

AUTOREFERAT

1. IMIĘ I NAZWISKO

Bartosz Walczak

2. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

- Doktor nauk matematycznych, dyscyplina: informatyka, Uniwersytet Jagielloński, 2012
Tytuł rozprawy: *Graph sharing games: strategies and algorithms*
- Magister informatyki, Uniwersytet Jagielloński, 2008

3. DOTYCHCZASOWE ZATRUDNIENIE W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- od 2015: Uniwersytet Jagielloński, adiunkt
- 2014–2015: Georgia Institute of Technology, Visiting Assistant Professor (9 miesięcy)
- 2014: Uniwersytet Karola w Pradze, staż naukowy w ramach programu *Mobilność Plus* (6 miesięcy)
- 2013–2014: École Polytechnique Fédérale de Lausanne, postdoc (12 miesięcy)
- 2012–2015: Uniwersytet Jagielloński, asystent (3 lata, w tym 27 miesięcy urlopu naukowego)

4. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (DZ. U. Z 2016 R. POZ. 882 ZE ZM. W DZ. U. Z 2016 R. POZ. 1311.)

(a) Tytuł osiągnięcia naukowego:

Ograniczenia w problemach kolorowania grafów i wymiaru porządków

(b) Lista prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego:

- [A1] Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
On-line approach to off-line coloring problems on graphs with geometric representations,
Combinatorica, praca w druku, 41 stron, DOI: 10.1007/s00493-016-3414-x.
Wersja konferencyjna¹:
Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
Coloring relatives of interval overlap graphs via on-line games,
41st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2014),
Part I, *Lecture Notes in Computer Science* 8572, 738–750, Springer, 2014.
- [A2] Alexandre Rok, Bartosz Walczak,
Outerstring graphs are χ -bounded,
30th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG 2014), 136–143, ACM, 2014.
- [A3] János Pach, Bartosz Walczak,
Decomposition of multiple packings with subquadratic union complexity,
Combinatorics, Probability and Computing 25 (1), 145–153, 2016.
- [A4] Bartosz Walczak,
Triangle-free geometric intersection graphs with no large independent sets,
Discrete and Computational Geometry 53 (1), 221–225, 2015.
- [A5] Bartosz Walczak,
Minors and dimension,
Journal of Combinatorial Theory, Series B 122, 668–689, 2017.

¹Odniesienia do konkretnych twierdzeń numerowane są według wersji opublikowanej w czasopiśmie.

Wersja konferencyjna:

Bartosz Walczak,

Minors and dimension,

26th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2015), 1698–1707, SIAM, 2015.

- (c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania:

4.1. Wprowadzenie. Problemy kolorowania zajmują centralne miejsce w teorii grafów od początku jej istnienia. Wiele wysiłku badawczego poświęcono zrozumieniu czynników, które powodują, że liczba chromatyczna rośnie, oraz wypracowaniu oszczędnych algorytmów kolorowania. Algorytmy takie mają duże znaczenie w zastosowaniach kolorowania grafów, na przykład do problemów przydziału zasobów. Dokładne obliczanie liczby chromatycznej jest jednak bardzo trudnym zadaniem — na przykład problem rozstrzygania, czy dany graf ma liczbę chromatyczną co najwyżej 3, jest NP-trudny [36].

Najprostsza strukturą świadczącą o dużej liczbie chromatycznej grafu jest duża klika, chociaż nawet grafy bez trójkątów mogą mieć dowolnie dużą liczbę chromatyczną. Maksymalna liczba chromatyczna, jaką może mieć n -wierzchołkowy graf bez trójkątów, wynosi $\Theta(\sqrt{n/\log n})$ [5, 60]. Z drugiej strony grafy reprezentowane za pomocą szczególnych modeli często mają liczbę chromatyczną ograniczoną od góry względem maksymalnego rozmiaru kliki. Dzieje się tak na przykład dla rozmaitych geometrycznych grafów przecięć — gdy wierzchołki są obiektami geometrycznymi konkretnego rodzaju (przedziałami, prostokątami itp.), a krawędzie łączą pary przecinających się obiektów. Pewne rodzaje takich obiektów pozwalają konstruować grafy przecięć bez trójkątów o dowolnie dużej liczbie chromatycznej, która jednak rośnie wraz z liczbą wierzchołków znacznie wolniej, niż w przypadku ogólnych grafów. Na przykład dla grafów przecięć odcinków najlepsza znana konstrukcja unikająca trójkątów osiąga liczbę chromatyczną $\Theta(\log \log n)$ [B1], podczas gdy najlepsze znane ograniczenie górne wynosi $O(\log n)$ [96].

Mój wkład w tę tematykę, obejmujący w szczególności wyniki przedstawione w pracach [A1] (z Krawczykiem), [A2] (z Rokiem, który był moim magistrantem na EPFL) oraz [A3] (z Pachem), polega głównie na wypracowaniu górnych i dolnych ograniczeń liczby chromatycznej w klasach grafów reprezentowanych geometrycznie — w klasie grafów przecięć krzywych na płaszczyźnie (ang. string graphs) i w różnych jej podklasach. Ograniczenia te są stałe lub asymptotyczne względem liczby wierzchołków przy założeniu, że maksymalny rozmiar kliki jest ograniczony. W pracy [A1] opracowujemy stosunkowo ogólną metodę uzyskiwania takich ograniczeń, która opiera się na analizie konkurencyjności algorytmów kolorowania on-line. Liczba chromatyczna jest w bliskim związku z maksymalnym rozmiarem zbioru niezależnego — ograniczeniami tego drugiego parametru w grafach przecięć krzywych zajmuję się w pracy [A4]. Wszystkie te wyniki omówione będą w sekcji 4.2.

W teorii częściowych porządków (lub krótko — porządków) parametrem o podobnym znaczeniu, jakie ma liczba chromatyczna w teorii grafów, jest wymiar [99]. Wymiar porządku wynosi co najwyżej tyle, ile jego szerokość [49], i nie jest ograniczony względem wysokości. Wiele twierdzeń teorii grafów dotyczących kolorowań i klik ma odpowiedniki w teorii porządków, w których rolę liczby chromatycznej pełni wymiar, a rolę klik pełnią tak zwane przykłady standardowe (szczególne porządki o wysokości 2 i dowolnie dużym wymiarze). Na przykład istnieją porządki o dowolnie dużym wymiarze niezawierające przykładow standardowych o wymiarze 3, a problem rozstrzygania, czy dany porządek ma wymiar co najwyżej 3, jest NP-trudny [105].

Przez analogię do przedstawionych powyżej rozważań o grafach naturalne wydaje się pytanie, jakiego rodzaju porządki P mają wymiar ograniczony względem maksymalnego wymiaru przykładu standardowego zawierającego się w P jako podporządek. Przypuszczalnie jest to własność

odpowiednio „rzadkich” klas porządków, ale jej udowodnienie w nietrywialnych przypadkach było dotychczas poza naszym zasięgiem. Niemniej dokonał się ostatnio znaczny postęp w ograniczaniu wymiaru „rzadkich” porządków za pomocą innych parametrów, na przykład wysokości. Następujące twierdzenie udowodnione w pracy [A5] stanowi mój główny wkład w tę tematykę: wymiar porządków, których grafy pokryć (ang. cover graphs) nie zawierają ustalonego grafu jako minoru topologicznego, jest ograniczony względem wysokości. Wynik ten omówiony będzie w sekcji 4.3.

4.2. Kolorowanie grafów reprezentowanych geometrycznie.

4.2.1. *Kontekst i motywacja.* Poprawnym kolorowaniem grafu G nazywamy przypisanie kolorów wierzchołkom grafu G unikające jednokolorowych krawędzi. Liczba chromatyczna grafu G , oznaczana przez $\chi(G)$ ², jest to minimalna liczba kolorów wystarczająca do poprawnego pokolorowania grafu G . Liczba klikowa grafu G , oznaczana przez $\omega(G)$, jest to maksymalny rozmiar kliku w grafie G . Graf G jest wolny od trójkątów, jeżeli $\omega(G) \leq 2$. W każdym grafie spełniona jest nierówność $\chi \geq \omega$, ale też znanych jest wiele konstrukcji grafów o dowolnie dużej liczbie chromatycznej wolnych od trójkątów.

Graf G jest doskonały, jeżeli każdy podgraf indukowany H grafu G (z całym grafem G włącznie) spełnia równość $\chi(H) = \omega(H)$. Grafy doskonałe są bardzo dobrze zbadane. Wiadomo na przykład, że w grafach doskonałych problemy maksymalnej kliku, maksymalnego zbioru niezależnego i minimalnego poprawnego kolorowania można rozwiązać w czasie wielomianowym [41], a tak zwane silne twierdzenie o grafach doskonałych [18] podaje ich dokładną charakterystykę strukturalną. Gyárfás [43] zaproponował następujące pojęcie osłabiające warunek doskonałości: klasa grafów \mathcal{G} jest χ -ograniczona, jeżeli istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, taka że każdy graf $G \in \mathcal{G}$ spełnia nierówność $\chi(G) \leq f(\omega(G))$. Postawił on także wiele ambitnych problemów dotyczących χ -ograniczoności, z których niektóre są nadal szeroko otwarte.

Naturalne przykłady grafów doskonałych oraz χ -ograniczonych klas grafów wywodzą się z reprezentacji geometrycznych. Dla skończonej rodziny zbiorów (np. obiektów geometrycznych) \mathcal{F} zdefiniować możemy następujące dwa grafy o zbiorze wierzchołków \mathcal{F} :

- *graf przecięć* rodziny \mathcal{F} , w którym krawędzie łączą pary przecinających się zbiorów w \mathcal{F} ,
- *graf nachodzeń* rodziny \mathcal{F} , w którym krawędzie łączą pary zbiorów w \mathcal{F} , które się nachodzą, czyli przecinają się, ale żaden nie zawiera się w drugim.

