dr hab. Mirosław Kowaluk
Instytut Informatyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Warszawa, 31.07.2017

Recenzja osiągnięcia naukowego doktora Bartosza Walczaka zatytułowanego
Ograniczenia w problemach kolorowania grafów i wymiaru porządków.

Osiągnięcie naukowe doktora Bartosza Walczaka składa się z pięciu publikacji:

[A1] T. Krawczyk, B. Walczak, *On-line approach to off-line coloring problems on graphs with geometric representations*, Combinatorica (w druku),

Wersja konferencyjna: *Coloring relatives of interval overlap graphs via on-line games*, ICALP 2014 (LNCS 8572), str. 738-750,

[A2] A. Rok, B. Walczak, *Outerstring graphs are χ-bounded*, SoCG 2014, str. 136-143,

[A3] J. Pach, B. Walczak, *Decomposition of multiple packings with subquadratic union complexity*, Combinatorics, Probablity and Computing 25 (1), 2016, str. 145-153,

[A4] B. Walczak, *Triangle-free geometric intersection graphs with no large independent sets*, Discrete and Computational Geometry 53 (1), 2015, str. 221-225,

[A5] B. Walczak, *Minors and dimension*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2017, str. 668-689,

Wersja konferencyjna: *Minors and dimension*, SODA 2015, str. 1698-1707.

W powyższych pracach autor przedstawił szereg oszacowań dla problemów grafowych. Gama omawianych zagadnień jest bardzo szeroka, poczynając od kolorowalności wybranych grafów reprezentowanych geometrycznie ([A1], [A2]), poprzez badanie minimalnego stopnia wierzchołka ([A3]) lub maksymalnego rozmiaru zbioru niezależnego ([A4]) w niektórych grafach przecięć, a kończąc na analizie wymiaru pewnych porządków o ograniczonej wysokości ([A5]). W każdej z tych prac w mniejszym lub większym stopniu pojawia się argumentacja związana z kolorowalniem wierzchołkowym w rozpatrywanych grafach, dzięki któremu przeprowadzane dowody zyskują na przejrzystości. Z drugiej strony, w przedstawionych pracach została zaprezentowana wielka różnorodność zastosowanych metod dowodzenia. Czytając prace wchodzące w skład osiągnięcia naukowego zauważa się swobodę i biegłość habilitanta w operowaniu nimi. Wykorzystując rozległą wiedzę z prezentowanej dziedziny autor tworzy własne rozwiązania niejednokrotnie opierając się o wyniki poprzedników.

W pracy [A1] rozpatrywane są ograniczenia dolne i górne liczby chromatycznej pewnych grafów reprezentowanych geometrycznie, tzn. grafów przecięć i nachodzeń, w których, dla danej rodziny obiektów geometrycznych, wierzchołki odpowiadające poszczególnym obiektom są połączone krawędzią, gdy odpowiednie obiekty przecinają się (pierwszym przypadku) lub nachodzą na siebie, ale nie zawierają się jeden w drugim (w drugim przypadku). Otrzymane wyniki dotyczą obiektów takich jak włókna przedziałowe (tzn. nieujemne funkcje ciągłe określone na przedziałach domkniętych w R i osiągające wartość 0 na końcach tych przedziałów), poddrzewa i prostokąty. Metoda zastosowana w celu udowodnienia postawionych tez polega na tym, że zamiast analizowanego grafu badany jest graf gry on-line, polegającej na tym, że dany graf budowany jest krok po kroku przez dwóch graczy: *algorytm*, który stara się pomalować graf używając jak najmniejszej liczby kolorów oraz *adwersarza*, który buduje graf zgodnie z zadanymi regułami i stara się zmusić przeciwnika do użycia jak największej liczby kolorów. Modelem rozgrywki nazywamy układ wszystkich strategii adwersarza. W ten sposób zostały zdefiniowane trzy gry on-line: *COCO(k)* (dla grafu nieporównywalności odpowiadającego modelowi grafu włókien przedziałowych o nieprzecinających się dziedzinach), *CIOV(k)* (dla czystego, tzn. takiego, że suma żadnych dwóch nachodzących na siebie przedziałów nie zawiera trzeciego, grafu nachodzeń) oraz *CABS(k)* (dla czystego grafu nachodzeń poddrzew), gdzie parametr k oznacza maksymalny rozmiar kliki w grafie. Jeśli algorytm używa co najwyżej c kolorów w czasie gry, to każdy graf gry ma liczbę chromatyczną nie większą niż c. Podobnie, gdy adwersarz zmusi algorytm do użycia co najmniej c kolorów, to istnieje graf gry o liczbie chromatycznej nie mniejszej niż c. Wiedząc, że zależność między liczbą chromatyczną grafu gry a liczbą chromatyczną badanego grafu jest co najwyżej logarytmiczna, autor mógł określić następujące oszacowania (gdzie ω w O_ω lub Θ_ω oznacza stałą liczbę klikową):

Dla każdego grafu włókien przedziałowych $\chi = O(2^{\omega}\binom{\omega+1}{2})$.

