rozważmy teraz wiązki $E_w = \alpha_w^*(\mathscr{Q})$ oraz $E'_w = \alpha_w^*(\mathscr{U}^\vee)$ gdzie $\mathscr{Q}$ oraz $\mathscr{U}$ są odpowiednio uniwersalną wiązką ilorazową oraz uniwersalną podwiązką na Grassmannianie $G(3, 6)$. Dowodzimy, że wiązki te są stabilne rangi

3, o pierwszej klasie Cherna $c_1(L)$ oraz charakterystyce Eulera 6, czyli o wektorze Mukai $(3, L, 3)$. Odpowiadają one zatem elementom z przestrzeni moduli $M(3, L, 3)$. Dowodzimy ponadto, że $E'_w \simeq E_w$ wtedy i tylko wtedy gdy $w \in C$. W ten sposób definiujemy zanurzenie ρ z podwójnego nakrycia płaszczyzny $\Pi^\perp$ rozgałęzione w krzywej C do $M(3, L, 3)$, które jest powierzchnią nierozkładalną. Czyli ρ jest izomorfizmem. Podsumowując, dowodzimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 47 ([H5]). *Przestrzeń moduli $M_S(3, L, 3)$ jest izomorficzna z podwójnym nakryciem płaszczyzny $\Pi^\perp$ rozgałęzionym w krzywej C, która jest przecięciem $\Pi^\perp$ z rozmaitością $\check{G}_2$ rzutowo dualną do G_2, będącą hiperpowierzchnią stopnia 6. W szczególności $M_S(3, L, 3)$ jest K3 powierzchnią posiadającą polaryzację genusu 2 (czyli stopnia również 2).*

Wnioskujemy z powyższego, że para $(S,\ M_S(3, L, 3))$ jest przykładem pary (dokładniej, w tym przypadku skręconych) Mukai dualnych powierzchni $K3$.

Analogicznie postępujemy dla X będącego trzy-rozmaitością Mukai–Fano genusu 10. Oznaczmy przez $M_X(3, L, \sigma, 2)$ przestrzeń moduli stabilnych wiązek wektorowych E rangi 3 na X takich, że $c_1(E) = L$, $c_2(E) = \sigma$, gdzie σ jest klasą krzywej stopnia 9 i genusu 2 na X, oraz $\deg(c_3(E)) = 2$. Niech ponadto $\Pi_X \subset \mathbb{P}^{13}$ będzie przestrzenią liniową taką, że $\Pi_X \cap G_2 = X$.

Twierdzenie 48 ([H5]). *Przestrzeń moduli $M_X(3, L, \sigma, 2)$ posiada składową nierozkładalną M_X, która jest nakryciem $\Pi_X^\perp$ rozgałęzionym w sześciu punktach będących przecięciem Π_X z rozmaitością $\check{G}_2$. W szczególności M_X jest krzywą genusu 2.*

Powyższe wyniki można interpretować jako geometryczne realizacje funktorów pomiędzy (skręconymi) kategoriami pochodnymi powstających w konstrukcji Kuznetsova homologicznej rzutowej dualności pomiędzy rozmaitością Mukai $G_2 \subset \mathbb{P}^{13}$ oraz pewnym rozwiązaniem nakrycia podwójnego $(\mathbb{P}^{13})^\vee$ rozgałęzionego w hiperpowierzchni stopnia 6 rzutowo dualnej do G_2. Klasy Brauera potrzebne do odpowiedniego skręcenia tych kategorii znalazły swoją geometryczną interpretację w pracy [101] opierającej się na naszej konstrukcji.

Wiązki wektorowe na pozostałych rozmaitościach Fano–Mukai. Wynik pracy [HP2] wykorzystujemy również do konstrukcji naturalnych podschematów w pewnych przestrzeniach moduli wiązek. Na przykład gdy S_{10} jest powierzchnią K3 z polaryzacją genusu 10, zidentyfikowaliśmy podrozmaitość $M_{S_{10}}(3, L, 3)$ parametryzującą wiązki Lagrange'owskie jako płaską krzywą stopnia 6, będącą przecięciem płaszczyzny prostopadłej do przestrzeni rozpiętej przez S_{10} w przestrzeni rozpiętej przez G_2 z rozmaitością rzutowo dualną do G_2.

Wnioskiem z naszej konstrukcji jest również stwierdzenie, że każda stabilna wiązka wektorowa z przestrzeni $M_{S_7}(2, L, 5)$ (czyli wiązka E rangi 2 o $c_1(E) = L$ oraz $\chi(E) = 5 + 2 = 7$) na ogólnej spolaryzowanej powierzchni K3 genusu 7 oznaczonej (S_7, L) jest globalnie generowana i obraz zanurzenia w Grassmannian $G(2, 5)$ zadanego przez tę wiązkę jest zawarty w kwadryce.

Podobna konstrukcja w przypadku ogólnych powierzchni S_8 genusu 8 (czyli takich, które powstają przez przecięcie Grassmannianu $G(2, 6)$ z przestrzenią rzutową wymiaru 8) daje opis przestrzeni ortogonalnych wiązek rangi 5 zadających zanurzenie w ortogonalny Grassmannian $OG(5, 10)$. Przestrzeń ta parametryzowana jest przez powierzchnię del Pezzo stopnia 3 otrzymaną przez przecięcie dualnej rozmaitości do $G(2, 6)$ z przestrzenią prostopadłą do przestrzeni rozpiętej przez S_8.

K3 powierzchnie genusu 10

W pracy [H6] wykorzystujemy otrzymane degeneracje rozmaitości G_2 do częściowego uzupełnienia klasyfikacji wszystkich spolaryzowanych rozmaitości K3 genusu 10. Z twierdzenia klasyfikacyjnego Mukai wiemy, że ogólna powierzchnia K3 genusu 10 jest pełnym przecięciem rozmaitości G_2 z przestrzenią liniową wymiaru 10. Klasyfikacja nieogólnych powierzchni K3 genusu 10 podana jest w książce [79] w terminach skrollów zawierających powierzchnię K3. W niektórych przypadkach opis ten jest jednak niepełny, tzn. niektóre przypadki nie mają podanej efektywnej konstrukcji. Używamy degeneracji G_2 do uzupełnienia niektórych takich braków. Dokładniej rozważamy przypadek spolaryzowanych powierzchni $K3$ oznaczanych (S, L) genusu 10 posiadające g^1_5 (to znaczy, że gładki reprezentant systemu polaryzacji posiada system liniowy wymiaru 1 i stopnia 5). Dowodzimy, w szczególności, że krzywa (i co za tym idzie powierzchnia) powstająca jako gładkie liniowe cięcie G_2 nie posiada g^1_5, natomiast wszystkie gładkie powierzchnie powstające jako pełne liniowe cięcia $\hat{G}_2$ posiadają g^1_5. Ponadto powierzchnie, które są cieciami $\hat{G}_2$ wyznaczają składową w przestrzeni moduli wszystkich powierzchni genusu 10 posiadających g^1_5.