W ten sposób, rozważając rodziny \mathcal{F} zbiorów pewnego ustalonego typu (kształtu), otrzymujemy rozmaite klasy grafów. Podstawowe przykłady to klasy *grafów przedziałowych* i *grafów nachodzeń przedziałów*, czyli odpowiednio grafów przecięć i grafów nachodzeń przedziałów domkniętych w \mathbb{R} . Grafy nachodzeń przedziałów można równoważnie zdefiniować jako grafy przecięć cięciw pewnego okręgu (ang. circle graphs)³. Klasy grafów przecięć i grafów nachodzeń spójnych figur na płaszczyźnie są podklasami klasy grafów przecięć krzywych (ang. string graphs)⁴.

Grafy przedziałowe są doskonałe, podobnie jak grafy przecięć poddrzew pewnego drzewa, które uogólniają grafy przedziałowe i są równoważne grafom cięciwowym [37]. Geometryczne grafy przecięć w dwóch lub wielu wymiarach zwykle nie są już doskonałe, ale często nadal tworzą χ -ograniczone klasy. Typowym przykładem χ -ograniczonej klasy grafów, które nie są doskonałe, jest klasa grafów nachodzeń przedziałów. Grafy te spełniają ograniczenie $\chi = O(\omega^2 4^\omega)$ udowodnione przez Gyárfása [42] i następnie poprawione do postaci $\chi = O(2^\omega)$ przez Kostoczkę i Kratochvíla [69]. Innym przykładem jest klasa grafów przecięć prostokątów o bokach równoległych do osi

²Dla uproszczenia będziemy pisać χ zamiast $\chi(G)$, gdy wybór konkretnego grafu G jasno wynika z kontekstu. Podobną konwencję stosować będziemy do innych parametrów grafowych.

³Klasy grafów, które są izomorficznie równoważne, będziemy uważać za tożsame, nawet jeżeli zgodnie z formalną definicją wierzchołkami grafów w tych klasach są obiekty innych typów.

⁴Aby uzyskać reprezentację geometrycznego grafu przecięć/nachodzeń jako grafu przecięć krzywych, zastępujemy figurę reprezentującą wierzchołek przez krzywą, która tę figurę „wypełnia”/„otacza”.

układu współrzędnych⁵, które spełniają ograniczenie $\chi = O(\omega^2)$ udowodnione przez Asplunda i Grünbauma [6]. Z drugiej strony istnieją konstrukcje grafów nachodzeń przedziałów i grafów przecięć prostokątów o liczbie chromatycznej $\Theta(\omega \log \omega)$ [67] i odpowiednio 3ω [68] i są to jak dotąd najlepsze znane ograniczenia dolne. Problemy zmniejszenia obu tych luk w ograniczeniach, wykładniczej w pierwszym i kwadratowej w drugim przypadku, są fascynujące, ale bardzo trudne — dokonano w nich dotychczas niewielkiego tylko postępu. W pierwszym przypadku Kostoczek i Milans [70] udowodnili, że grafy nachodzeń przedziałów, które są *czyste* (tj. mają reprezentacje za pomocą przedziałów, takich że żadne dwa nachodzące się przedziały nie zawierają trzeciego w swoim przecięciu), spełniają nierówność $\chi \leq 2\omega - 1$. Najbardziej zauważalnym postępem w drugim przypadku było uzyskanie przez Chalermsooka [15] ograniczenia $\chi = O(\omega \log \omega)$ dla grafów przecięć prostokątów, takich że żaden nie zawiera się w drugim.

Wspomniana wyżej praca Asplunda i Grünbauma [6] zapoczątkowała badania nad problemami poprawnego kolorowania geometrycznych grafów przecięć na płaszczyźnie. Następnie Malesińska, Piskorz i Weißenfels [73] wykazali, że grafy przecięć kół spełniają nierówność $\chi \leq 6\omega - 6$, zaś Peeters [86] udowodnił ograniczenie $\chi \leq 3\omega - 2$ dla kół jednostkowych. Oba te wyniki zostały uogólnione przez Kima, Kostoczkę i Nakprasita [61], którzy wykazali, że grafy przecięć jednokładnych (jednostajnie przeskalowanych i przesuniętych) kopii lub tylko przesuniętych kopii ustalonego zbioru zwartego i wypukłego w \mathbb{R}^2 spełniają nierówności $\chi \leq 6\omega - 6$ lub odpowiednio $\chi \leq 3\omega - 2$. Ponadto skonstruowali oni grafy przecięć jednostkowych kół, dla których $\chi = 3\omega - 2$. Kostoczek i Kratochvíl [69] udowodnili, że klasa grafów przecięć wielokątów wpisanych w okrąg jest χ -ograniczona, uogólniając wynik Gyárfása dla grafów przecięć cięciw. Ograniczenie, które uzyskali, ma postać $\chi = O(2^\omega)$.

Do niedawna bardzo niewiele wiadomo było o klasach geometrycznych grafów przecięć, które nie są χ -ograniczone. Burling [13] skonstruował wolne od trójkątów grafy przecięć prostopadłościanów w \mathbb{R}^3 , których krawędzie są równoległe do osi układu współrzędnych, o dowolnie dużej liczbie chromatycznej. Erdős zadał pytanie, czy klasa grafów przecięć odcinków na płaszczyźnie jest χ -ograniczona (patrz [43, problem 1.9] lub [12, problem 9.6.2]). Takie samo pytanie zadali Gyárfás i Lehel [44] dla grafów przecięć L-figur⁶ oraz Kratochvíl i Nešetřil dla grafów przecięć dowolnych krzywych (patrz [71]). Scott [91] postawił jeszcze ogólniejszą hipotezę — że każda klasa grafów, w której zabronione są indukowane podpodziały (ang. subdivisions) ustalonego grafu, jest χ -ograniczona⁷. Wierzone raczej, że wszystkie te pytania mają odpowiedzi twierdzące, dopóki w pracach [B1, B2] nie udowodniliśmy, że jest inaczej. Oto najogólniejsza postać tego wyniku.

Twierdzenie 1 ([B2, twierdzenie 1]). *Niech X będzie zwartym i lukowo spójnym zbiorem w \mathbb{R}^2 , który nie jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje rodzina n zbiorów, z których każdy otrzymany jest z X przez niezależne skalowanie w poziomie i w pionie oraz przesunięcie, taka że graf przecięć tej rodziny jest wolny od trójkątów i ma liczbę chromatyczną $\Theta(\log \log n)$.*

Twierdzenie to stosuje się na przykład do grafów przecięć odcinków (patrz też [B1]), L-figur, elips o osiach równoległych do osi układu współrzędnych oraz *prostokątnych ramek* — brzegów prostokątów o bokach równoległych do osi układu współrzędnych (patrz też [B3]). Grafy przecięć prostokątnych ramek są to dokładnie grafy nachodzeń prostokątów, więc uogólniają do \mathbb{R}^2 grafy nachodzeń przedziałów w taki sam sposób, w jaki grafy przecięć prostokątów uogólniają grafy przedziałowe.

⁵Będziemy odtąd domyślnie zakładać, że prostokąty mają boki równoległe do osi układu współrzędnych.

⁶L-figura składa się z jednego poziomego i jednego pionowego odcinka, które układają się w kształt litery L.

⁷Podpodziałem grafu H nazywamy dowolny graf otrzymany z grafu H przez wstawienie dodatkowych wierzchołków na krawędziach. Nietrudno zauważyć, że jeżeli H jest 1-podpodziałem (czyli podpodziałem z jednym dodatkowym wierzchołkiem na każdej krawędzi) jakiegoś grafu nieplanarnego, to grafy przecięć krzywych na płaszczyźnie nie zawierają indukowanych podpodziałów grafu H .

Twierdzenie 1 realizowane jest przez wspólną dla wszystkich wyborów zbioru X konstrukcję grafów o liczbie chromatycznej $\Theta(\log \log n)$ wolnych od trójkątów. Nazywamy ją *konstrukcją kanoniczną*⁸. Takie same grafy, jak w konstrukcji kanonicznej, powstają także w konstrukcji Burlinga dla prostopadłościanów w \mathbb{R}^3 . Rodzi się naturalne pytanie, czy konstrukcja kanoniczna jest „najlepsza możliwa”, na przykład czy $\Theta(\log \log n)$ jest maksymalną liczbą chromatyczną, jaką może mieć n -wierzchołkowy graf przecięć krzywych na płaszczyźnie wolny od trójkątów. Wynik Suka [96] prowadzi do wniosku, że grafy przecięć odcinków (ogólniej — grafy przecięć krzywych x -monotonicznych⁹, z których każde dwie przecinają się co najwyżej raz) spełniają ograniczenie $\chi = O_\omega(\log n)$ ¹⁰. Najlepsze znane ograniczenie górne dla grafów przecięć dowolnych krzywych pochodzi od Foxa i Pacha [32] i ma postać $\chi = (\log n)^{O(\log \omega)}$.

Twierdzenie 1 stanowi punkt wyjścia rozważań w pracach [A1, A2, A3, A4], które omówione zostaną w poszczególnych sekcjach 4.2.2–4.2.5. W rozważaniach tych wyróżnić można następujące ogólne i mniej więcej niezależne od siebie kierunki:

- dowodzenie ograniczeń liczby chromatycznej χ względem liczby klikowej ω dla klas grafów przecięć krzywych (por. twierdzenia 2, 6 i 7),
- dowodzenie asymptotycznych ograniczeń liczby chromatycznej χ względem liczby wierzchołków n dla klas grafów przecięć krzywych o ograniczonej liczbie klikowej ω (por. twierdzenia 3 i 4),
- dowodzenie twierdzeń analogicznych do twierdzenia 1 lub ich zaprzeczeń dla innych parametrów grafowych, które mają związek z liczbą chromatyczną (por. twierdzenia 5 i 8).

