Prof. dr hab. Krzysztof M. Pawałowski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu

Poznań, 09.08.2017

Recenzja dorobku naukowo-dydaktycznego i organizacyjnego dr. hab. Roberta A. Wolaka w postępowaniu o nadanie tytułu naukowego profesora w dziedzinie nauk matematycznych

Recenzja dorobku dotyczy tylko okresu 1993–2017, już po otrzymaniu przez Roberta A. Wolaka stopnia naukowego doktora habilitownego.

1. Wykształcenie wyższe. W latach 1974–1979, Robert A. Wolak studiował matematykę na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie. W 1979 roku uzyskał tytuł magistra po obronieniu pracy magisterskiej, której opiekunem naukowym i promotorem był prof. dr hab. Andrzej Zajtz.

W latach 1979–1982, Robert A. Wolak był doktorantem na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie. W 1982 roku obronił rozprawę doktorską na temat „*Characteristic classes of almost multifoliate structures*" oraz uzyskał stopień naukowy doktora. Opiekunem naukowym i promotorem rozprawy doktorskiej był prof. dr hab. Andrzej Zajtz.

W 1992 roku, na podstwie złożonych dziesięciu prac naukowych o wspólnym tytule „*Geometric structures on foliated manifolds*", uzyskał stopień naukowy doktora habilitowanego na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie.

2. Zatrudnienie. W 1982 roku, Robert A. Wolak (po uzyskaniu stopnia naukowego doktora) został zatrudniony na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie, jako pracownik naukowo-dydaktyczny. Od 2009 roku do chwili obecnej pracuje na stanowisku profesora nadzwyczajnego.

3. Staże zagraniczne. Robert A. Wolak odbył staże zagraniczne, między innymi w takich ośrodkach jak Université de Savoie, Chambery, Francja (1985–1986), Centre de Recerca Matemàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, Hiszpania (1987, 2010), Universidade de Santiago de Compostela, Hiszpania (1987-1989), Université d'Artois, Lens, Francja (2002, 2005, 2007), Edwin Schredinger Institute of Theoretical Physics, Vienna, Austria (2002, 2005), Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Niemcy (2003), Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Niemcy (2004), Université Bretagne Sud, Vannes, Francja.

4. Dorobek naukowy. Robert A. Wolak prowadzi badania naukowe dotyczące rozmaitości różniczkowalnych, dokładniej mówiąc – foliacji rozmaitości.

Foliacja rozmaitości jest jej podziałem na podrozmaitości – tzw. *liście*, które spełniają pewnien warunek zgodności. W klasycznym ujęciu teorii, liście mają ten sam wymiar, co wyraża się mówiąc, że foliacja jest *regularna*. Od kilkunastu lat bada się również foliacje *osobliwe*, zwane inaczej *singularnymi*, w których dopuszcza się liście o zmiennym wymiarze.

Robert A. Wolak bada związki pomiędzy foliacjami oraz innymi strukturami geometrycznymi na rozmaitościach. Jego prace naukowe (opublikowane już po uzyskaniu habilitacji) można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej z nich należą te, które kontynuują tematykę rozprawy habilitacyjnej, a do drugiej – prace podejmujące nowe zagadnienia, w których pojawiają się:

4.1) odwzorowania sfoliowane (zachowujące liście foliacji) określone pomiędzy rozmaitościami z foliacjami riemannowskimi (zob. [6] i [7]) oraz
4.2) kohomologie osobliwych foliacji riemannowskich (zob. [11]–[16]).

4.1. Odwzorowania sfoliowane pojawiają się we wspólnych badaniach, które prowadzili Robert A. Wolak i Jerzy J. Konderak, absolwent Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie, pracownik Università degli Studi di Bari Aldo Moro.

W swoich pracach [6] i [7] wprowadzili i badali odzworowania *tranwersalnie harmoniczne* pomiędzy rozmaitościami z foliacjami riemannowskimi. Transwersalna geometria foliacji to geometria wiązki normalnej. Biorąc za punkt wyjścia klasyczną definicję tensora naprężenia, autorzy określają normalny tensor naprężenia odwzorowania sfoliowanego jako cięcie wiązki normalnej.