Rozmaitości Fano genusu 12

W pracy [H1] uzupełniamy nasze rozważania rozmaitości Mukai o jedyną pozostałą klasę rozmaitości Fano–Mukai, czyli trzy-rozmaitości Fano indeksu 1 i genusu 12. Jako, że rozmaitości te nie rozszerzają się do wyższych wymiarów nie mamy analogicznych trzy-rozmaitości Borcea Calabi–Yau stopnia 44, które powstawałyby jako ich cięcia z kwadrykami. Niemniej jednak wciąż możemy rozważać trzy-rozmaitość Calabi–Yau powstałe jako podwójne nakrycia tych trzy-rozmaitości Fano–Mukai rozgałęzione w ich przecięciu z kwadrykami (czyli w dywizorach D z systemu $D \in |2K_{V_{12}}|$). Zwróćmy uwagę, że takie podwójne nakrycia można skonstruować dla wszystkich trzy-rozmaitość Fano–Mukai, jednak w przypadkach genusu $g \leq 10$ w ten sposób otrzymamy rozmaitości, które są degeneracjami trzy-rozmaitości Calabi–Yau Borcea. W przypadku $g \leq 10$ podwójne nakrycia reprezentują zatem dywizor hipereliptyczny w przestrzeni moduli spolaryzowanych rozmaitości Calabi–Yau Borcea danego genusu. Natomiast w przypadku $g = 12$ wypełniają one podzbiór otwarty i gęsty w przestrzeni moduli.

Nasze badania nad rozmaitościami Fano–Mukai genusu 12 mają ponadto dodatkową motywację, jest to problem istnienia na nich tzw. metryk Kählera-Einsteina (które będziemy oznaczać w skrócie KE). Problem ten jest istotny istotny dla różniczkowej geometrii zespolonej. W [35, 36, 37, 150] autorzy zaobserwowali, że generyczna rozmaitość Fano–Mukai genusu 12 nie dopuszcza metryki KE. Jednak znane są również przykłady specjalnych rozmaitości Fano–Mukai genusu 12, które taką metryką posiadają. Spodziewane jest, że istnienie metryk KE w tym przypadku jest ściśle związane z grupą automorfizmów rozmaitości. Prokhorov pokazał, że przestrzeń moduli rozmaitości Mukai dopuszcza stratyfikacje w zależności od grupy automorfizmów. W szczególności niech $Aut^0 V$ oznacza składową grupy automorfizmów rozmaitości V, która zawiera identyczność. W przypadku V będącego rozmaitością Fano–Mukai genusu 12 $Aut^0 V$ jest singletonem poza następującymi przykładami:

1) $V = V_{MU}$ przykład Mukai–Umemury, dla którego $Aut^0 V = PSL(2)$;
2) V jest elementem jednoparametrowej rodziny $\mathscr{V}^m$, dla której elementów $Aut^0 V = \mathbb{C}^*$;
3) $V = V^a$ jest specjalną rozmaitością, dla której $Aut^0 V = \mathbb{C}^+$.

Z punku widzenia metryk KE, naszym celem jest badanie problemu istnienia metryk KE dla przykładów z rodziny $\mathscr{V}^m$. Potrzebujemy w tym celu dokładniej zrozumieć geometrię tych i przy okazji pozostałych specjalnych przykładów. Na podstawie wyników Mukai przedstawionych w pracach[111, 105] ogólna rozmaitość Fano–Mukai genusu 12 może być skonstruowana jako rozmaitość rozkładów na potęgi (czyli rozmaitość parametryzującą wszystkie rozkłady danego wielomianu na sumę danej liczby potęg form liniowych) $VSP(C_4, 5)$, gdzie C_4 jest wielomianem jednorodnym stopnia 4 trzech zmiennych a 5 wyznacza liczbę form liniowych w rozkładzie. Niech C oznacza krzywą w $\mathbb{P}^2$ zadaną przez C_4. Mamy następujący opis specjalnych rodzin.

Propozycja 49 ([H1]). *Niech V będzie elementem rodziny $\mathscr{V}^m$ rozmaitości Mukai dopuszczających nietrywialne działanie $\mathbb{C}^*$. Wtedy stowarzyszona krzywa stopnia 4 składa się z dwóch stożkowych wzajemnie stycznych w dwóch punktach. Jeżeli te stożkowe się pokrywają to dostajemy przykład Mukai–Umemura, natomiast gdy mamy dwie stożkowe przecinające się w jednym punkcie (który musi być punktem 4-krotnej styczności), otrzymujemy V^a.*

Skoro suma dwóch stożkowych dopuszcza dodatkowa symetrię osiową wnioskujemy, że ogólny element z rodziny $\mathscr{V}^m$ dopuszcza dodatkową symetrię ι, która nie komutuje z działaniem $\mathbb{C}^*$.

Rozważamy więc $H =< \mathbb{C}^*, \iota >= \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{C}^*$ oraz jej zwartą podgrupę G' generowaną przez okrąg oraz ι. Z twierdzenia Bando–Mabuchi jeżeli rozmaitość dopuszcza metrykę KE to dopuszcza G' niezmienniczą metrykę KE. W konsekwencji otrzymujemy:

Twierdzenie 50 ([H1]). *Zbiór elementów w V^m, które dopuszczają G' niezmienniczą metrykę KE jest otwarty w topologii euklidesowej.*

Znajdujemy następnie, startując od krzywej C stopnia 4, bezpośrednie opisy za pomocą równań (algorytm napisany w programie Macaulay 2) dla rozmaitości Fano–Mukai genusu 12 zadanej przez $VSP(C, 6)$.

Opisujemy ponadto schemat Hilberta prostych na danej rozmaitości Fano. To pozwala nam opisać dywizory niezmiennicze na działanie $\mathbb{C}^*$ na tej rozmaitości. Wnioskujemy następujące szacowanie na log kanoniczny threshold, który jest ściśle związany z istnieniem metryk KE na rozmaitości.

Propozycja 51 ([H1]). *Dla ogólnego elementu rodziny V^m mamy*

$$lct(V^m, \mathbb{C}^*) \leq \frac{1}{2}.$$

W [89] przedstawione są dalsze rozwinięcia przedstawionych wyników dotyczących metryk Kählera Einsteina.

Oprócz wyników dotyczących metryk Kählera Einsteina, które są powiązaniem naszych badań z analizą zespoloną, omawiana praca wpisuje się w nasze badania dotyczące zarówno geometrii rozmaitości Fano–Mukai jaki i badania specjalnych rozmaitości Calabi–Yau. W szczególności dokańczamy badanie schematów Hilberta prostych na rozmaitościach Mukai. Ponadto znajdujemy konkretne opisy specjalnych degeneracji rozmaitości Fano–Mukai genusu 12, które dopuszczają dodatkową strukturę (większą grupę automorfizmów) i które indukują podobne degeneracje dla trzy-rozmaitości Calabi–Yau, które powstają jako ich podwójne nakrycia. W ten sposób otrzymane degeneracje mają potencjalne zastosowanie w badaniu symetrii lustrzanej dla rozważanej rodziny trzy-rozmaitości Calabi–Yau. Badania w tym kierunku będziemy kontynuować w naszych kolejnych projektach naukowych.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

Prace stanowiące pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

[O1] A.Iliev, G.Kapustka, M.Kapustka, K.Ranestad, *EPW cubes*, opublikowane online w Journal für die reine und angewandte Mathematik 2016, DOI 10.1515/crelle-2016-0044.

[O2] M.Donten-Bury, B. van Geemen, G. Kapustka, M.Kapustka, J.Wiśniewski, *A very special EPW sextic and two IHS fourfolds*, Geometry & Topology 21 (2) (2017), 1179-1230.