Wszystkie powyższe kierunki związane są z problemem ograniczania liczby krawędzi w tak zwanych grafach k -quasi-planarnych. *Grafem geometrycznym/topologicznym* nazywamy graf narysowany na płaszczyźnie w taki sposób, że krawędzie mają postać odcinków/krzywych łączących odpowiednie wierzchołki. Taki graf jest k -quasi-planarny, jeżeli na jego rysunku nie ma k krawędzi przecinających się każda z każdą. Znana hipoteza mówi, że grafy geometryczne/topologiczne k -quasi-planarne o n wierzchołkach mają $O_k(n)$ krawędzi (patrz m.in. [12, problem 9.6.1] lub [85]). Dla $k = 2$ stwierdza ona dobrze znaną własność grafów planarnych — że mają liniowo wiele krawędzi. Hipoteza ta została również potwierdzona dla $k = 3$ [3, 84] oraz dla $k = 4$ [2], ale dla $k \geq 5$ pozostaje otwarta. Valtr [103] ograniczył liczbę krawędzi w k -quasi-planarnych grafach geometrycznych przez $O_k(n \log n)$. Najlepsze znane ograniczenia górne liczby krawędzi w k -quasi-planarnych grafach topologicznych wynoszą $n(\log n)^{O(\log k)}$ w ogólności [31, 32], $O_k(n \log n)$ w przypadku krawędzi x -monotonicznych [102], $O_k(n \log n)$ w przypadku, gdy pary krawędzi przecinają się w co najwyżej jednym punkcie [B5], oraz $2^{\alpha(n)^\nu} n \log n$ w przypadku, gdy pary krawędzi przecinają się w co najwyżej t punktach, gdzie α oznacza funkcję odwrotną do funkcji Ackermanna, a ν zależy od k i t [B5].

Przedstawiony problem ma następujący związek z kolorowaniem geometrycznych grafów przecięć. Niech G będzie grafem geometrycznym/topologicznym k -quasi-planarnym. Rozważmy rodzinę krawędzi grafu G w takiej postaci, w jakiej narysowane są na płaszczyźnie, ale skracając je lekko na końcach, żeby uniknąć przecięć krawędzi we wspólnych wierzchołkach, a nie stracić innych przecięć. Graf przecięć $G_\mathcal{E}$ tak otrzymanej rodziny odcinków/krzywych \mathcal{E} ma ograniczoną liczbę klikową (mniejszą niż k). Ponadto graf G ma $O(n\chi(G_\mathcal{E}))$ krawędzi — wierzchołki każdego koloru w poprawnym kolorowaniu grafu $G_\mathcal{E}$ jako krawędzie grafu G tworzą planarny podgraf grafu G , więc jest ich $O(n)$. W ten sposób na przykład wyżej wymienione ograniczenia Valtra [102, 103] można wyprowadzić jako wnioski z twierdzenia, że grafy przecięć krzywych x -monotonicznych spełniają ograniczenie $\chi = O_\omega(n \log n)$, pochodzącego od Suka [96]. Żeby takie rozumowanie

⁸Pojęcie to nie było używane w żadnej z cytowanych prac, ale w dalszej części tego opracowania pozwoli nam łatwiej odwoływać się do omawianej tu konstrukcji.

⁹Krzywa jest x -monotoniczna, jeżeli każdą pionową prostą przecina w co najwyżej jednym punkcie.

¹⁰Notacji takiej jak O_ω , Θ_ω itp. używamy do oznaczenia asymptotyki ze względu na n przy ustalonej wartości ω .

zadziałało, kolorowanie grafu G_ε nawet nie musi być poprawne — wystarczy, jeżeli unika ono jednokolorowych klik rozmiaru 4, gdyż hipoteza o grafach k -quasi-planarnych jest udowodniona dla $k = 4$.

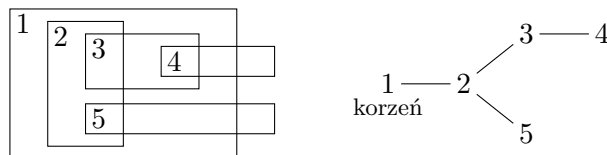
4.2.2. Podejście on-line. Wersja on-line problemu kolorowania na tym polega, że graf, który ma zostać pokolorowany, konstruowany jest stopniowo wierzchołek po wierzchołku i należy przydzielać kolory wierzchołkom natychmiast po ich pojawieniu się, nie znając końcowego grafu. Do celów analizy konkurencyjności modeluje się taki problem za pomocą gry między algorytmem kolorującym zwanym *algorytmem on-line*, który stara się użyć możliwie niewielu kolorów, a *adwersarzem*, który odpowiednio budując graf, próbuje zmusić algorytm on-line do użycia możliwie wielu kolorów. Efektywność algorytmu on-line mierzy się zwykle jako maksymalną liczbę kolorów, jaką potrafi wymusić adwersarz, w porównaniu z optymalnym rozwiązaniem off-line (liczbą chromatyczną końcowego grafu) lub z jakimś jego ograniczeniem dolnym (np. liczbą klikową końcowego grafu) [54]. Oto dwa wyniki tego rodzaju, które będą miały związek z dalszą dyskusją w tej sekcji:

- (1) Bean [8] oraz Gyárfás i Lehel [45] wskazali *kanoniczną strategię*¹¹ adwersarza, która wymusza k kolorów na lesie o co najwyżej 2^{k-1} wierzchołkach. Odpowiada to liczbie kolorów używanej przez algorytm kolorowania first-fit¹², która wynosi $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ dla lasu o n wierzchołkach. Optymalne rozwiązanie off-line wynosi 2.
- (2) Kierstead i Trotter [59] udowodnili, że maksymalna liczba kolorów, jaką adwersarz może wymusić na grafie przedziałowym (ujawnianym wraz z reprezentacją za pomocą przedziałów lub bez niej) wynosi dokładnie $3\omega - 2$. Optymalne rozwiązanie off-line wynosi ω .

Konstrukcja geometrycznych grafów przecięć o dużej liczbie chromatycznej wolnych od trójkątów, o której mówi twierdzenie 1, została najpierw uzyskana dla grafów przecięć prostokątnych ramek (grafów nachodzeń prostokątów). Nasze próby pokolorowania grafów nachodzeń prostokątów wolnych od trójkątów za pomocą ograniczonej liczby kolorów doprowadziły do wyodrębnienia następującego szczególnego przypadku jako jądra problemu: dla każdych dwóch nachodzących się prostokątów prawy bok jednego przecina górny i dolny bok drugiego. Rodzinę prostokątów o tej własności nazywamy *skierowaną w prawo*. Na rodzinie prostokątów \mathcal{R} skierowanej w prawo wskazać można naturalną strukturę lasu o następujących własnościach:

- jeżeli prostokąt R_1 zawiera lewy bok prostokąta R_2 , to R_1 jest przodkiem R_2 ,
- jeżeli R_1 jest przodkiem R_2 , to rzut R_1 na pionową oś układu współrzędnych zawiera rzut R_2 na tę oś oraz lewy bok R_1 leży na lewo od lewego boku R_2 .

Oto przykład konkretnej rodziny \mathcal{R} i pochodzącej od niej struktury lasu (z jednym drzewem):



Rozważmy grę on-line, w której prostokąty znajdujące się na pewnej ścieżce od korzenia do liścia ujawniane są w kolejności od korzenia do liścia, a algorytm on-line ma pokolorować poprawnie graf nachodzeń tych prostokątów. Przez rzutowanie na poziomą oś gra ta redukuje się do gry on-line, w której przedziały ujawniane są w porządku rosnących lewych końców, a algorytm on-line ma pokolorować poprawnie graf nachodzeń tych przedziałów. Algorytm (deterministyczny) on-line zastosowany do każdej ścieżki od korzenia do liścia z osobna konstruuje

¹¹Znów nie jest to standardowe pojęcie, ale będziemy odwoływać się do niego w dalszej części tego opracowania.

¹²Algorytm *first-fit* przyjmuje, że kolory mają numery $1, 2, \dots$, i zawsze używa najmniejszego dostępnego koloru (niewykorzystanego na uprzednio pokolorowanych sąsiadach).

poprawne kolorowanie grafu nachodzeń rodziny \mathcal{R} . Rozumowanie to można teraz odwrócić — strategię adwersarza w tej drugiej grze można „zakodować” do postaci rodziny prostokątów skierowanej w prawo, której graf nachodzeń ma liczbę chromatyczną *równą* liczbie kolorów wymuszonej przez adwersarza. Była to kluczowa obserwacja prowadząca do dowodu twierdzenia 1 dla grafów nachodzeń prostokątów. W grze on-line adwersarz ma strategię wymuszającą k kolorów za pomocą co najwyżej 2^{k-1} przedziałów — jest to adaptacja strategii kanonicznej Beana na drzewach. „Zakodowanie” tej strategii prowadzi dokładnie do konstrukcji kanonicznej — grafu nachodzeń $2^{O(k)}$ prostokątów o liczbie chromatycznej k wolnego od trójkątów. Taki argument dowodzący twierdzenia 1 dla grafów nachodzeń prostokątów jest naszkicowany w pracy [B2] i przedstawiony bardziej szczegółowo w pracy [B3]. Dowód twierdzenia 1, który faktycznie występuje w pracy [B2] (i w pracy [B1] dla grafów przecięć odcinków), opiera się na bezpośrednim argumentie indukcyjnym wyprowadzonym z przedstawionego powyżej rozumowania.