Dla każdego grafu włókien przedziałowych wolnego od nachodzeń $\chi \leq \binom{\omega+1}{2}$.

Istnieją grafy włókien przedziałowych wolne od nachodzeń, dla których $\chi = \binom{\omega+1}{2}$.

Dla każdego grafu nachodzeń poddrzew $\chi=O_\omega((\log\log n)^{\binom{\omega}{2}})$.

Dla każdego czystego grafu nachodzeń poddrzew $\chi=O_\omega((\log\log n)^{\omega-1})$.

Istnieją czyste grafy nachodzeń poddrzew, dla których $\chi=\Theta_\omega((\log\log n)^{\omega-1})$. *Co za tym idzie, istnieją grafy przecięć krzywych, dla których* $\chi=\Theta_\omega((\log\log n)^{\omega-1})$.

Dla każdego grafu nachodzeń prostokątów $\chi=O_\omega((\log\log n)^{\omega-1})$.

Dla każdego czystego grafu nachodzeń prostokątów $\chi=O_\omega(\log\log n)$.

Dla każdego czystego grafu nachodzeń prostokątów $\chi_3=O_\omega(1)$, *gdzie* χ_k *oznacza liczbę kolorów potrzebną do pomalowania grafu taką, że żadna jednokolorowa składowa nie zawiera kliki* K_k.

Również praca [A2] dotyczy oszacowania z góry liczby chromatycznej, tym razem w przypadku grafów przecięć krzywych uziemionych, tzn. leżących we wspólnej półpłaszczyźnie i mających jeden koniec na brzegu tej półpłaszczyzny. Autorzy pokazują, że klasa tych grafów jest χ-ograniczona, tzn. istnieje funkcja $f\colon N \to N$ taka, że dla każdego grafu G z tej klasy zachodzi $\chi(G) \leq f(\omega(G))$. W tym celu definiują układy linii ograniczających obszary sąsiadujące z brzegiem półpłaszczyzny i dowodzą, że jeśli odpowiadające im grafy mają dużą liczbę chromatyczną, to wymusza to istnienie odpowiednio dużej kliki. Następnie pokazują, że dowolna rodzina krzywych uziemionych również ma tę własność.

W pracy [A3] określono ograniczenie górne na stopień wierzchołka grafu przecięć rodziny zwartych, łukowo spójnych zbiorów na płaszczyźnie będącej skończonym *k*-upakowaniem, tzn. dowolne $k+1$ elementów tej rodziny ma puste przecięcie. Przy założeniu, że istnieje funkcja $f: N \rightarrow N$ taka, że $f(n)=o(n^2)$ oraz każda podrodzina X danego *k*-upakowania generuje co najwyżej $f(|X|)$ dziur, autorzy wykazują, że istnieje wierzchołek grafu przecięcia danego upakowania, który ma stały stopień zależny tylko od f i k. Wynika to z twierdzenia Foxa i Pacha (*Combinatorics, Probability and Computing* 19 (2010)), które dowodzi istnienia wierzchołka o stopniu zależnym od t w przypadku, gdy dany graf nie zawiera podgrafu $K_{t,t}$. W problemie rozpatrywanym w pracy [A3] brak takiego podgrafu jest skutkiem udowodnionych ograniczeń jakim w tym przypadku podlegają zbiory niezależne oraz liczba dziur, które mógłby generować podgraf $K_{t,t}$.

Kolejna praca ([A4]) poświęcona jest oszacowaniu rozmiaru maksymalnego zbioru niezależnego w grafach przecięć odcinków (*L*-figur, okręgów, prostokątnych ramek o bokach równoległych do osi współrzędnych) niezwierających trójkątów. Wykazano tu istnienie odpowiednich grafów, dla których rozmiar maksymalnego zbioru niezależnego wynosi $O(n/\log \log n)$, co obala hipotezę Foxa i Pacha sugerującą, że rozmiar maksymalnego zbioru niezależnego w grafach przecięć krzywych jest liniowy względem rozmiaru grafu przy założeniu stałego rozmiaru maksymalnej kliki. Autor indukcyjnie konstruuje kolejne grafy przecięć o coraz większym rozmiarze spełniające założone oszacowania. W celu uproszczenia opisu budowanego grafu oraz łatwiejszego oszacowania rozmiaru maksymalnego zbioru niezależnego tworzony jest graf pomocniczy, którego wierzchołkom nadaje się wagi odpowiadające liczbie leżących blisko siebie równoległych odcinków, których przecięcia wyznaczają odpowiedni graf przecięć.