[O3] G.Kapustka, M.Kapustka *Appendix to: On IHS fourfolds with* $b_2 = 23$, Michigan J. Math. 65(1), (2016), 29-33.

Artykuły przeglądowe

[S1] T. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, M. Kapustka, A. L. Knutsen, W. Syzdek, T. Szemberg, Interactions of classical and numerical algebraic geometry, 33-70, Contemp. Math., 496, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

Większość pozostałej części moich osiągnięć naukowych uzyskanych po doktoracie dotyczyła konstrukcji rozmaitości hiper-Kählerowskich. Przypomnijmy, że każda Kählerowska rozmaitość zespolona o trywialnej pierwszej klasie Cherna posiada nakrycie étalne, które jest iloczynem rozmaitości hiper-Kählerowskich z rozmaitościami Calabi–Yau oraz zespolonymi torusami. Rozmaitości hiper-Kählerowskie wymiaru 2 są powierzchniami K3. W wyższych wymiarach teoria rozmaitości hiper-Kählerowskich czerpie z teorii rozmaitości K3 jednak ich klasyfkacja jest wciąż szeroko otwartym problemem. W wymiarach parzystych w ogólności znamy tylko dwa rodzaje rozmaitości hiper-Kählerowskich. Są to rozmaitości deformacyjne albo ze schematem Hilberta punktów na powierzchni K3 albo tzw. uogólnione rozmaitości Kummerowskie. Ponadto w wymiarze 6 i 10 O'Grady znalazł dwie dodatkowe rodziny deformacyjne rozmaitości hiper-Kählerowskich. Zauważmy również, że ogólna rozmaitość hiper-Kählerowska ustalonego typu deformacyjnego nie jest rozmaitością rzutową. Jednym z najciekawszych problemów w klasyfikacji rozmaitości hiper-Kählerowskich jest problem konstrukcji tzw. pełnych rodzin rzutowych rozmaitości hiper-Kählerowskich. Do tej pory skonstruowano jedynie sześć takich rodzin ([47, 14, 71, 122, 90, O1]). Każda z tych konstrukcji jest inna i wymaga głębokiej nietrywilanej geometrii. Jednym z głównych celów naszych badań jest tworzenie nowych metod do konstrukcji rozmaitości hiper-Kählerowskich. Otrzymane metody pozwalają nam w szczególności na konstrukcję (w pracy [O1]) nowej pełnej rodziny sześciowymiarowych rozmaitości hiperkählerowskich. Poniżej omawiamy otrzymane wyniki w tym kierunku.

Załączamy również omówienie wyników zawartych w następującym preprincie złożonym do druku, który stanowi kontynuację naszych badań nad rozmaitościami hiper-Kählerowskimi.

[OP1] A.Iliev, G. Kapustka, M. Kapustka, K. Ranestad, *Hyperkähler fourfolds and Kummer surfaces*, arXiv:1603.00403 (2016), złożona do druku.

Geometryczna konstrukcja EPW sekstyk

W pracy [O3] przedstawiamy geometryczną konstrukcję EPW sekstyk, czyli specjalnych hiperpowierzchni stopnia 6 w $\mathbb{P}^5$ używanych przez O'Grady'ego do konstrukcji pełnej 20-wymiarowej rodziny cztero-rozmaitości hiper-Kählerowskich jako ich podwójne nakrycia (zob [122, 123]). Pokazujemy również konstrukcje cztero-rozmaitości Calabi–Yau będących minimalnymi rozwiązaniami osobliwości EPW sekstyk.

Niech W będzie 6-wymiarową zespoloną przestrzenią wektorową. Segre odkrył, że naturalne działanie grupy $PGL(W)$ na $\mathbb{P}(\bigwedge^3 W)$ ma cztery orbity $\mathbb{P}(\bigwedge^3 W) \setminus O_1$, $O_1 \setminus O_2$,

$O_2 \setminus O_3$ oraz O_3, gdzie $O_1 \supset O_2 \supset O_3$ są podrozmaitościami wymiarów 18, 14, oraz 9. Ponadto $O_3 = G(3,W)$, O_1 jest kwartyką, O_2 zbiorem osobliwym O_1, a O_3 zbiorem osobliwym O_2.

Możemy opisać O_2 jako zbiór 3-form

$$\{[\alpha \wedge \omega] \in \mathbb{P}(\bigwedge^3 W) \mid \alpha \in W,\ \omega \in \bigwedge^2 W\}.$$

Wnioskujemy, że istnieje naturalna fibracja $\pi\colon O_2 \setminus O_3 \to \mathbb{P}^5$ taka, że domknięcia włókien są 9-wymiarowymi przestrzeniami liniowymi. Dokładniej π jest zdefiniowane następująco:

$$O_2 \setminus O_3 \ni [\alpha \wedge \omega] \mapsto [\alpha] \in \mathbb{P}(W).$$

Niech, jak wcześniej, $A \subset \wedge^3 W$ oznacza 10-wymiarową podprzestrzeń Lagrange'owską. Głównym wynikiem [O3] jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 52 ([O3])**.** *Jeżeli $A \subset \wedge^3 W$ jest ogólną podprzestrzenią Lagrange'owska, to obraz $\pi(\mathbb{P}(A) \cap O_2) \subset \mathbb{P}^5$ jest ogólną EPW sekstyką.*

W szczególności $\mathbb{P}(A) \cap O_2$ jest czterowymiarową rozmaitością Calabi–Yau, która jest minimalnym rozwiązaniem osobliwości EPW sekstyki. Znajdujemy system liniowy definiujący to rozwiązanie osobliwości. Udowadniamy wreszcie, że rzutowo dualna rozmaitość do EPW sekstyki jest inną EPW sekstyką.

Nowa pełna rodzina rzutowych sześcio-rozmaitości hiper-Kählerowskich

W pracy [O1] przedstawiamy tej pracy pierwszą znaną konstrukcję pełnej rodziny rozmaitości wymiaru 6 o polaryzacji stopnia Beauville'a–Bogomolova $q = 4$. Przez konstrukcję pełnej rodziny rozumiemy konstrukcję generycznego elementu przestrzeni moduli spolaryzowanych rozmaitości tego typu. Nasza metoda jest rozwinięciem wyników zawartych w [131, 132, 122, 123].

Przedstawmy szkic tej konstrukcji. Niech $[A] \in LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ będzie klasą dziesięciowymiarowej podprzestrzeni Lagrange'owskiej dla formy indukowanej przez iloczyn zewnętrzny gdzie $W \simeq \mathbb{C}^6$.

Dla 3-wymiarowej podprzestrzeni $U \subset W$ następująca 10-wymiarowa podprzestrzeń

$$T_U := \wedge^2 U \wedge W \subset \wedge^3 W$$

jest również elementem $LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ oraz $\mathbb{P}(T_U)$. Jest także rzutową przestrzenią styczną do

$$G(3,W) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 W)$$

w $[U]$.

Dla ogólnego $[A] \in LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ oraz $k \in \mathbb{N}$ rozważamy następujące miejsce degeneracji.

$$D_k^A = \{[U] \in G(3,W) \mid \dim A \cap T_U \geq k\} \subset G(3,W). \tag{4}$$

Dla ustalonego $A \in LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ rozmaitość D_2^A nazywamy *EPW sześcianem.* Pokazujemy, że D_2^A jest sześciowymiarową rozmaitością, która jest osobliwa dokładnie wzdłuż trójwymiarowej rozmaitości D_3^A oraz, że D_4^A jest puste. Ponadto D_3^A jest gładkie oraz osobliwości D_2^A wzdłuż D_3^A są typu $\frac{1}{2}(1,1,1)$.