W pracy *Foliated and associated geometric structures on foliated manifolds* z 1989 roku Robert A. Wolak (bazując na wcześniejszych wynikach, które uzyskał P. Molino) przestawił ogólną teorię sfoliowanych wiązek włóknistych nad rozmaitościami sfoliowanymi.Wiązka reperów wiązki normalnej, jak i wszystkie wiązki z nią stowarzyszone, dopuszczają foliację tego samego wymiaru co foliacja rozmaitości bazowej. To pozwala mówić o cięciach sfoliowanych.

Opierając się na tych rozważaniach autorzy pokazują, że normalny tensor naprężenia jest cięciem sfoliowanym pewnej wiązki wektorowej. Sfoliowane odwzorowanie nazywają *transwersalnie harmonicznym*, gdy zeruje się jego normalny tensor naprężenia. Jeśli $f\colon M \to N$ jest gładkim odwzorowaniem sfoliowanym pomiędzy dwoma rozmaitościami sfoliowanym M i N, to dla każdego wyboru atlasów na M i N odwzorowanie f indukuje odwzorowanie gładkie pomiędzy odpowiadającymi im rozmaitościami transwersalnymi, wyposażonymi w indukowane metryki riemannowskie. Odwzorowanie f jest transwersalnie harmoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie indukowane jest harmoniczne. Co więcej, własność ta nie zależy of wyboru atlasów na rozmaitościach M i N, co oznacza, że jest to typowa własność transwersalna.

Autorzy prac [6] i [7] badają też zależności pomiędzy harmonicznością oraz transwersalną harmonicznością odwzorowań sfoliowanych. Na konkretnych przykładach pokazują, że odwzorowanie harmoniczne nie musi być transwersalnie harmoniczne, jak również transwersalna harmoniczność odwzorowania nie musi pociągać jego harmoniczności. Autorzy wskazują jakie własności geometryczne foliacji zapewniają, że odwzorowanie harmoniczne jest również transwersalnie harmoniczne, a także – jakie zapewniają konkluzję odwrotną, że transwersalna harmoniczność odwzorowania pociąga jego harmoniczność.

Inspiracją do rozwinięcia tej teorii była rozpraca doktorska, którą napisał R. T. Smith, *Harmonic mappings between spheres*, Ph.D. Thesis, Warwick, 1972, promotor: James Eells. Jak wykazał R. T. Smith, odwzorowanie ekwiwariantne pomiędzy rozmaitościami riemannowskimi z izometrycznymi działaniami zwartej grupy Liego jest harmoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy indukowane odwzorowanie pomiędzy przestrzeniami orbit jest harmoniczne. Izometryczne działanie określa foliację riemannowską. Wobec tego wynik, który uzyskał R. T. Smith, oznacza, że w tym szczególnym przypadku odzorowanie jest harmoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy jest transwersalnie harmoniczne.

Teoria sfoliowanych odwzorowań transwersalnie harmonicznych zainteresowała sporą grupę geometrów w krajach takich jak Francja, Włochy, Rumunia, Chiny i Korea Południowa. W publikacjach tych geometrów często są cytowane wyniki uzyskane wspólnie przez Roberta A. Wolaka i Jerzego J. Konderaka. Jednak przedwczesna śmierć Konderaka (2005) zakończyła owocną współpracę nad nową tematyką badawczą.

Przez jakiś czas Robert A. Wolak współpracował z chińska matematyczką Y.-J. Chiang pracującą w USA, w wyniku czego ukazało się kilka wspólnych prac (zob. [1]–[4]) o innych typach odwzorowań sfoliowanych. Prace te oparte są na podobnym jak poprzednio schemacie rozumowania. Spotkały się jednak z trochę mniejszym oddźwiękiem geometrów, z wyjątkiem [1] o odwzorowaniach transwersalnie biharmonicznych.

4.2. Kohomologie osobliwych foliacji riemannowskich stanowią tematykę prac [11]–[16], które napisał Robert A. Wolak wspólnie z matematykami takimi jak Martin Saralegi-Aranguren i jego były doktorant, José Ignacio Royo Prieto.

Prace te starają się odpowiedzieć na dwa zasadnicze pytania dotyczące teorii *osobliwych foliacji riemannowskich.*

— Jaka jest „dobra" teoria kohomologii dla takich foliacji?