Ostatnią pozycją osiągnięcia naukowego doktora Bartosza Walczaka jest praca [A5]. Autor dowodzi w niej, że dla każdego grafu H porządki o ograniczonej wysokości, których grafy pokryć (graf o zbiorze wierzchołków odpowiadających elementom porządku i zbiorze krawędzi $\{xy: x < y$ i dla żadnego elementu porządku z nie zachodzi $x < z < y\}$) nie zawierają grafu H jako minoru topologicznego (grafu, który można otrzymać z danego grafu przez usuwanie wierzchołków, usuwanie dowolnych krawędzi i ściąganie krawędzi, których co najmniej jeden koniec ma stopień 2), mają ograniczony wymiar (minimalną liczbę liniowych rozszerzeń porządku, których przecięcie daje z powrotem ten porządek). W tym celu wykonywanych jest kilka redukcji z wykorzystaniem odpowiednio spreparowanych gadżetów, które sprowadzają problem wyjściowy do podobnego zagadnienia dla porządków o ograniczonej wysokości, których grafy pokryć mają ograniczoną szerokość (co zostało udowodnione w zbiorowej pracy w *Combinatorica* 30 (2016)). Również w pracy [A5] można zauważyć związki z problematyką kolorowalności grafów, gdyż jeden z podstawowych punktów dowodu opiera się na fakcie, że wymiar porządku jest równy minimalnej liczbie kolorów wystarczającej do pokolorowania (uporządkowanych) par nieporównywalnych w tym porządku w sposób unikający jednokolorowych cykli naprzemiennych (tzn. zbiorów par nieporównywalnych $\{(x_1,y_1), \ldots, (x_k,y_k)\}$ takich, że $x_1 \leq y_2, \ldots, x_k \leq y_1$). Brak takich cykli w skonstruowanym grafie autor wykazuje stosując dowód przez zaprzeczenie.

Zarówno publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego doktora Bartosza Walczaka, jak też inne jego prace (których w sumie jest ponad dwadzieścia), stanowią istotny wkład w rozwój tej dziedziny. Wiele z tych publikacji jest samodzielnych, a z przedstawionych dokumentów wynika, że również w przypadku prac współautorskich odgrywał on wiodącą rolę w badaniach. Większość z nich została opublikowana w czasopismach z bazy *Journal Citation Reports*, m. in. w cieszących się dużą renomą *Combinatorica* i *Discrete and Computational Geometry*. Liczba cytowań nie jest duża, ale trzeba wziąć pod uwagę fakt, że prezentowane prace są stosunkowo świeże oraz że wielu autorów powołuje się na publikacje konferencyjne. Poza tym liczba cytowań w bazie *WoS* od czasu złożenia dokumentów przez habilitanta wzrosła o 28% (z 25 do 32).

Doktor Bartosz Walczak uczestniczył i uczestniczy w wielu projektach badawczych. W jednym z nich pełni, a w dwóch innych pełnił funkcję kierownika. W ramach swoich badań współpracuje z naukowcami (niejednokrotnie wybitnymi, jak np. prof. János Pach) zarówno w kraju, jak i za granicą (Szwajcaria, Czechy, Stany Zjednoczone). Habilitant ma również istotne osiągnięcia na polu popularyzatorskim w postaci wielu referatów wygłoszonych na konferencjach tematycznych. Jego aktywność jako młodego naukowca została dostrzeżona i uhonorowana nominacją do finałowej trójki konkursu Open Mind w 2014 roku, stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla wybitnych młodych naukowców w 2016 roku oraz nagrodą Rektora Uniwersytetu Jagiellońskiego za osiągnięcia naukowe w roku 2016. Trochę mniej okazale prezentują się dokonania habilitanta na polu dydaktycznym. Ale trzeba zwrócić uwagę, że znaczną część okresu, jaki upłynął po obronie doktoratu spędził poza granicami Polski i miał utrudniony kontakt ze studentami.

Podsumowując, bardzo wysoko oceniam zarówno zbiór publikacji stanowiący osiągnięcie naukowe, jak i cały dorobek naukowy habilitanta. Uważam, że z nadmiarem spełniają one wymagania stawiane przez ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym. Dlatego wnoszę o dopuszczenie doktora Bartosza Walczaka do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Mirosław Kowaluk