Głównym wynikiem [O1] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 53 ([O1])**.** *Niech $[A] \in LG\eta(10, \wedge^3 W)$, będzie ogólne. Wtedy istnieje naturalne podwójne nakrycie Y_A EPW sześcianu D_2^A rozgałęzione wzdłuż zbioru osobliwego D_3^A takie, że Y_A jest rozmaitością hiper-kählerowską typu $K3^{[3]}$ z polaryzacją o podzielności 2* *i stopnia Beauville'a–Bogomolova $q = 4$. W szczególności przestrzeń moduli spolaryzowanych rozmaitości hiper-kählerowskich typu $K3^{[3]}$ ze stopniem Beauville'a–Bogomolova $q = 4$ oraz podzielnością 2 jest uniwymierna.*

Rozmaitość Y_A nazywamy *podwójnym EPW sześcianem.*

Degeneracje podwójnych EPW sześcianów

W [OP1] badamy degeneracje podwójnych EPW sześcianów rozważając poprzednią konstrukcję dla przestrzeni Lagrange'owskich A takich, że $\mathbb{P}(A) \cap G(3,V)$ jest jednym punktem oznaczonym przez P.

Oznaczmy $G(3,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 V)$ Grassmannian trójwymiarowych podprzestrzeni sześciowymiarowej przestrzeni V.

Oznaczmy przez $T_P = \mathbb{P}(T_U)$ zanurzoną przestrzeń styczną do

$$G(3,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 V)$$

w punkcie $P \in G(3,V)$. Zauważmy, że przecięcie

$$T_P \cap G(3,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 V)$$

jest stożkiem $C_P \subset \mathbb{P}^9$ o wierzchołku P nad iloczynem Segre $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$. Z drugiej strony można stowarzyszyć z A miejsce degeneracji D_A^k. Pokazujemy, że $C_P \subset D_A^1$ oraz przecięcie $C_P \cap D_A^2$ jest kowymiaru 1 w C_P. Otrzymujemy następującą propozycję.

Propozycja 54 ([OP1]). *Podwójne nakrycie $Y_A \to D_A^2$ z Twierdzenia 53 indukuje nakrycie*

$$Z_A \xrightarrow{2:1} (C_P \cap D_A^2) \subset \mathbb{P}^9$$

takie, że Z_A jest rozmaitością hiper-kählerowską typu $K3^{[2]}$ o stopniu Beauville'a–Bogomolova $q = 4$. Podprzestrzenie Lagrange'owskie $A \subset \wedge^3 V$ takie, że $P \in \mathbb{P}(A)$ parametryzują 19-wymiarową rodzinę rozmaitości hiper-kählerowskich z $q = 4$.

Zwróćmy uwagę, że dla ogólnej rozmaitości hiper-Kählerowskiej z polaryzacją stopnia Beauville'a–Bogomolova $q = 4$ polaryzacja ta zadaje morfizm biwymierny. Rodzina rozmaitości Z_A z Propozycji 54 zadaje zatem dywizor w przestrzeni moduli spolaryzowanych rozmaitości hiper-kählerowskich, który jest składową podzbioru hipereliptycznego.

Związek rozmaitości Z_A i czterowymiarowych rozmaitości Verra

Przedstawiamy również alternatywne konstrukcje rozmaitości hiper-kählerowskich Z_A. Rozważmy czterowymiarową rozmaitość Verry V tzn. podwójne nakrycie $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ rozgałęzione wzdłuż dywizora typu $(2,2)$. Rozmaitość V jest izomorficzna z przecięciem stożka nad zanurzeniem Segre

$$C(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \cap Q_A \subset \mathbb{P}^9$$

z kwadryką Q_A, która nie przechodzi przez środek stożka.

Twierdzenie 55 ([OP1]). *Schemat Hilberta $(1,1)$ stożkowych na V dopuszcza $\mathbb{P}^1$ fibrację o bazie będącej rozmaitością hiper-kählerowską o stopniu B-B $q = 4$, która pochodzi z konstrukcji w Propozycji 54.*

Powyższa konstrukcja może być porównana z konstrukcją Beauville'a i Donagiego z pracy [14] albo z konstrukcją z pracy [90].

Rozmaitości Z_A są również ciekawe z punktu widzenie geometrycznej interpretacji punktów dwutorsyjnych w grupie Brauera powierzchni K3 stopnia 2. Mianowicie, niech S będzie ogólną powierzchnią K3 stopnia 2. Rozróżniamy trzy typy elementów w podgrupie punktów dwu-torsyjnych w grupie Brauera $Br(S)_2 = (\mathbb{Z}_2)^{21}$ indukujących trzy typy struktur Hodge'a, które są związane z następującymi rozmaitościami:

(1) pełnym przecięciem $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$ dla α_1,
(2) czterowymiarową kubiką $X_3 \subset \mathbb{P}^5$ zawierającą płaszczyznę dla α_2,
(3) podwójnym nakryciem V rozmaitości $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ rozgałęzionym wzdłuż $(2,2)$ dywizora dla α_3.

Rozważamy przestrzeń moduli $M(S, \alpha_i)$ skręconych snopów na (S, α_i) dla $i = 1, 2, 3$.

(1) $M(S, \alpha_1)$ jest izomorficzne z $K3$ powierzchnią $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$ (zobacz [154]),
(2) $M(S, \alpha_2)$ jest izomorficzne ze schematem Hilberta prostych na odpowiadającej kubice $X_3 \subset \mathbb{P}^5$ zawierającej płaszczyznę (zobacz [99]).

Uzupełniamy tę analogię pokazując:

Propozycja 56 ([OP1])**.** *$M(S, \alpha_2)$ jest izomorficzne z pewną rozmaitością hiper-Kählerowską, która pochodzi z konstrukcji w Propozycji 54.*

Używając wyników z [104] uzupełniamy klasyfikację rozmaitości hiper-Kählerowskich dopuszczających niesymplektyczny automorfizm.

Twierdzenie 57 ([OP1, 104])**.** *Niech X będzie rozmaitością hiper-kählerowską typu $K3^{[2]}$, która dopuszcza niesymplektyczny automorfizm rzędu będącego liczbą pierwszą $p \neq 3, 23$. Wtedy X leży*

(1) w domknięciu rodziny podwójnych EPW sekstyk,
(2) w domknięciu rodziny skonstruowanej w Propozycji 54,
(3) lub jest izomorficzne z przestrzenią moduli snopów na powierzchni K3 i automorfizm jest indukowany przez automorfizm powierzchni K3.

Bardzo specjalna EPW sekstyka i problem Morina

Rozmaitości hiper-Kählerowskie mają również zaskakujące zastosowania w klasycznej geometrii które badamy w pracy [O2]. Wprowadźmy mianowicie następującą definicję.