— Jak można charakteryzować minimalizowalność takich foliacji?[1]

W 1959 roku B. Reinhardt określił bazową kohomologię de Rhama dla rozmaitości sfoliowanych, przy czym twierdził, że dla rozmaitości zwartych kohomologie bazowe są skończenie wymiarowe i spełniają dualność Poincarégo. Dowód tego faktu miał luki i przez wiele lat próbowano to naprawić.

W 1981 roku Y. Carrière sklasyfikował 1-wymiarowe foliacje riemannowskie na 3-wymiarowych rozmaitościach zwartych. Jak się okazało, nie dla wszystkich takich foliacji kohomologie bazowe stopnia 2 (czyli stopnia maksymalnego) są niezerowe. W sytuacji, gdy są zerowe, kohomologia bazowa nie może spełniać dualności Poincarégo. Y. Carrière zauważył, że kohomologie bazowe stopnia 2 są nietrywialne jedynie dla foliacji zadanych przez pole Killinga, lub równoważnie, że foliacja jest minimalizowalna, a więc istnieje metryka riemannowska, względem której wszystkie liście są podrozmaitościami minimalnymi.

Wyniki te skłoniły Y. Carrière'a do postawienia hipotezy, że dla dowolnych riemannowskich foliacji regularnych na rozmaitościach zwartych następujące trzy warunki są ze sobą równoważne:

— komomologia bazowa maksymalnego rzędu (równego kowymiarowi foliacji) jest nietrywialna (jest izomorficzna z ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$),

— kohomologia bazowa spełnia dualności Poincarégo,

— foliacja jest minimalizowalna (ang. *taut*), tj. istnieje metryka riemannowska włóknista, względem której wszystkie liście są minimalne.

Udowodnienie hipotezy Carrière'a zajęło prawie dziesięć lat, podczas których wielu geometrów i topologów zajmujących się foliacjami poświęciło liczne prace różnym aspektom hipotezy Carrière'a dotyczącej foliacji regularnych.

Martin Saralegi-Aranguren, V. Miguel Molina, José Ignacio Royo Prieto oraz Robert A. Wolak zdecydowali przyjrzeć się hipotezie Carrière'a w przypadku, gdy foliacje są osobliwe. Ten przypadek okazał się dużo bardziej skomplikowany. Jak dotąd, uzyskano jedynie częściowe wyniki.

Na uwagę zasługuje rezultat z pracy [8], której autorami są V. Miguel Molina i Robert A. Wolak. Główny wynik tej pracy pokazuje, że dla foliacji osobliwej nie może istnieć adaptowana (włóknista) metryka riemannowska, względem której wszystkie liście foliacji są podrozmaitościami minimalnymi.

W swojej pracy doktorskiej José Ignacio Royo Prieto zaprezentował przykład pola Killinga z osobliwościami, a więc jednowymiarowej osobliwej foliacji, której kohomologia bazowa w najwyższym wymiarze znika. W przypadku regularnym izometryczne działanie grupy zapewnia minimalizowalność zdefiniowanej foliacji riemannowskiej. Zatem w przypadku osobliwym nawet izometryczność działania nie zapewnia nietrywialność kohomologii bazowej w najwyższym wymiarze.

Te wyniki wskazywały, że należy znaleźć nowe narzędzia kohomologiczne dla riemannowskich foliacji osobliwych, ponieważ tradycyjna kohomologia bazowa nie brała pod uwagę struktury zbioru punktów liści osobliwych.

W cyklu prac [13]–[16] Saralegi i Wolak definiują krok po kroku teorię bazowych kohomologii przecięć dla osobliwych foliacji riemannowskich i dowodzą ich podstawowych własności. Ukoronowaniem tego cyklu prac jest udowodnienie, że bazowa kohomologia przecięć foliacji riemannowskiej zadanej przez dowolne działanie isometryczne grupy Liego jest skończenie wymiarowa i ma własność dualności Poincarégo w wersji dla kohomologii przecięć.