W pracy [A1] formalizujemy i uogólniamy „podejście on-line” do problemów kolorowania grafów oraz stosujemy je do wypracowania kolejnych ograniczeń górnych i dolnych liczby chromatycznej w klasach geometrycznych grafów przecięć i nachodzeń. Dla dowolnego problemu kolorowania grafów on-line P definiujemy klasę *grafów rozgrywki*, które pełnią rolę „zakodowanych” strategii adwersarza w problemie P , oraz formalizujemy zależność między kolorowaniem on-line i off-line, która stanowi sedno „podejścia on-line”: liczba chromatyczna grafu rozgrywki jest *równa* liczbie kolorów, jaką wymusza „zakodowana” strategia adwersarza [A1, lematy 2.1 i 2.2]. Definicja grafu rozgrywki w pracy [A1] uogólnia definicję *grafu rozgrywki na przedziałach* wprowadzoną w pracy [B3] dla gry on-line na grafach nachodzeń przedziałów przedstawionej w poprzednim akapicie. W pracy [A1] stosujemy „podejście on-line” do następujących klas grafów przecięć krzywych: grafów włókien przedziałowych, grafów nachodzeń poddrzew i grafów nachodzeń prostokątów.

Grafy włókien przedziałowych (ang. interval filament graphs, wprowadzone przez Gavrilę [38]) są to grafy przecięć nieujemnych funkcji ciągłych określonych na przedziałach domkniętych w \mathbb{R} i osiągających wartość 0 na końcach tych przedziałów. Jeżeli dziedziny tych funkcji są wzajemnie nienachodzącymi się (tj. zagnieżdżonymi bądź rozłącznymi) przedziałami, to taki graf włókien przedziałowych nazywamy *wolnym od nachodzeń* (ang. domain-non-overlapping). Dla grafów włókien przedziałowych o liczbie klikowej ω podajemy ograniczenie górne liczby chromatycznej, a dla takich grafów wolnych od nachodzeń — *optymalne* ograniczenie górne liczby chromatycznej.

Twierdzenie 2 ([A1, twierdzenie 1.1]).

- (1) *Każdy graf włókien przedziałowych spełnia ograniczenie $\chi = O(2^\omega \binom{\omega+1}{2})$.*
- (2) *Każdy graf włókien przedziałowych wolny od nachodzeń spełnia ograniczenie $\chi \leq \binom{\omega+1}{2}$.*
- (3) *Istnieją grafy włókien przedziałowych wolne od nachodzeń, dla których $\chi = \binom{\omega+1}{2}$.*

Za pomocą „podejścia on-line” wyprowadzamy twierdzenie 2 (2) i (3) z wyniku Felsnera [28] dotyczącego podziału on-line porządków, które podawane są w sposób narastający, na łańcuchy. Następnie sprowadzamy twierdzenie 2 (1) do twierdzenia 2 (2), wykorzystując ograniczenie $\chi = O(2^\omega)$ dla grafów nachodzeń przedziałów [69].

Większość wysiłku koncepcyjnego i technicznego w pracy [A1] skierowana jest w stronę dwóch klas grafów, które nie są χ -ograniczone — grafów nachodzeń poddrzew¹³ (wprowadzonych przez Gavrilę [38]) oraz grafów nachodzeń prostokątów. Graf nachodzeń prostokątów/poddrzew jest *czysty*, jeżeli ma reprezentację za pomocą prostokątów/poddrzew, taką że żaden prostokąt/żadne poddrzewo nie leży w całości w przecięciu dwóch innych nachodzących się prostokątów/poddrzew. Dla n -wierzchołkowych grafów nachodzeń prostokątów/poddrzew o liczbie klikowej ω podajemy asymptotyczne ograniczenie górne liczby chromatycznej, a dla takich grafów, które są czyste — *asymptotycznie optymalne* ograniczenie górne liczby chromatycznej względem n .

¹³Graf G jest *grafem nachodzeń poddrzew*, jeżeli istnieje drzewo T , takie że graf G jest grafem nachodzeń pewnych podzbiorów zbioru wierzchołków drzewa T .

Twierdzenie 3 ([A1, twierdzenie 1.2]).

- (1) *Każdy graf nachodzeń poddrzew spełnia ograniczenie $\chi = O_\omega((\log \log n)^{\binom{\omega}{2}})$.*
- (2) *Każdy czysty graf nachodzeń poddrzew spełnia ograniczenie $\chi = O_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$.*
- (3) *Istnieją czyste grafy nachodzeń poddrzew, dla których $\chi = \Theta_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$. Co za tym idzie, istnieją grafy przecięć krzywych, dla których $\chi = \Theta_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$.*

Twierdzenie 4 ([A1, twierdzenie 1.3]).

- (1) *Każdy graf nachodzeń prostokątów spełnia ograniczenie $\chi = O_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$.*
- (2) *Każdy czysty graf nachodzeń prostokątów spełnia ograniczenie $\chi = O_\omega(\log \log n)$.*

Twierdzenie 1 zapewnia ograniczenie dolne pasujące do twierdzenia 4 (2), czyli konstrukcję grafów nachodzeń prostokątów, dla których $\omega = 2$ i $\chi = \Theta(\log \log n)$ ¹⁴.

Dowód twierdzenia 4 (2) ma podobną strukturę do dowodu przedstawionego w pracy [B3] dla przypadku $\omega = 2$. Zaczyna się od sprowadzenia twierdzenia 4 (2) do analogicznego stwierdzenia o czystych grafach nachodzeń prostokątów skierowanych w prawo, które są równoważne *czystym grafom rozgrywki na przedziałach*. Aby udowodnić twierdzenie 3 (2) i (3) za pomocą „podejścia on-line”, zaczynamy od zdefiniowania specyficznej gry on-line na grafach włókien przedziałowych i od wykazania, że jej grafy rozgrywki są równoważne czystym grafom nachodzeń poddrzew. W ten sposób sprowadzamy twierdzenie 3 (2) i (3) oraz twierdzenie 4 (2) do stwierdzeń ograniczających liczbę kolorów, jaką adversarz potrafi wymusić w odpowiednich grach on-line. Opracowujemy algorytmy kolorowania on-line, które używają $O_\omega(\log n)$ kolorów w grze odpowiadającej czystym grafom nachodzeń prostokątów oraz $O_\omega((\log n)^{\omega-1})$ kolorów w grze odpowiadającej czystym grafom nachodzeń poddrzew. Stosując te algorytmy oraz ideę dekompozycji heavy-light pochodzącą od Sleatora i Tarjana [94], wyprowadzamy ograniczenia $\chi = O_\omega(\log \log n)$ i odpowiednio $\chi = O_\omega((\log \log n)^{\omega-1})$ dla grafów rozgrywki, które kończą dowody twierdzenia 3 (2) i twierdzenia 4 (2). Żeby uzyskać twierdzenie 3 (3), opracowujemy strategię adversarza, która wymusza $\Theta_\omega((\log n)^{\omega-1})$ kolorów w grze on-line odpowiadającej czystym grafom nachodzeń poddrzew. To tutaj „podejście on-line” ujawnia swoją pełną moc — wskazanie bezpośredniej konstrukcji świadczącej o prawdziwości twierdzenia 3 (3) bez odniesień do gier on-line byłoby bardzo trudne. W końcu twierdzenie 3 (1) sprowadzamy do twierdzenia 3 (2), a twierdzenie 4 (1) do twierdzenia 4 (2). Do tego celu opracowujemy algorytm przeszukiwania grafu uogólniający klasyczne przeszukiwanie wszerz, który nazywamy *k-clique breadth-first search*.

Ważnym składnikiem dowodu twierdzenia 4 (2) naszkicowanego powyżej jest algorytm on-line rozdzielający przedziały prezentowane w grze na ograniczoną liczbę rodzin wolnych od trójkątów, z których każda jest następnie kolorowana on-line $O(\log n)$ kolorami przez algorytm first-fit. Pomijając ten ostatni krok, otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 5 ([A1, twierdzenie 1.4]). *Zbiór wierzchołków każdego czystego grafu nachodzeń prostokątów można podzielić na $O_\omega(1)$ podzbiorów wolnych od trójkątów.*

Twierdzenie 5 związane jest z hipotezą o grafach *k*-quasi-planarnych opisaną pod koniec sekcji 4.2.1. Stwierdzenie analogiczne do twierdzenia 5 może być prawdziwe na przykład dla grafów przecięć odcinków, a z tego już wynikałoby, że grafy geometryczne *k*-quasi-planarne o *n* wierzchołkach mają $O_k(n)$ krawędzi dla każdego *k*. Z drugiej strony, jak wyjaśniamy w pracy [A1], konstrukcja z twierdzenia 3 (3) powoduje, że stwierdzenie analogiczne do twierdzenia 5 jest nieprawdziwe dla grafów przecięć dowolnych krzywych (które mogą przecinać się dowolnie wiele razy), a zatem takie podejście nie może doprowadzić do dowodu hipotezy o grafach *k*-quasi-planarnych w jej pełnej ogólności.

¹⁴Konstrukcja z twierdzenia 1, gdzie *X* jest prostokątną ramką, produkuje czyste grafy nachodzeń prostokątów; patrz [B3].