Definicja 58. *Rodzinę płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$ nazywamy skończoną pełną rodziną przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$, jeżeli każde dwie płaszczyzny z tej konfiguracji przecinają się oraz nie ma płaszczyzny spoza tej rodziny, która przecina wszystkie płaszczyzny z tej rodziny.*

W 1930 Ugo Morin (zob. [106]) postawił następujący problem:

Problem 59. *Sklasyfikować skończone pełne rodziny przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$.*

Zaobserwujmy, że problem Morina jest równoważny z problemem znalezienia Lagrange'owskiej podprzestrzeni $A \subset \wedge^3 W$ takiej, że $A \in \Sigma$ oraz $\mathbb{P}(A) \cap G(3, W)$ jest skończonym zbiorem punktów, które rozpinają $\mathbb{P}(A)$. Wystarczy do tego zauważyć, że dwa punkty w $G(3, W)$ odpowiadają dwóm płaszczyznom w $\mathbb{P}(W)$. Te dwie płaszczyzny przecinają się, jeżeli iloczyn zewnętrzny odpowiadających form jest równy 0. Stąd problem Morina jest równoważny z następującym problemem:

Problem 60. *Sklasyfikować podprzestrzenie Lagrange'owskie $A \in \Sigma$ takie, że $\mathbb{P}(A) \cap G(3, W)$ jest skończonym zbiorem, który rozpina $\mathbb{P}(A)$.*

O'Grady w pracy [121] pokazał, że skończona pełna rodzina przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$ ma moc $10 \leq k \leq 20$ oraz pokazał istnienie skończonych konfiguracji takich płaszczyzn mocy ≤ 16.

Celem pracy [O2] jest konstrukcja pełnej rodziny dwudziestu przecinających się płaszczyzn. Jako wniosek, dzięki argumentom z teorii deformacji, implikuje to istnienie skończonych pełnych rodzin takich płaszczyzn mocy k dla każdej wartości $10 \leq k \leq 20$.

W pracy [O2] konstruujemy konfigurację dwudziestu płaszczyzn jako podzbiór zbioru 60 płaszczyzn osobliwych pewnej specjalnej EPW sekstyki S. EPW sekstyka S otrzymana jest na dwa sposoby:

- jako obraz rozmaitości hiper-Kählerowskiej skonstruowanej w [51] jako rezolwenta symplektyczna ilorazu E^4/G czwartej potęgi krzywej eliptycznej z mnożeniem zespolonym przez grupę badaną w [15] odwzorowanej przez naturalny system liniowy.
- jako obraz schematu Hilberta dwóch punktów $S_0^{[2]}$ na powierzchni K3 Vinberga (tzw. najbardziej algebraicznej powierzchni K3 rozważanej w [156]) odwzorowanego przez naturalny system liniowy.

Odkrywamy następnie, że hiperpowierzchnia $S \subset \mathbb{P}^5$ jest powiązana z innymi klasycznymi konstrukcjami w geometrii algebraicznej. Miedzy innymi posiada ona następujące własności.

(1) Istnieje 16 hiperpłaszczyzn H_i, dla $i \in \{1 \dots 16\}$, w $\mathbb{P}^5$ takich, że $S \cap H_i \subset \mathbb{P}^4$ jest hiperpowierzchnią Segre stopnia 3. Jest to kubika z maksymalną liczbą 10 punktów podwójnych.
(2) Jest rzutowo samo-dualna oraz zawiera 16 punktów osobliwych mających stożki styczne będące stożkami nad kwartyką Igusy.
(3) Jest niezmiennicza na permutację współrzędnych w $\mathbb{P}^5$.

Zauważamy ponadto, że jest sześć wyborów konfiguracji 20 przecinających się płaszczyzn wśród 60 osobliwych płaszczyzn na S.

Stałe Seshadriego

Artykuł [S1] jest przydatnym artykułem przeglądowym na temat stałych Seshadriego, stałych stowarzyszonych z wiązkami liniowymi gładkich rozmaitości rzutowych mierzących w pewnym sensie ich lokalną dodatniość. Praca stanowi wprowadzenie do tematu oraz zawiera przegląd wyników w tej teorii uzyskanych na przestrzeni ostatnich lat. Praca zawiera również kilka nowych idei.

Bibliografia:

[1] H. Abo, G. Ottaviani, Ch. Peterson. Non-defectivity of Grassmannians of planes. *J. Algebraic Geom.*, 21(1):1–20, 2012.
[2] V. Alexeev, M. Brion. Toric degenerations of spherical varieties. *Selecta Math. (N.S.)*, 10(4):453–478, 2004.
[3] G. Almkvist, Ch. van Enckevort, D. van Straten, and W. Zudilin. Tables of Calabi–Yau equations. *arXiv:math/0507430*, 2005.
[4] S. Altınok, G. Brown, M. Reid. Fano 3-folds, $K3$ surfaces and graded rings. In *Topology and geometry: commemorating SISTAG*, volume 314 of *Contemp. Math.*, pages 25–53. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
[5] A. B. Aure, K. Ranestad. The smooth surfaces of degree 9 in $\mathbb{P}^4$. *Complex Projective Geometry*, 179:32–46, 1992.
[6] E. Ballico and L. Chiantini. On smooth subcanonical varieties of codimension 2 in $\mathbb{P}^n$, $n \leq 4$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 135(1):99–117, 1983.
[7] V. Batyrev. Toric degenerations of Fano varieties and constructing mirror manifolds. In *The Fano Conference*, pages 109–122. Univ. Torino, Turin, 2004.
[8] V. Batyrev, A. Borisov. On Calabi–Yau complete intersections in toric varieties. In *Higher- dimensional complex varieties* (Trento, 1994), 39–65, de Gruyter, Berlin, 1996.
[9] V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten. Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmannians. *Nuclear Phys. B*, 514(3):640–666, 1998.
[10] V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, and D. van Straten. Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds. *Acta Math.*, 184(1):1–39, 2000.
[11] V. Batyrev and M. Kreuzer. Constructing new Calabi-Yau 3-folds and their mirrors via conifold transitions. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 14(3):879–898, 2010.
[12] V. Benedetti, S. A. Filippini, L. Manivel, F. Tanturri. Orbital degeneracy loci and applications. arXiv:1704.01436, 2017.

[13] A. Beauville. Varietes kähleriennes dont la premiere classe de Chern est nulle. *J. of Diff. Geometry* 18:755-782, 1983.

[14] A. Beauville, R. Donagi. La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4. *C.R. Acad. Sc. Paris* 301:703-706, 1985.

[15] G. Bellamy, T. Schedler. A new linear quotient of $\mathbb{C}^4$ admitting a symplectic resolution. *Math. Z.* 273, no. 3–4:753–769, 2013.

[16] M. C. Beltrametti, M. Schneider, A. J. Sommese. Threefolds of degree 9 and 10 in $\mathbb{P}^5$. *Math. Ann.*, 288(3):413–444, 1990.

[17] P. Berglund, S. Katz, A. Klemm. Mirror symmetry and the moduli space for generic hypersurfaces in toric varieties. *Nuclear Physics B*, 456(1):153–204, 1995.

[18] M.-A. Bertin. Examples of Calabi-Yau 3-folds of $\mathbb{P}^7$ with $\rho = 1$. *Canad. J. Math.*, 61(5):1050–1072, 2009.

[19] G. Bini, F. F. Favale. Groups acting freely on Calabi-Yau threefolds embedded in a product of del Pezzo surfaces. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 16(3):887–933, 2012.

[20] F. Bogomolov. The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class, *Mat. Sbornik* (N.S.) 93(135):573-575, 1974.