Bazową kohomologię przecięć można było określić dzięki temu, że warstwy zdefiniowane jako zbiory punktów, przez które przechodzą liście o tym samym wymiarze, tworzą stratyfikację Whitneya, a warstwa główna jest otwarta i gęsta w rozmaitości. Pierwszą klasą foliacji, dla której udowodniono te własności, to singularne foliacje riemannowskie o zwartych liściach. Następną stanowią foliacje otrzymane w wyniku działania izometrycznego zwartej grupy Liego. Później to samo udowodniono bez założenia zwartości działającej grupy Liego.

[1] Minimalizowalność oznacza, że liście stają się podrozmaitościami minimalnymi.

Pod względem technicznym prace te są skomplikowane. W dużym stopniu wykorzystują własności indukowanej stratyfikacji na danej rozmaitości. Formy perwersyjne są definiowane dzięki istnieniu odpowiednich sfoliowanych lokalnych rozdmuchań. Ostateczne wyniki to efekt dokładnego opisu foliacji, jej struktury lokalnej wokół domknięcia liścia, a również wielokrotnego zastosowania ciągów dokładnych Mayera-Vietorisa dla kohomologii bazowej.

Kolejną grupę prac tworzą prace [11] oraz [12], których autorami są Martin Saralegi-Aranguren, José Ignacio Royo Prieto i Robert A. Wolak.

Autorzy poszukują singularnej wersji minimalizowalności foliacji riemannowskiej i jej kohomologicznej charakteryzacji. W przypadku foliacji regularnych przeszkodą do minimalizowalności foliacji riemannowskiej jest 1-klasa kohomologii bazowej, zwana *klasą Alvareza*. Jak pokazują autorzy prac [11] oraz [12], istnieje 1-klasa kohomologii bazowej, której znikanie zapewnia, że regularna foliacja riemannowska w każdej z warstw jest minimalizowalna. Tutaj podstawową trudnością jest fakt, że warstwy stratyfikacji rozmaitości nie są rozmaitościami zwartymi, za wyjątkiem warstw minimalnych.

Jak pokazali G. Cairns i R. Escobales w 1997 roku, klasa Alvareza foliacji nie jest dobrze zdefiniowana w przypadku foliacji riemannowskich na rozmaitościach otwartych. Dlatego też jednym z zasadniczych elementów poszukiwań było scharakteryzowanie tych foliacji riemannowskich, dla których klasa Alvareza jest dobrze określona. W tym celu autorzy wprowadzili pojęcie „*Compactly Embeddable Riemannian Foliation*", a następnie pokazali, że foliacje riemannowskie warstw są foliacjami tego właśnie typu, i że dla nich prawdziwa jest charakteryzacja minimalizowalności przy pomocy znikania klasy Alvareza.

W pracy z 2017 roku „*Cohomological Tautness of Singular Riemannian Foliations*" (dostępnej na ArXiv pod adresem https://arxiv.org/abs/1702.06631) autorzy pokazują, że istnieje 1-klasa kohomologii bazowej, indukująca w każdej warstwie jej klasę Alvareza. W związku z tym, na podstawie udowodnionego uprzednio twierdzenia o foliacjach w warstwach, zerowanie tej klasy jest równoważne minimalizowalności foliacji, rozumianej jako minimalizowalność w każdej warstwie. To twierdzenie uzyskane przez autorów można uznać za najpełniejsze możliwe uogólnienie do przypadku osobliwego kohomologicznej charakteryzacji minimalizowalności singularnych foliacji osobliwych.

Omówione prace odpowiadają w miarę kompletnie na naturalnie postawiony, ważny problem geometryczny dotyczący kohomologicznej charakteryzacji minimalizowalności osobliwych foliacji riemannowskich na rozmaitościach zwartych. Na inne konkretne pytanie odpowiada praca [5], której autorami są Małgorzata Józefowicz i Robert A. Wolak. Udowodniono w niej, że każda foliacja transwersalnie finslerowska jest riemannowska. W tym nurcie badań mieszczą się również ciekawe prace [9] oraz [10], których współautorami są Norbert Poncin, Fabian Radoux i Robert A. Wolak. Wspomnę też pracę [17], w której Robert A. Wolak przedstawia sfoliowane podejście do rozmaitości Sasakiego, koncentrując się na własnościach kohomologicznych tych rozmaitości. Własności te pozwalają na sformułowanie przeszkód do istnienia struktur Sasakiego na rozmaitościach zwartych. Inne prace Roberta A. Wolaka, jak dotąd, nie wzbudziły dużego zainteresowania geometrów zajmujących się teorią foliacji. Być może zastosowania mogą znaleźć niedawne jego publikacje o „sfoliowanej geometrii informacji".