Oprócz tego w pracy [A1] wskazujemy dwa proste zastosowania „podejścia on-line” do dowodów pewnych znanych już ograniczeń. Przedstawiamy konstrukcję grafów przecięć prostokątów o liczbie klikowej ω i chromatycznej $3\omega - 2$ [A1, propozycja 3.1], którą wyprowadzamy ze wspomnianego na początku sekcji 4.2.2 wyniku Kiersteada i Trottera [59] o kolorowaniu on-line grafów przedziałowych. Konstrukcja ta jest tylko odrobinę gorsza od konstrukcji osiągającej $\chi = 3\omega$ ogłoszonej (ale nie opublikowanej) w pracy [68]. Wyprowadzamy także na nowo wspomnianą wcześniej konstrukcję grafów przecięć prostopadłościanów w \mathbb{R}^3 o liczbie chromatycznej $\Theta(\log \log n)$ wolnych od trójkątów, pierwotnie wskazaną przez Burlinga [13]. Wykorzystujemy do tego pochodzącą od Erlebacha i Fiali [27] strategię adwersarza w problemie kolorowania on-line grafów przecięć prostokątów, która ponownie jest adaptacją strategii kanonicznej Beana na lasach.

4.2.3. Grafy przecięć krzywych uziemionych. W latach 1990, kiedy sądzono, że klasa grafów przecięć krzywych jest χ -ograniczona, McGuinness [75, 76] zaproponował zawęzić ten problem do grafów przecięć *krzywych uziemionych*, czyli takich, które leżą we wspólnej półpłaszczyźnie i mają po jednym końcu na brzegu tej półpłaszczyzny. Zapoczątkował w ten sposób owocny kierunek badań, który doprowadził do odkrycia stosunkowo ogólnych klas grafów przecięć krzywych, które są χ -ograniczone, oraz do lepszego zrozumienia zasadniczych cech konstrukcji kanonicznej.

Najpierw w pracy [75] McGuinness udowodnił, że klasa grafów przecięć L-figur o nieskończonych pionowych ramionach¹⁵ jest χ -ograniczona. W pracy [76] udowodnił, że wolne od trójkątów grafy przecięć 1-przecinających się¹⁶ uziemionych krzywych mają ograniczoną liczbę chromatyczną. Suk [96] udowodnił χ -ograniczoność klasy grafów przecięć 1-przecinających się uziemionych krzywych x -monotonicznych, które leżą w półpłaszczyźnie ograniczonej pionową prostą. W pracy [B4] uogólniliśmy wyniki McGuinnessa i Suka, dowodząc, że klasa grafów przecięć 1-przecinających się uziemionych krzywych (bez założenia o x -monotoniczności) w półpłaszczyźnie jest χ -ograniczona. W końcu w pracy [A2] uogólniamy ten ostatni wynik do grafów przecięć dowolnych krzywych uziemionych (nie ograniczając liczby przecięć między parami krzywych).

Twierdzenie 6 ([A2]). *Klasa grafów przecięć uziemionych krzywych jest χ -ograniczona.*

Chociaż z twierdzenia 2 (1) i z twierdzenia 6 płynie wspólny wniosek, że klasa grafów włókien przedziałowych jest χ -ograniczona, te dwa twierdzenia udowodnione są za pomocą zupełnie innych metod. Idea dowodu twierdzenia 6 wywodzi się z prac McGuinnessa i innych wyżej wymienionych. W dowodzie tym myślimy o liczbie chromatycznej jako o mierze „rozmiaru” rodziny krzywych — rodzina jest „duża” lub „mała” jeżeli ma dużą lub małą liczbę chromatyczną¹⁷. Zakładamy więc, że \mathcal{F} jest „bardzo dużą” rodziną uziemionych krzywych o liczbie klikowej k , podczas gdy każda rodzina uziemionych krzywych o liczbie klikowej mniejszej niż k jest „mała” (przez indukcję), po czym staramy się dojść do sprzeczności, znajdując w rodzinie \mathcal{F} klikę rozmiaru $k + 1$. Osiągamy to za pomocą serii lematów, w których twierdzimy, że odpowiednio „duże” podrodziny rodziny \mathcal{F} muszą zawierać rozmaite „struktury”, czyli zbiory krzywych przecinających się w jakiś bardzo szczególny sposób (ostatecznie — klikę rozmiaru $k + 1$). Wiele argumentów używanych w pracach [76, 96, B4] do wyszukiwania takich struktur w dużym stopniu wykorzystuje warunek, że każde dwie krzywe z rodziny \mathcal{F} mają co najwyżej jeden wspólny punkt. W przeciwieństwie do nich jedynym podstawowym narzędziem, z jakiego możemy korzystać w pracy [A2] do wymuszania szczególnej struktury przecięć, jest topologiczne twierdzenie Jordana o krzywej. Dla przykładu rozważmy dwa obszary X i Y oraz „dużą” rodzinę $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, taką że dla każdej krzywej $a \in \mathcal{A}$ istnieje krzywa $s_a \in \mathcal{F}$ o tej własności, że a and s_a wspólnie oddzielają od siebie obszary X i Y

¹⁵Aby z nich zrobić uziemione krzywe, wystarczy rozważyć półpłaszczyznę ograniczoną od góry przez dostatecznie wysoko położoną poziomą prostą.

¹⁶Rodzina krzywych jest 1-przecinająca się, jeżeli każde dwie z nich mają co najwyżej jeden wspólny punkt.

¹⁷Pojęcia teorii grafów takie jak *liczba chromatyczna* czy *liczba klikowa* zastosowane do rodziny krzywych \mathcal{F} odnoszą się do grafu przecięć rodziny \mathcal{F} .

w danej półpłaszczyźnie. Wówczas jakakolwiek krzywa w \mathcal{F} łącząca X i Y musi przeciąć krzywą s_a dla „wielu” krzywych $a \in \mathcal{A}$, ponieważ przecina „mało” krzywych należących do \mathcal{A} (te, które przecina, mają liczbę klikową mniejszą niż k). W ten sposób wymusiliśmy na krzywej w \mathcal{F} , żeby przecinała całkiem konkretną grupę innych krzywych. Podstawowymi cegiełkami tworzącymi dowód twierdzenia 6 są argumenty w stylu Ramseya składające się z prostych kroków, takich jak ten opisany powyżej, powtarzanych wielokrotnie (czasami ogromną liczbę razy).

Łatwym wnioskiem z twierdzenia 6, otrzymanym przez rekurencyjne dzielenie na pół za pomocą pionowych prostych, jest ograniczenie $\chi = O_\omega(\log n)$ dla grafów przecięć krzywych x -monotonicznych. Prowadzi ono do alternatywnego dowodu ograniczenia $O_k(n \log n)$ liczby krawędzi w grafach topologicznych k -quasi-planarnych o x -monotonicznych krawędziach, pierwotnie używanego przez Valtra [102]. Twierdzenie 6 oraz [B5, lemat 19] prowadzą do wniosku, że klasa grafów przecięć krzywych o tej własności, że jedna z krzywych przecina każdą inną w dokładnie jednym punkcie, jest χ -ograniczona. W pracy [A2] stawiamy także następującą hipotezę, która uogólnia to ostatnie stwierdzenie: dla dowolnej stałej t klasa grafów przecięć krzywych o tej własności, że jedna z krzywych przecina każdą inną w co najmniej jednym i co najwyżej t punktach, jest χ -ograniczona. Hipotezę tę udowadniamy w najnowszym manuskrypcie [90]. Wynik ten oraz [33, lemat 3.2] pozwalają nam poprawić ograniczenie górne liczby krawędzi w grafach topologicznych k -quasi-planarnych, których każde dwie krawędzie przecinają się co najwyżej t razy, do postaci $O_{k,t}(n \log n)$.

4.2.4. Dekompozycja wielokrotnych upakowań. Graf G is k -zdegenerowany, jeżeli każdy indukowany podgraf H grafu G (z całym grafem G włącznie) ma wierzchołek o stopniu co najwyżej k . Jeżeli graf G jest k -zdegenerowany, to $\chi(G) \leq k + 1$ (przez prostą indukcję). Niektóre wyniki o χ -ograniczoności wymienione w sekcji 4.2.1 (np. dla rodzin składających się z przesuniętych lub jednokładnych kopii ustalonej figury wypukłej [61]) są w istocie silniejsze — stanowią, że grafy w danej klasie są $f(\omega)$ -zdegenerowane dla pewnej funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Fox i Pach [30, twierdzenie 1.3] udowodnili, że każdy graf przecięć krzywych, który nie zawiera pełnego grafu dwudzielnego $K_{s,s}$ jako podgrafu, ma wierzchołek o stopniu ograniczonym względem s . Najlepsze znane obecnie ograniczenie górne tego stopnia wynosi $s(\log s)^\gamma$ dla pewnej stałej $\gamma > 0$ [32, twierdzenie 1.5]).

Inny sposób wzmacniania wyników o χ -ograniczoności polega na ograniczaniu liczby chromaticznej za pomocą jakiegoś parametru słabszego niż liczba klikowa. Rodzinę zbiorów, taką że dowolne $k + 1$ spośród nich ma puste przecięcie, nazywamy k -krotnym upakowaniem. Pojedyncze upakowanie (czyli rodzina zbiorów parami rozłącznych) jest to po prostu upakowanie. Rodzina, której graf przecięć ma liczbę klikową co najwyżej k , jest k -krotnym upakowaniem, ale niekoniecznie na odwrót. Pach [82] zapoczątkował badania nad problemami następującej postaci: czy istnieje funkcja $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, taka że każde k -krotne upakowanie \mathcal{X} zbiorów określonego kształtu na płaszczyźnie można podzielić na co najwyżej $p(k)$ upakowań¹⁸? Zauważył w szczególności, że każde k -krotne upakowanie kół lub ogólniej „grubych” figur wypukłych (dla których stosunek promieni okręgów opisanego i wpisanego jest ograniczony) ma wierzchołek o stopniu $O(k)$ w grafie przecięć.