[21] G. Brown, A. Kasprzyk, L. Zhu. Gorenstein formats, canonical and Calabi–Yau threefolds. arXiv:1409.4644, 2014.

[22] C. Borcea. Homogeneous vector bundles and families of Calabi-Yau threefolds. II. In *Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989)*, volume 52 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 83–91. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[23] J. Böhm. *Mirror symmetry and tropical geometry.* PhD thesis, Universität des Saarlandes, 2008. arXiv:0708.4402, 2007.

[24] V. Braun. The 24-cell and Calabi-Yau threefolds with Hodge numbers $(1, 1)$. *J. High Energy Phys.*, (5):101, front matter+19, 2012.

[25] T. Bridgeland. Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms. *Bull. London Math. Soc.*, 31(1):25–34, 1999.

[26] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud. Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3. *Amer. J. Math.*, 99(3):447–485, 1977.

[27] A. Căldăraru. Nonfine moduli spaces of sheaves on $K3$ surfaces. *Int. Math. Res. Not.*, (20):1027–1056, 2002.

[28] P. Candelas, A. Constantin, C. Mishra. Calabi–Yau Threefolds With Small Hodge Numbers, arXiv:1602.06303, 2016.

[29] P. Candelas and A. Constantin. Completing the web of $\mathbb{Z}_3$-quotients of complete intersection Calabi-Yau manifolds. *Fortschr. Phys.*, 60(4):345–369, 2012.

[30] P. Candelas, X. C. de la Ossa, P. S. Green, L. Parkes. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. In *Essays on mirror manifolds*, pages 31–95. Int. Press, Hong Kong, 1992.

[31] Fabrizio Catanese. Homological algebra and algebraic surfaces. In *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, volume 62 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 3–56. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[32] F. Catanese. Canonical surfaces of higher degree. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, II. Ser, 2016.

[33] F. Catanese. On the canonical map of some surfaces isogenous to a product. arXiv:1704.01100, 2017

[34] F. Catanese, F.O. Schreyer. Canonical projections of irregular algebraic surfaces, *Algebraic Geometry*, 79–116, de Gruyter, Berlin, 2002.

[35] X. Chen, S. Donaldson, S. Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities, *J. Amer. Math. Soc.* 28(1), 183-197, 2015.

[36] X. Chen, S. Donaldson, S. Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π, *J. Amer. Math. Soc.* 28(1), 199-234, 2015.

[37] X. Chen, S. Donaldson, S. Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof, *J. Amer. Math. Soc.* 28(1) 235–278, 2015.

[38] T.-M. Chiang, B. R. Greene, M. Gross, Y. Kanter. Black hole condensation and the web of Calabi-Yau manifolds. *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.*, 46:82–95, 1996. *S*-duality and mirror symmetry (Trieste, 1995).

[39] A. Corti and M. Reid, editors. *Explicit birational geometry of 3-folds*, volume 281 of *London Mathematical Society Lecture Note Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[40] S. Cynk. Double coverings of octic arrangements with isolated singularities. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 3(2):217–225, 1999.

[41] S. Cynk, T. Szemberg. Double covers and Calabi–Yau varieties. *Banach Center Publications* 44(1):93–101, 1998.

[42] R. Davies. The expanding zoo of Calabi-Yau threefolds. *Adv. High Energy Phys.*, pages Art. ID 901898, 18, 2011.

[43] P. De Poi, D. Faenzi, E. Mezzetti, K. Ranestad. Fano congruences of index 3 and alternating 3-forms arXiv:1606.04715, 2016, To appear in the *Annales de l'Institut Fourier.*

[44] O. Debarre, A. Kuznetsov. Gushel-Mukai varieties: classification and birationalities, arXiv:1510.05448, 2015.

[45] O. Debarre, A. Kuznetsov. Gushel-Mukai varieties: linear spaces and periods. arXiv:1605.05648, 2016.

[46] O. Debarre, A. Kuznetsov. On the cohomology of Gushel-Mukai sixfolds, arXiv:1606.09384,2016.

[47] O. Debarre, C. Voisin, Hyper-kähler fourfolds and Grassmann geometry, *J. Reine Angew. Math.*, 649:63–87, 2010.

[48] W. Decker, F.-O. Schreyer. Non-general type surfaces in $\mathbb{P}^4$: some remarks on bounds and constructions. *Journal of Symbolic Computation*, 29(4):545–582, 2000.

[49] P. Ellia, D. Franco, L. Gruson. Smooth divisors of projective hypersurfaces. *arXiv preprint math/0507409*, 2005.

[50] I. Dolgachev, D. Markushevich. Lagrangian tens of planes, Enriques surfaces and holomorphic symplectic fourfolds, preprint, 2010.

[51] M. Donten-Bury, J. Wiśniewski. On 81 symplectic resolutions of a 4-dimensional quotient by a group of order 32, arXiv:1409.4204, 2014.

[52] D. Eisenbud. The geometry of syzygies, volume 229 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005. A second course in commutative algebra and algebraic geometry.

[53] G. Ellingsrud, C. Peskine. Sur les surfaces lisses de $\mathbb{P}_4$. *Invent. Math.*, 95(1):1–11, 1989.

[54] A. Fujiki. On the de Rham Cohomology Group of a Compact Kähler Symplectic Manifold, *Adv. Stud. Pure Math.* 10:105–165, 1987.

[55] T. Fujita. Projective threefolds with small secant varieties. *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 32(1):33–46, 1982.

[56] S. Galkin, E. Shinder. The Fano variety of lines and rationality problem for a cubic hypersurface, arXiv:1405.5154.

[57] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran. Moduli spaces of K3 surfaces and holomorphic symplectic varieties, *Handbook of Moduli* (ed. G. Farkas and I. Morrison), vol. 1, *Advanced Lect. in Math.*, IP, Somerville, MA, 2013, pp. 459-526

[58] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran. Moduli spaces of irreducible symplectic manifolds, *Compos. Math.*, 146(2):404–434, 2010.

[59] M. Gross. Deforming Calabi–Yau threefolds, *Math. Ann.*, 308(2):187–220, 1997.

[60] P. S. Green, T. Hübsch. Connecting moduli spaces of Calabi-Yau threefolds. *Comm. Math. Phys.*, 119(3):431–441, 1988.

[61] B. R. Greene and M. Ronen Plesser. Duality in Calabi-Yau moduli space. *Nuclear Phys. B*, 338(1):15–37, 1990.

[62] M. Gross. Deforming Calabi-Yau threefolds. *Math. Ann.*, 308(2):187–220, 1997.

[63] M. Gross. Primitive Calabi-Yau threefolds. *J. Differential Geom.*, 45(2):288–318, 1997.

[64] M. Gross, D. Huybrechts, D. Joyce. Calabi-Yau manifolds and related geometries. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Lectures from the Summer School held in Nordfjordeid, June 2001.

[65] M. Gross and S. Popescu. Calabi-Yau threefolds and moduli of abelian surfaces. I. *Compositio Math.*, 127(2):169–228, 2001.

[66] R. Hartshorne. Varieties of small codimension in projective space. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80:1017–1032, 1974.

[67] R. Hartshorne. Generalized divisors on Gorenstein schemes. In *Proceedings of Conference on Algebraic Geometry and Ring Theory in honor of Michael Artin, Part III (Antwerp, 1992)*, volume 8, pages 287–339, 1994.