Podsumowując tę część recenzji, stwierdzam, że wyniki naukowe, które uzyskał Robert A. Wolak po uzyskaniu stopnia naukowego doktora habilitowanego, świadczą o bardzo dużej jego dojrzałości matematycznej i stanowią znaczący wkład w teorię foliacji zarówno regularnych jak i osobliwych.

Za szczególnie ładne i wartościowe jego wyniki naukowe uważam te zawarte w pracach [6] i [7] o odwzorowaniach sfoliowanych, których współautorem jest Jerzy J. Konderak, i te w cyklu prac [11]–[16] dotyczących hipotezy Carrière'a dla foliacji osobliwych, których współautorami są Martin Saralegi-Aranguren oraz José Ignacio Royo Prieto.

5. Publikacje. Po uzyskaniu stopnia naukowego doktora habilitowanego Robert A. Wolak opublikował 40 prac naukowych, z których 12 napisał samodzielnie, a 28 przy współpracy kilku znanych specjalistów z teorii foliacji.

Prace ukazały się w znaczących czasopismach o zasięgu międzynarodowym, np. w takich jak Journal of Geometry, Differential Geometry and Applications, Journal of Geometry and Physics, Manuscripta Mathematica, Mathematische Zeitschrift, Monatshefte Mathematik, The Quarterly Journal of Mathematics, czy Proceedings of the American Mathematical Society.

Zgodnie z bazą MathSciNet prace naukowe kandydata do tytułu naukowego posiadają 177 cytowań przez 73 autorów, a Web of Science podaje 73 cytowań (bez uwzględnienia autocytowań).

6. Organizacja oraz udział w konferencjach. Robert A. Wolak jest bardzo zaangażowany w prace związane z organizacją życia naukowego. Był członkiem Executive Organizing Committee, 6th ECM, Kraków 2012. Współorganizował szereg konferencji międzynarodowych, na przykład:

1) Geometry and Topology of Manifolds, Krynica Górska 1999, 2001–2004.
2) Geometry and Topology of Manifolds, Będlewo 2005, Przemyśl–Lwów 2007.
3) Geometry and Topology of Manifolds, Kraków 2008
4) Geometry of Manifolds and Mathematical Physics, Kraków 2011.
5) Foliations, CRM Ballaterra, Barcelona 2010. Foliations, Łódź 2012.
6) Knots, Manifolds, and Group Actions: Słubice 2013.
7) Glances at Manifolds, Kraków 2015, 2016.

Pełna lista tych aktywności (w tym konferencji, w których brał udział) jest znacznie dłuższa i znajduje się w jego ankiecie oceny osiągnięć naukowych.

7. Popularyzacja nauki. Robert A. Wolak popularyzuje matematykę i sztukę organizując liczne wystawy, między innymi:

1) *Rękopisy i starodruki matematyczne ze zbiorów Biblioteki Jagiellońskiej*, wystawa towarzysząca kongresowi 6ECM, Kraków 2012.
2) *Matematyka na Uniwersytecie Jagiellońskim, rękopisy oraz książki matematyczne XIV–XX wieku*, Biblioteka Jagiellońska 2013.
3) *Formy i liczby. Inspiracje matematyczne w sztuce współczesnej*, Galeria ZPAP Pryzmat, Kraków 2012, 2014, 2016.

Opublikował też pracę *Mathematik in der zeitgenössischen bildenden Kunst*, Mitt. Dtsch. Math.-Ver. 23 (2015), 160–168, dotyczącą matematyki we współczesnej sztuce. Prowadził wykłady z historii matematyki i wykłady z matematyki dla biologów i geologów na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie.