Naszym celem w pracy [A3] jest uogólnienie tego ostatniego stwierdzenia na rodziny obiektów geometrycznych na płaszczyźnie, których sumy mają „małą złożoność”. Rozważamy następujące standardowe miary złożoności sumy, wykorzystywane w ograniczeniach złożoności obliczeniowej algorytmów planowania ruchu i rozpoznawania obrazów [4]:

- *złożoność brzegu sumy* rodziny \mathcal{X} (tj. minimalna liczba łuków, na jakie można podzielić brzeg zbioru $\bigcup \mathcal{X}$, tak aby każdy łuk leżał całkowicie wewnątrz lub na zewnątrz każdego zbioru w \mathcal{X}),

¹⁸Pach rozważał nieskończone rodziny \mathcal{X} . Standardowy argument zwartości pokazuje jednak, że nieskończone k -krotne upakowanie \mathcal{X} można podzielić na co najwyżej p upakowań wtedy i tylko wtedy, gdy można to zrobić z każdą skończoną podrodziną rodziny \mathcal{X} , a zatem możemy bez straty ogólności zawęzić nasze rozważania do rodzin skończonych.

- liczba *dziur* wyznaczonych przez sumę rodziny \mathcal{X} (tj. liczba ograniczonych spójnych składowych zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup \mathcal{X}$).

Liczba dziur wyznaczonych przez sumę wynosi co najwyżej tyle, ile złożoność brzegu sumy. Kedem i inni [56] udowodnili, że złożoność brzegu sumy n *pseudokół* (tj. zbiorów na płaszczyźnie ograniczonych przez krzywe Jordana, z których każde dwie mają co najwyżej dwa punkty wspólne) wynosi $O(n)$. Wynik ten obejmuje w szczególności sumy jednokładnych kopii ustalonej figury wypukłej na płaszczyźnie. Matoušek i inni [74] udowodnili, że suma n „grubych” trójkątów na płaszczyźnie wyznacza $O(n)$ dziur. Efrat i Sharir [26] uzyskali prawie liniowe ograniczenie górne złożoności brzegu sum „grubych” figur wypukłych, takich że brzegi każdych dwóch mają ograniczoną liczbę punktów wspólnych.

Wynik z pracy Sharira [93] (patrz też [77]) prowadzi do następującego wniosku: dla każdego k -krotnego upakowania \mathcal{X} na płaszczyźnie, jeżeli złożoność brzegu sumy każdej podrodziny $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ wynosi $O(|\mathcal{X}'|)$, to graf przecięć rodziny \mathcal{X} ma wierzchołek o stopniu $O(k)$, a co za tym idzie (przez indukcję) rodzinę \mathcal{X} można podzielić na $O(k)$ upakowań. Dotyczy to w szczególności k -krotnych upakowań pseudokół na płaszczyźnie. Wynik Sharira udowodniony jest z wykorzystaniem techniki losowego próbkowania pochodzącej od Clarksona i Shora [22] i jest w zasadzie najogólniejszym stwierdzeniem, jakie technika ta pozwala uzyskać. W pracy [A3] udowadniamy następujące stwierdzenie, które z wyjątkiem tego, że uzyskane ograniczenie stopnia nie jest liniowe względem k , stanowi uogólnienie wyniku Sharira.

Twierdzenie 7 ([A3, twierdzenie 2]). *Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i każdej funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, takiej że $f(n) = o(n^2)$, istnieje stała $p_{k,f}$ o następującej własności: jeżeli \mathcal{X} jest skończonym k -krotnym upakowaniem zwartych i łukowo spójnych zbiorów na płaszczyźnie, takich że suma dowolnej podrodziny $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$ wyznacza co najwyżej $f(|\mathcal{X}'|)$ dziur, to graf przecięć rodziny \mathcal{X} ma wierzchołek o stopniu mniejszym niż $p_{k,f}$.*

Z tezy twierdzenia 7 zastosowanej indukcyjnie do podrodzin rodziny \mathcal{X} wynika, że rodzinę \mathcal{X} można podzielić na $p_{k,f}$ upakowań [A3, twierdzenie 1].

Dowód twierdzenia 7 opiera się na wspomnianym już wyniku Foxa i Pacha [30, twierdzenie 1.3] (dzięki któremu wystarczy wykazać, że graf przecięć rodziny \mathcal{X} nie zawiera $K_{s,s}$ jako podgrafu dla pewnego s zależącego tylko od k i f), na wzorze Eulera (wykorzystanym do udowodnienia, że każde dwukrotne upakowanie na płaszczyźnie wyznaczające „mało” dziur ma „mało” krawędzi w grafie przecięć) oraz na hipergrafowej wersji twierdzenia Turána pochodzącej od Katony, Nemetza i Simonovitsa [55]. Prezentujemy także prostszy dowód następującego szczególnego przypadku twierdzenia 7: każde k -krotne upakowanie pseudokół na płaszczyźnie ma w grafie przecięć wierzchołek o stopniu ograniczonym względem k [A3, propozycja 3] (jest to też wniosek z wyżej wymienionego wyniku Sharira [93]). Dowód ten opiera się na wyniku Foxa i Pacha [30, twierdzenie 1.3] i na topologicznym twierdzeniu Helly’ego [48].

4.2.5. *Zbiory niezależne w geometrycznych grafach przecięć.* Ponieważ każdy zbiór wierzchołków jednego koloru w poprawnym kolorowaniu grafu jest zbiorem niezależnym, każdy graf spełnia nierówność $\alpha \geq n/\chi$, gdzie α oznacza maksymalny rozmiar zbioru niezależnego. Fox i Pach [31, hipoteza 1.10] postawili hipotezę, że grafy przecięć krzywych spełniają ograniczenie $\alpha = \Theta_\omega(n)$. Faktycznie, grafy konstruowane w dowodzie twierdzenia 1 zawierają zbiory niezależne liniowego rozmiaru. Gdyby ta hipoteza była prawdziwa, wynikałoby z niej, że grafy topologiczne k -quasi-planarne mają $O_k(n)$ krawędzi, w podobny sposób, w jaki wynikałoby to z ograniczenia liczby chromatycznej postaci $\Theta_\omega(1)$ (patrz sekcja 4.2.1). Jednakże w pracy [A4] przedstawiam ulepszoną wersję konstrukcji kanonicznej unikającą zbiorów niezależnych liniowego rozmiaru.

Twierdzenie 8 ([A4]). *Istnieją wolne od trójkątów grafy przecięć odcinków, L -figur i prostokątnych ramek, dla których $\alpha = O(n/\log \log n)$.*

Niech G_k oznacza graf o liczbie chromatycznej k wolny od trójkątów otrzymany w wyniku konstrukcji kanonicznej. W dowodzie twierdzenia 8 konstruujemy przyporządkowanie nieujemnych wag wierzchołkom grafu G_k , takie że waga każdego zbioru niezależnego w grafie G_k wynosi co najwyżej $\Theta(1/k)$ całkowitej wagi grafu G_k . Prowadzi to w szczególności do wniosku, że ułamkowa liczba chromatyczna¹⁹ grafu G_k wynosi $\Theta(k)$, który uogólnia twierdzenie 1 do analogicznego stwierdzenia o ułamkowej liczbie chromatycznej. Następnie w celu wyprowadzenia twierdzenia 8 każdy odcinek (każdą L-figurę, prostokątną ramkę itp.) reprezentujący wierzchołek o wadze w zastępujemy wiązką w lekko przesuniętych, rozłącznych kopii. Tego ostatniego kroku nie da się wykonać dla wszystkich kształtów, o których mówi twierdzenie 1 (np. dla elips o osiach równoległych do osi układu współrzędnych), i dlatego twierdzenie 8 nie jest aż tak ogólne, jak twierdzenie 1.

4.3. Wymiar porządków o rzadkich grafach pokryć. *Wymiar* porządku P jest to minimalna liczba liniowych rozszerzeń porządku P , których przecięcie daje z powrotem ten porządek [25]. Równoważnie wymiar porządku P można zdefiniować jako minimalne d , takie że P jest podporządkiem zbioru \mathbb{R}^d uporządkowanego po współrzędnych [81]. Rozważając zależność wymiaru porządku P od jego „struktury grafowej”, możemy tę „strukturę” odnosić do dwóch grafów (nieskierowanych) zdefiniowanych na podstawie porządku P :

- *grafu porównywalności* o zbiorze wierzchołków P i zbiorze krawędzi $\{xy: x < y \text{ w porządku } P\}$,
- *grafu pokryć* (ang. cover graph) o zbiorze wierzchołków P i zbiorze krawędzi $\{xy: x < y \text{ oraz nie istnieje } z, \text{ takie że } x < z < y \text{ w porządku } P\}$.

Wybór pierwszego grafu cechuje się pewnymi dobrymi własnościami, na przykład każde dwa porządki o takich samych grafach porównywalności mają ten sam wymiar [101]. Wartym odnotowania wynikiem w tym kierunku jest ograniczenie wymiaru porządku ze względu na maksymalny stopień jego grafu porównywalności [34]. Z kolei wybór drugiego grafu wydaje się bardziej naturalny z punktu widzenia typowej graficznej reprezentacji porządku — za pomocą *diagramu Hassego*, na którym graf pokryć narysowany jest na płaszczyźnie w sposób rosnący²⁰. Na przykład warunek planarności znacznie bardziej pasuje do grafu pokryć niż do grafu porównywalności. Wybór grafu pokryć ma również tę zaletę, że umożliwia rozważanie porządków o dużej wysokości i o „rzadkiej strukturze” (podczas gdy duża wysokość natychmiast powoduje powstanie dużej klikli w grafie porównywalności). Algorytmiczne zastosowania ewentualnych dobrych ograniczeń wymiaru względem struktury grafu pokryć obejmują tak zwane schematy etykietujące i wyrocznie osiągalności w skierowanych grafach acyklicznych (patrz np. [97]).