[68] S. Hosono, H. Takagi, Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalence. *J. Differential Geom.* 104(3):443–497, 2016.

[69] D. Inoue, A. Ito, M. Miura Complete intersection Calabi–Yau manifolds with respect to homogeneous vector bundles on Grassmannians, arXiv:1607.07821, 2016.

[70] A.N. Parshin, I.R. Shafarevich, (eds.) Iskovskih, Prohorov. Algebraic geometry V. Fano varieties, Springer 249p.

[71] A. Iliev, K. Ranestad. K3 surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4):1455–1468, 2001.
[72] A. Iliev, L. Manivel. Fano manifolds of degree ten and EPW sextics, *Annales scientifiques de l'E.N.S.* Sér. 4, 44(3): 393–426, 2014.
[73] N. O. Ilten, J. Lewis, V. Przyjalkowski. Toric degenerations of Fano threefolds giving weak Landau-Ginzburg models. *J. Algebra*, 374:104–121, 2013.
[74] M Ide, S. Mukai. Canonical curves of genus eight. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 79(3):59–64, 2003.
[75] A. Iliev, D. Markushevich. Elliptic curves and rank-2 vector bundles on the prime Fano threefold of genus 7. *Adv. Geom.*, 4(3):287–318, 2004.
[76] A. Iliev, K. Ranestad. Geometry of the Lagrangian Grassmannian $LG(3,6)$ with applications to Brill-Noether loci. *Michigan Math. J.*, 53(2):383–417, 2005.
[77] A. Iliev, K. Ranestad. Addendum to "$K3$-surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds" [Trans. Am. Math. Soc. 353, No. 4, 1455–1468 (2001; Zbl 0966.14027)]. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 60(12):1265–1270, 2007.
[78] B. Jia, E. Sharpe, R. Wu Notes on nonabelian (0,2) theories and dualities. *J. High Energy Phys.* 17, 2014.
[79] T. Johnsen, A. L. Knutsen. *$K3$ projective models in scrolls*, volume 1842 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
[80] A. Ito, M. Miura, S. Okawa, K. Ueda The class of the affine line is a zero divisor in the Grothendieck ring: via G_2 Grassmannians. arXiv:1606.04210, 2016
[81] H. Jockers, V. Kumar, J. M. Lapan, D. R. Morrison, M. Romo. Nonabelian 2d gauge theories for determinantal Calabi-Yau varieties. *Journal of High Energy Physics*, 2012(11):1–47, 2012.
[82] H. Jockers, V. Kumar, J. M. Lapan, D. R. Morrison, M. Romo. Two-sphere partition functions and Gromov-Witten invariants. *arXiv:1208.6244*, 2012.
[83] P. E. Jupp. Classification of certain 6-manifolds. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 73:293–300, 1973.
[84] B. Jurke. Calabi–Yau explorer. http://cyexplorer.benjaminjurke.net.
[85] A. Kanazawa. Pfaffian Calabi-Yau threefolds and mirror symmetry. *Commun. Number Theory Phys.*, 6(3):661–696, 2012.
[86] G. Kapustka. Primitive contractions of Calabi–Yau threefolds. II. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 79(1):259–271, 2009.
[D1] G. Kapustka, M. Kapustka. Fiber products of elliptic surfaces with section and associated Kummer fibrations. *Internat. J. Math.*, 20(4):401–426, 2009.
[D3] G. Kapustka, M. Kapustka. Primitive contractions of Calabi–Yau threefolds. I. *Communications in Algebra*, 37(2):482–502, 2009.
[87] S. Katz, D. R. Morrison, M. Ronen Plesser. Enhanced gauge symmetry in type 11 string theory. *Nuclear Physics B*, 477(1):105–140, 1996.
[88] M. Kreuzer, H. Skarke. Complete classification of reflexive polyhedra in four dimensions. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 4(6):1209–1230, 2000.
[89] A. Kuznetsov, Y. Prokhorov, C. Shramov. Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds. arXiv:1605.02010, 2016.
[90] C. Lehn, M. Lehn, Ch. Sorger, D. van Straten. Twisted cubics on cubic fourfolds. *J. reine angew. Math.*, 2015.
[91] A. Kuznetsov. Derived categories of the Fano threefolds V_{12}. *Mat. Zametki*, 78(4):579–594, 2005.
[92] A. Kuznetsov. Hyperplane sections and derived categories. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 70(3):23–128, 2006.
[93] A. Kuznetsov. Homological projective duality. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105):157–220, 2007.
[94] A. Kuznetsov. Derived categories of Fano threefolds. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 264(Mnogomernaya Algebraicheskaya Geometriya):116–128, 2009.
[95] A. Kuznetsov, Küchle fivefolds of type c5. *Math. Z.* 284 (2016), no. 3-4, 1245–1278.
[96] N.-H. Lee. Calabi-Yau coverings over some singular varieties and new Calabi-Yau 3-folds with Picard number one. *Manuscripta Math.*, 125(4):531–547, 2008.
[97] Kühnel, M., *Calabi–Yau-threefolds with Picard number $\rho(X) = 2$ and their Kähler cone II*, Pacific. J. Math., Vol. 217, No. 1. , 2004, 115–137.
[98] N.-H. Lee. Calabi-Yau construction by smoothing normal crossing varieties. *Internat. J. Math.*, 21(6):701–725, 2010.

[99] E. Macri, P. Stellari, Fano varieties of cubic fourfolds containing a plane, *Math. Ann.*, 354:1147–1176, 2012.

[100] D. Markushevich. Rational Lagrangian fibrations on punctual Hilbert schemes of K3 surfaces. *Manuscripta Math.* 120(2):131–150., 2006.

[101] K. McKinnie, J. Sawon, S. Tanimoto, A. Várilly-Alvarado. Brauer groups on K3 surfaces and arithmetic applications, arXiv:1404.5460, 2014.

[102] M. Mella. Existence of good divisors on Mukai varieties. *J. Algebraic Geom.*, 8(2):197–206, 1999.

[103] J. C. Migliore. *Introduction to liaison theory and deficiency modules*, volume 165 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.

[104] G. Mongardi, M. Wandel. *Induced automorphisms on irreducible symplectic manifolds. J. Lond. Math. Soc.* (2), 92(1):123–143, 2015.

[105] S. Mori, S. Mukai, Classification of Fano 3-folds with $b_2 \geq 2$, *Manuscripta Math.* 36(2):147–162, 1981.

[106] Morin, Ugo Sui sistemi di piani a due a due incidenti, *Atti del Reale Istituto Venetodi Scienze, Lettere ed Arti LXXXIX*, pages 907–926, 1930.

[107] D. R. Morrison. Through the looking glass. In *Mirror symmetry, III (Montreal, PQ, 1995)*, volume 10 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 263–277. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[108] S. Mukai. Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or $K3$ surface. *Invent. Math.*, 77(1):101–116, 1984.

[109] S. Mukai. On the moduli space of bundles on $K3$ surfaces. I. In *Vector bundles on algebraic varieties (Bombay, 1984)*, volume 11 of *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, pages 341–413. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1987.

[110] S. Mukai. Curves, $K3$ surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10. In *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I*, pages 357–377. Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[111] S. Mukai. Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 86(9):3000–3002, 1989.

[112] S. Mukai. Curves and symmetric spaces. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 68(1):7–10, 1992.