8. Wypromowani doktorzy. Robert A. Wolak wypromował dwóch doktorów.

1) Beniamino Cappelletti, tytuł rozprawy: *Montano, Legendrian foliations on almost S-manifolds*, Università degli Studi di Bari Aldo Moro 2006.
2) Andrzej Czarnecki, tytuł rozprawy: *Dwa przykłady podniesień sfoliowanych struktur geometrycznych*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 2015.

9. Konkluzja. Stwierdzam, że Rober A. Wolak posiada ważne wyniki naukowe, *znacznie przekraczające wymagania stawiane w postępowaniu habilitacyjnym*, które lokują go w gronie wybitnych specjalistów z teorii foliacji. Specjalną uwagę zwraca też jego działalność dydaktyczna, organizacja wielu szkół dla studentów i doktorantów, jak również praca w komitetach naukowych czy organizacyjnych międzynarodowych konferencji. Cenna dla środowiska matematycznego jest też jego działalność popularyzująca matematykę i sztukę. Biorąc to wszystko pod uwagę, jestem całkowicie przekonany, że Robert A. Wolak w pełni zasługuje na tytuł naukowy profesora w dziedzinie nauk matematycznych.

Krzysztof Pawałowski

prof. dr hab. Krzysztof M. Pawałowski

Literatura

[1] Chiang, Y.-J., R. Wolak, R. A., *Transversally biharmonic maps between foliated Riemannian manifolds*, Int. J. Math. 19 (2008), 981–996.

[2] Chiang, Y.-J., R. Wolak, R. A., *Transversal wave maps and transversal exponential wave maps*, Journal of Geometry 104 (2013), 443–459.

[3] Chiang, Y.-J., R. Wolak, R. A., *Transversally f-harmonic and transversally f-biharmonic maps between foliated manifolds*, JP Journal of Geometry and Topology 13 (2013), 93–117.

[4] Chiang, Y.-J., R. Wolak, R. A., *Transversally Harmonic Morphisms Between Foliated Riemannian Manifolds*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 40 (2016), 1–13.

[5] Józefowicz, M. Wolak, R. A., *Finslerian foliations of compact manifolds are Riemannian*, Differ. Geom. Appl. 26 (2008), 224–226.

[6] Konderak, J. J., Wolak, R. A., *Transversally harmonic maps between manifolds with Riemannian foliation*, Quart. J. Math. 54 (2003), 335–354.

[7] Konderak, J. J., Wolak, R. A., *Some remarks on transversally harmonic maps*, Glasgow Math. J. 50 (2008), 1–16.

[8] Molina, V., Wolak, R. A., *Minimal singular Riemannian foliations*, C. R. Math. Sci. Paris 342 (2006), 33–36.

[9] Poncin, N., Radoux, F., Wolak, R. A., *A first approximation for quantization of singular spaces*, J. Geom. Phys. 59 (2009), 503–518.

[10] Poncin, N., Radoux, F., Wolak, R. A., *Equivariant quantization of orbifolds*, J. Geom. Phys. 60 (2010), 1103–1111.

[11] Royo Prieto, J. I., Saralegi-Aranguren, M., Wolak, R. A., *Top dimensional group of the basic intersection cohomology for singular Riemannian foliations*, Bull. Polish Acad. Sci, Mathematics, 53 (2005), 429–440.

[12] Royo Prieto, J. I., Saralegi-Aranguren, M., Wolak, R. A., *Tautness for Riemannian foliations on non-compact manifolds*, Manuscriptca Math. 126 (2008), 177–200.

[13] Saralegi-Aranguren, M., Wolak, R. A., *BIC of a conical fibration*, Math. Notes 77 (2005), 213–231.

[14] Saralegi-Aranguren, M., Wolak, R. A., *The BIC of a singular foliation defined by an abelian group of isometries*, Ann. Polon. Math. 89 (2006), 203–246.

[15] Saralegi-Aranguren, M., Wolak, R, A., *Finiteness of the basic intersection cohomology of a Killing foliation*, Math. Zeitschrift 272 (2012), 443–457.

[16] Saralegi-Aranguren, M., Wolak, R. A., *Poincaré duality of the basic intersection cohomology of a Killing foliation*, Monatshefte Math. 180 (2016), 145–166.

[17] Wolak, R. A., *Sasakian structures, a foliated approach*, Demonstratio Math. 50 (2017), 72–82.