Porządek jest *planarny*, jeżeli ma diagram Hassego bez przecinających się krawędzi. Trotter i Moore [100] zajmowali się problemem ograniczania wymiaru porządków planarnych. W szczególności skonstruowali nieskończoną rodzinę porządków planarnych o wymiarze 4 oraz zapytali, czy istnieją porządki planarne o wymiarze większym niż 4. Udowodnili ponadto, że porządek planarny, który ma ograniczenie dolne (tj. element mniejszy niż każdy inny element), ma wymiar co najwyżej 3. Trotter [98] skonstruował rodzinę porządków o dowolnie dużym wymiarze, które mają ograniczenia dolne i górne oraz które można narysować w sposób rosnący na sferze (a zatem mają planarny graf pokryć). W końcu Kelly [57] wskazał konstrukcję porządków planarnych

¹⁹Ułamkowa liczba chromatyczna $\chi_f(G)$ grafu G jest parametr otrzymany ze zwykłej liczby chromatycznej grafu G przez osłabienie w sensie programowania liniowego. Na podstawie twierdzenia o dualności w programowaniu liniowym jest ona równa maksymalnej całkowitej wadze grafu G , jaką można uzyskać przez przypisanie nieujemnych wag wierzchołkom grafu G , tak aby każdy zbiór niezależny w grafie G miał wagę co najwyżej 1. Każdy graf spełnia nierówność $\max\{\omega, n/\alpha\} \leq \chi_f \leq \chi$.

²⁰Sposób narysowania grafu pokryć jest *rosnący*, jeżeli każda krawędź xy grafu pokryć, taka że $x < y$, narysowana jest y -monotonicznie (np. za pomocą odcinka) oraz tak, że punkt x leży poniżej punktu y .

o dowolnie dużym wymiarze. Te negatywne wyniki skłoniły badaczy do zarzucenia badań nad związkami wymiaru z planarnością na długi czas.

Sytuacja zmieniła się w 2010 roku, kiedy Felsner, Li i Trotter [29], pracując nad problemami wymiaru w tak zwanych porządkach sąsiedztwa, doszli do następującego wniosku: porządki o wysokości 2 i o planarnych grafach pokryw mają ograniczony wymiar. Zrodziło się pytanie, czy porządki o dowolnie ograniczonej wysokości i o planarnych grafach pokryw mają ograniczony wymiar, na które odpowiedzieli twierdząco Streib i Trotter [95]. Wobec tego jakie inne warunki narzucone na klasę grafów gwarantują, że porządki o ograniczonej wysokości, których grafy pokryw należą do tej klasy, mają ograniczony wymiar? Wynik Streiba i Trottera sugerował, żeby przyjrzeć się uogólnieniom planarności, i tym samym zapoczątkował owocny kierunek badań nad związkami wymiaru porządków ze strukturalną teorią grafów.

Minorem grafu G nazywamy dowolny graf, jaki można otrzymać z G przez usuwanie wierzchołków, usuwanie krawędzi i ściąganie krawędzi (tj. łączenie obu końców krawędzi w jeden wierzchołek). *Minorem topologicznym* grafu G nazywamy dowolny graf, jaki można otrzymać z G w taki sam sposób, jak minor, ale pozwalając na ściąganie tylko takich krawędzi, których co najmniej jeden koniec jest wierzchołkiem o stopniu 2. Jak mówi klasyczne twierdzenie Kuratowskiego [72], graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera K_5 ani $K_{3,3}$ jako minorów topologicznych. Analogiczna równoważność zachodzi też, jeżeli minory topologiczne zastąpimy minorami [104]. Z biegiem czasu pojęcie minoru odniosło większy sukces niż pojęcie minoru topologicznego. Na przykład słynne twierdzenie Robertsona-Seymoura [89] mówi, że każda nieskończona rodzina grafów zawiera dwa grafy, z których jeden jest minorem drugiego, podczas gdy analogiczne stwierdzenie o minorach topologicznych jest nieprawdziwe [23].

Kluczowym (choć dość technicznym) elementem prac Robertsona i Seymoura jest pojęcie dekompozycji drzewowej, wprowadzone po raz pierwszy przez Halina [46] i odkryte na nowo w pracy [87]. *Dekompozycja drzewowa* grafu G jest to drzewo T wraz z przyporządkowaniem $u \mapsto B_u$ węzłom drzewa T podzbiorów wierzchołków grafu G zwanych *workami*, które spełniają następujące warunki:

- dla każdego wierzchołka v grafu G węzły u drzewa T , takie że $v \in B_u$, tworzą niepuste poddrzewo drzewa T ,
- dla każdej krawędzi v_1v_2 grafu G istnieje węzeł u drzewa T , taki że $v_1, v_2 \in B_u$.

Szerokość takiej dekompozycji drzewowej wynosi $\max_{u \in T} |B_u| - 1$. Minimalną szerokość dekompozycji drzewowej grafu G nazywamy *szerokością drzewową* grafu G . *M-lokalna szerokość drzewowa*²¹ grafu G jest to funkcja, która liczbie $d \in \mathbb{N}$ przypisuje maksymalną szerokość drzewową minoru grafu G o średnicy co najwyżej d . *Torsem* węzła u drzewa T w takiej dekompozycji drzewowej nazywamy graf otrzymany z $G[B_u]$ przez dodanie krawędzi łączących każdą parę wierzchołków w B_u , która zawiera się również w jakimś worku innym niż B_u . Za tą ostatnią definicją stoi następująca intuicja: krawędzie dodane do torsu węzła u imitują ścieżki, które w grafie G mogłyby łączyć pary wierzchołków z B_u przez wierzchołki spoza B_u , dzięki czemu wierzchołki należące do B_u mają w grafie G i w torsie węzła u taką samą „strukturę spójności”.

Grafy o ograniczonej szerokości drzewowej są szczególnie istotne w algorytmicznej teorii grafów, ponieważ wiele problemów obliczeniowych, które są w ogólności NP-trudne, ma w takich grafach wielomianowe algorytmy [11]. Grafy te są także podstawowym budulcem grafów z zabronionymi minorami i zabronionymi minorami topologicznymi. Twierdzenie strukturalne Robertsona-Seymoura [88] wzbogacone o wynik Grohego [39] mówi, co następuje: dla każdego grafu H istnieją stała $t \in \mathbb{N}$ oraz funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, takie że każdy graf niezawierający grafu H jako minoru ma dekompozycję drzewową, w której tors każdego węzła po usunięciu co najwyżej t wierzchołków ma m -lokalną szerokość drzewową ograniczoną przez f . Uogólnienie tego

²¹Nie jest to standardowe pojęcie, ale uprości nam ono wyrażenie niektórych idei.

twierdzenia na grafy z zabronionymi minorami topologicznymi zostało niedawno uzyskane przez Grohego i Marxa [40]: dla każdego grafu H istnieją stałe $t, d \in \mathbb{N}$ oraz funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, takie że każdy graf niezawierający grafu H jako minoru topologicznego ma dekompozycję drzewową, w której tors każdego wężła po usunięciu co najwyżej t wierzchołków ma m -lokalną szerokość drzewową ograniczoną przez f lub maksymalny stopień ograniczony przez d .

W pracy [B11] udowodniliśmy, że wymiar jest ograniczony dla porządków o ograniczonej wysokości, których grafy pokryć mają ograniczoną szerokość drzewową. Warunku ograniczonej wysokości nie można pominąć, gdyż porządki powstające w wyniku konstrukcji Kelly’ego mają szerokość drzewową 3. Z kolei Biró, Keller i Young [9] wykazali, że porządki, których grafy pokryć mają szerokość ścieżkową 2 (zdefiniowaną podobnie do szerokości drzewowej, z tym że od drzewa T wymagamy, żeby było ścieżką), mają ograniczony wymiar. Joret i inni [52] uogólnili ten wynik na porządki, których grafy pokryć mają szerokość drzewową 2. Ponadto w pracy [B11] postawiliśmy hipotezę, że porządki o ograniczonej wysokości, których grafy pokryć nie zawierają ustalonego grafu jako minoru, mają ograniczony wymiar. W pracy [A5] udowadniam tę hipotezę w jeszcze ogólniejszej postaci.

Twierdzenie 9 ([A5]). *Dla każdego grafu H porządki o ograniczonej wysokości, których grafy pokryć nie zawierają grafu H jako minoru topologicznego, mają ograniczony wymiar.*

Niech P będzie porządkiem o ograniczonej wysokości, którego graf pokryć G nie zawiera grafu H jako minoru topologicznego. Przykładając wspomniane już twierdzenie strukturalne Grohego-Marxa, otrzymujemy stałe $t, d \in \mathbb{N}$, funkcję $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ oraz dekompozycję drzewową grafu G , w której tors każdego wężła po usunięciu co najwyżej t wierzchołków ma m -lokalną szerokość drzewową ograniczoną przez f lub maksymalny stopień ograniczony przez d . Dowód twierdzenia 9 dla P postępuje zgodnie z tak otrzymaną strukturą, mniej więcej następująco. Tezę dla P sprowadzamy przez dekompozycję drzewową do analogicznego stwierdzenia o każdym torsie. Je następnie, usuwając co najwyżej t wierzchołków, sprowadzamy do analogicznych stwierdzeń o grafach o ograniczonej m -lokalnej szerokości drzewowej lub o ograniczonym maksymalnym stopniu. Metoda z pracy [95] pozwala zredukować stwierdzenie o grafach o ograniczonej m -lokalnej szerokości drzewowej do wyżej wspomnianego wyniku z pracy [B11] dotyczącego grafów o ograniczonej szerokości drzewowej. Z kolei stwierdzenie o grafach o ograniczonym maksymalnym stopniu jest bezpośrednią konsekwencją wyniku Fürediego i Kahna [34]. Istota dowodu twierdzenia 9 leży zatem w pierwszej redukcji — przejściu przez dekompozycję drzewową.