[113] S. Mukai. Curves and Grassmannians. In *Algebraic geometry and related topics (Inchon, 1992)*, Conf. Proc. Lecture Notes Algebraic Geom., I, pages 19–40. Int. Press, Cambridge, MA, 1993.

[114] S. Mukai. New developments in the theory of Fano threefolds: vector bundle method and moduli problems [translation of Sūgaku 47 (1995), no. 2, 125–144; MR1364825 (96m:14059)]. *Sugaku Expositions*, 15(2):125–150, 2002. Sugaku expositions.

[115] S. Mukai. Curves and symmetric spaces, II. *Ann. of Math. (2)*, 172(3):1539–1558, 2010.

[116] Y. Namikawa. Deformation theory of Calabi-Yau threefolds and certain invariants of singularities. *J. Algebraic Geom.*, 6(4):753–776, 1997.

[117] Y. Namikawa. Global smoothing of Calabi-Yau threefolds. II. *Compositio Math.*, 125(1):55–68, 2001.

[118] Y. Namikawa and J. H. M. Steenbrink. Global smoothing of Calabi-Yau threefolds. *Invent. Math.*, 122(2):403–419, 1995.

[119] K. O'Grady. Higher-dimensional analogues of K3 surfaces, Current developments in algebraic geometry, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 59, C.U.P., 257–293, 2012.

[120] K. O'Grady. Desingularized moduli spaces of sheaves on a $K3$, *J. Reine Angew. Math.* 512:49–117, 1999.

[121] K. O'Grady. Pairwise incident planes and Hyperkähler four-folds, A celebration of Algebraic Geometry Clay Mathematics Proceedings, 18:553–566, 2013.

[122] K. O'Grady. Irreducible symplectic 4-folds and Eisenbud-Popescu-Walter sextics, Duke Math. J., 134(1):99–137, 2006.

[123] K. O'Grady, Double covers of EPW-sextics, *Michigan Math. J.* 62:143-184, 2013.

[124] C. Okonek. Notes on varieties of codimension 3 in $\mathbb{P}^N$. *Manuscripta Math.*, 84(3-4):421–442, 1994.

[125] K. Oguiso, J. Sakurai. Calabi-Yau threefolds of quotient type. *Asian J. Math.*, 5(1):43–77, 2001.

[126] G. Ottaviani. On Cayley bundles on the five-dimensional quadric. *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, 4(1):87–100, 1990.

[127] G. Ottaviani. On 3-folds in $\mathbb{P}^5$ which are scrolls. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 19(3):451–471, 1992.

[128] S. A. Papadakis. Kustin-Miller unprojection with complexes. *J. Algebraic Geom.*, 13(2):249–268, 2004.

[129] S. A. Papadakis, M. Reid. Kustin-Miller unprojection without complexes. *J. Algebraic Geom.*, 13(3):563–577, 2004.

[130] C. Peskine, L. Szpiro, Liaison des varietes algebriques. I, *Invent. Math.*, 26:271–302, 1974.

[131] P. Pragacz. Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, In *Topics in invariant theory* (Paris, 1989/1990), volume 1478 of *Lecture Notes in Math.*, pages 130-191. Springer, Berlin, 1991.

[132] P. Pragacz, J. Ratajski. Formulas for Lagrangian and orthogonal degeneracy loci; Q- polynomial approach. *Compositio Math.*, 107(1):11–87, 1997.

[133] M. I. Qureshi, B. Szendroi. Calabi–Yau threefolds in weighted flag varieties. Adv. High Energy Physics, 2012:547–317, 2012.

[134] K. Ranestad. Non-abelian Brill-Noether loci and the Lagrangian Grassmannian $LG(3,6)$. In *The Fano Conference*, pages 683–692. Univ. Torino, Turin, 2004.

[135] M. Reid. The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible. *Math. Ann.*, 278(1-4):329–334, 1987.

[136] M. Reid. Update on 3-folds. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002),* pages 513–524, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.

[137] M. Reid, Gorenstein in codimension 4: the general structure theory. Algebraic geometry in east Asia–Taipei 2011, 201–227, Adv. Stud. Pure Math., 65, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2015.

[138] E. A. Rødland. The Pfaffian Calabi–Yau, its mirror, and their link to the Grassmannian $G(2,7)$. *Compos. Math.*, 122(2):135–149, 2000.

[139] J. Sawon. Lagrangian fibrations on Hilbert schemes of points on K3 surfaces. *J. Algebraic Geom.* 16 (3):477–497, 2007.

[140] C. Schoen. On fiber products of rational elliptic surfaces with section. *Math. Z.*, 197(2):177–199, 1988.

[141] M. Schneider. Boundedness of low-codimensional submanifolds of projective space. *International Journal of Mathematics*, 3(03):397–399, 1992.

[142] F.-O. Schreyer, F. Tonoli. Needles in a haystack: special varieties via small fields, *Computations in algebraic geometry with Macaulay 2*,251–279, *Algorithms Comput. Math.*, 8, Springer, Berlin, 2002.

[143] H. Skarke. String dualities and toric geometry: An introduction. *Chaos, Solitons & Fractals*, 10(2):543–554, 1999.

[144] M. Shimizu, H. Suzuki. Open mirror symmetry for Pfaffian Calabi-Yau 3-folds. *J. High Energy Phys.*, (3):083, 49, 2011.

[145] A. Strominger. Massless black holes and conifolds in string theory. *Nuclear Phys. B*, 451(1-2):96–108, 1995.

[146] B. Sturmfels. Gröbner bases and convex polytopes, volume 8 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[147] I. Smith, R. P. Thomas, S.-T. Yau. Symplectic conifold transitions. *J. Differential Geom.*, 62(2):209–242, 2002.

[148] H. Takagi. On classification of Q-Fano 3-folds of Gorenstein index 2. I, II. *Nagoya Math. J.*, 167:117–155, 157–216, 2002.

[149] H. Takagi. Classification of primary Q-Fano threefolds with anti-canonical Du Val $K3$ surfaces. I. *J. Algebraic Geom.*, 15(1):31–85, 2006.

[150] G. Tian, On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$, *Invent. Math.* 89(2):225–246, 1987.

[151] F. Tonoli. Construction of Calabi–Yau 3-folds in $\mathbb{P}^6$. *J. Algebr. Geom.*, 13(2):209–232, 2004.

[152] C. van Enckevort and D. van Straten. Calabi–Yau operators database. available online on http://www.mathematik.uni-mainz.de/CYequations/db/.

[153] C. van Enckevort and D. van Straten. Monodromy calculations of fourth order equations of Calabi–Yau type. In *Mirror symmetry V. Proceedings of the BIRS workshop on Calabi–Yau varieties and mirror symmetry, December 6–11, 2003*, pages 539–559. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Somerville, MA: International Press, 2006.

[154] B. van Geemen. Some remarks on Brauer groups of K3 surfaces, *Adv. Math.*, 197(1):222–247, 2005.

[155] E. Viehweg. *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, volume 30 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[156] E., B. Vinberg, The two most algebraic K3 surfaces, *Math. Ann.*, 265(1):1–21, 1983.

[157] C. Voisin, *Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces K3, d'apres Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra,* Séminaire Bourbaki 2006/2007, Exposé 981, Société Mathématique de France., Astérisque 317:467-490, 2008.

[158] C. H Walter. Pfaffian subschemes. *J. Algebraic Geom.* 5(4):671–704, 1996.