Jak należy zdefiniować porządek na B_u dla wężła u dekompozycji drzewowej, żeby otrzymać „analogiczne stwierdzenie o torsie”? Najprostszy wybór, czyli podporządek porządku P indukowany na B_u , nie wystarcza [A5, sekcja 3.1]. Rozwiązanie zaproponowane w pracy [A5] polega na zdefiniowaniu dwóch rodzajów *rozszerzeń gadżetowych* tego podporządku, które powstają z niego przez dołączenie starannie skonstruowanego *gadżetu* (o ograniczonym rozmiarze) do każdego zbioru wierzchołków w B_u wspólnego z jakimś innym workiem. Porównywalności między wierzchołkami w B_u a tymi w gadżetach imitują porównywalności w porządku P między wierzchołkami w B_u a tymi poza B_u , zaś wspomniane dwa rodzaje rozszerzeń gadżetowych różnią tym, jak są zdefiniowane porównywalności wewnątrz poszczególnych gadżetów. W wyniku tej konstrukcji każda para nieporównywalna w porządku P ma *reprezentanta* — parę nieporównywalną w rozszerzeniu gadżetowym zbioru B_u co najmniej jednego rodzaju. Poszukiwana redukcja przez dekompozycję drzewową tak naprawdę prowadzi do stwierdzeń o rozszerzeniach gadżetowych obu rodzajów.

Dowód tego, że porządek P ma ograniczony wymiar, opiera się na następującej charakterystyce: wymiar porządku P jest to minimalna liczba kolorów wystarczająca do pokolorowania (uporządkowanych) par nieporównywalnych w porządku P w sposób unikający jednokolorowych *cykli naprzemiennych* (tj. zbiorów par nieporównywalnych $\{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)\}$, takich że $x_1 \leq y_2, \dots, x_{k-1} \leq y_k$ oraz $x_k \leq y_1$) [100]. W szczególności redukcja przez dekompozycję

drzewową sprowadza się do znalezienia kolorowania par nieporównywalnych unikającego jednokolorowych cykli naprzemiennych przy założeniu, że kolorowania takie dane są dla rozszerzeń gadżetowych. Kolor przypisany parze nieporównywalnej w P jest kombinacją kolorów reprezentantów tej pary w ograniczenie wielu rozszerzeniach gadżetowych wybranych w taki sposób, żeby każdy cykl naprzemienny w P miał rozszerzenie gadżetowe wspólnie wybrane dla wszystkich par w tym cyklu. Konstrukcja ta zapewnia, że jakikolwiek jednokolorowy cykl naprzemienny w P skutkowałby jednokolorowym cyklem naprzemiennym w tym wspólnym rozszerzeniu gadżetowym (utworzonym przez reprezentantów par tworzących ten pierwszy cykl), a taki nie może istnieć.

Twierdzenie 9 zostało ponownie udowodnione inną metodą przez Micka i Wiecherta [78]. Zamiast opierać się na twierdzeniach strukturalnych, za pomocą wyrafinowanego rozumowania konstruują oni bezpośrednio minor topologiczny grafu H przy założeniu, że P ma wystarczająco wysoki wymiar. Można próbować uogólniać twierdzenie 9 jeszcze dalej w hierarchii rzadkich klas grafów — do klas o ograniczonej ekspansji oraz do klas nigdzie gęstych [80]. Istotnie, Joret, Micek i Wiechert [53] udowodnili, że dla każdej klasy grafów \mathcal{G} o ograniczonej ekspansji porządku o ograniczonej wysokości, których grafy pokryć należą do klasy \mathcal{G} , mają ograniczony wymiar. Problemem otwartym pozostaje, czy porządki o ograniczonej wysokości i o grafach pokryć w klasie \mathcal{G} mają wymiar $O(n^\varepsilon)$ dla każdej nigdzie gęstej klasy grafów \mathcal{G} i każdego $\varepsilon > 0$ ²².

W najnowszym manuskrypcie [50] rozszerzamy oryginalny wynik Streiba i Trotter [95] dotyczący porządków o ograniczonej wysokości i o planarnych grafach pokryć do następującej postaci: porządki o planarnych grafach pokryć, które są $(k + k)$ -wolne (tj. nie zawierają dwóch nieporównywalnych łańcuchów długości k) mają wymiar ograniczony względem k .

5. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

5.1. Kolorowanie grafów reprezentowanych geometrycznie.

- [B1] Arkadiusz Pawlik, Jakub Kozik, Tomasz Krawczyk, Michał Lasoń, Piotr Micek, William T. Trotter, Bartosz Walczak,
Triangle-free intersection graphs of line segments with large chromatic number,
Journal of Combinatorial Theory, Series B 105, 6–10, 2014.
- [B2] Arkadiusz Pawlik, Jakub Kozik, Tomasz Krawczyk, Michał Lasoń, Piotr Micek, William T. Trotter, Bartosz Walczak,
Triangle-free geometric intersection graphs with large chromatic number,
Discrete and Computational Geometry 50 (3), 714–726, 2013.
- [B3] Tomasz Krawczyk, Arkadiusz Pawlik, Bartosz Walczak,
Coloring triangle-free rectangle overlap graphs with $O(\log \log n)$ colors,
Discrete and Computational Geometry 53 (1), 199–220, 2015.

Wersja konferencyjna:
Tomasz Krawczyk, Arkadiusz Pawlik, Bartosz Walczak,
Coloring triangle-free rectangular frame intersection graphs with $O(\log \log n)$ colors,
39th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2013), Lecture Notes in Computer Science 8165, 333–344, Springer, 2013.
- [B4] Michał Lasoń, Piotr Micek, Arkadiusz Pawlik, Bartosz Walczak,
Coloring intersection graphs of arc-connected sets in the plane,
Discrete and Computational Geometry 52 (2), 399–415, 2014.

²²Byłby to typowy sposób uogólnienia stwierdzenia o klasach o ograniczonej ekspansji na klasy nigdzie gęste. Uogólnienie, które dawałoby stałe ograniczenie wymiaru, nie jest możliwe [53].

Kluczowe elementy prac [B1, B2, B3, B4] zostały już omówione w sekcjach 4.2.1–4.2.3 jako kontekst w dyskusji osiągnięcia habilitacyjnego. Tutaj ograniczymy się do opisu pewnych dodatkowych aspektów tych prac, które nie zostały tam uwzględnione.

W pracach [B1, B2] wprowadzamy konstrukcję kanoniczną, czyli konstrukcję geometrycznych grafów przecięć o dowolnie dużej liczbie chromatycznej wolnych od trójkątów. Konstrukcja grafów przecięć odcinków, która stanowi rozwiązanie problemu Erdősa (patrz sekcja 4.2.1), przedstawiona jest w pracy [B1]. Praca [B2] opisuje konstrukcję kanoniczną w jej ogólnej postaci przedstawionej w sekcji 4.2.1 jako twierdzenie 1. Ponadto w pracy [B2] udowadniamy wynik silniejszy niż twierdzenie 1, ale dla bardziej ograniczonej klasy kształtów X : jeżeli X jest zbiorem zwartym, łukowo spójnym i *zakotwiczonym* na płaszczyźnie oraz $n \in \mathbb{N}$, to istnieje rodzina n *jednokładnych* kopii zbioru X , której graf przecięć jest wolny od trójkątów i ma liczbę chromatyczną $\Theta(\log \log n)$. Definicja zbioru zakotwiczonych oddaje następującą własność niezbędną do przeprowadzenia konstrukcji kanonicznej: dowolnie wiele rozłącznych jednokładnych kopii zbioru X można upakować na płaszczyźnie w taki sposób, żeby wszystkie przecinały dowolnie małe otoczenie pewnego wspólnego punktu.

W [B2, sekcji 4] opisujemy nieformalnie sposób wyprowadzenia konstrukcji kanonicznej dla grafów nachodzeń prostokątów ze strategii kanonicznej dla grafów nachodzeń przedziałów (patrz sekcja 4.2.2). Wyprowadzenie to jest szczegółowo przedstawione w pracy [B3]. W szczególności w [B3, sekcji 2] definiujemy grafy rozgrywki na przedziałach²³, w [B3, sekcji 3] przedstawiamy strategię kanoniczną na przedziałach jako szczególny przypadek strategii kanonicznej Beana na drzewach, zaś w [B3, sekcji 5] udowadniamy równoważność między grafami rozgrywki na przedziałach a grafami nachodzeń prostokątów skierowanych w prawo. Jako główny wynik pracy [B3] dowodzimy, że grafy nachodzeń prostokątów wolne od trójkątów mają liczbę chromatyczną $\Theta(\log \log n)$, co oznacza, że konstrukcja kanoniczna jest w zasadzie najlepsza możliwa w tej klasie grafów. Osiągamy to w dwóch krokach za pomocą następujących twierdzeń:

- grafy nachodzeń prostokątów o ograniczonej liczbie klikowej można podzielić na ograniczenie wiele grafów rozgrywki na przedziałach;
- grafy rozgrywki na przedziałach wolne od trójkątów spełniają ograniczenie $\chi = O(\log \log n)$.

W pracy [B4] dowodzimy χ -ograniczoność klasy grafów przecięć zbiorów zwartych, łukowo spójnych i uziemionych²⁴ w półpłaszczyźnie, takich że przecięcie każdych dwóch spośród tych zbiorów jest łukowo spójne (być może puste). Szczególnym jej przypadkiem jest χ -ograniczoność klasy grafów przecięć 1-przecinających się krzywych uziemionych (patrz sekcja 4.2.3). Pełny wynik w pracy [B4] ustępuje twierdzeniu 6, jako że zbiory zwarte, łukowo spójne i uziemione można aproksymować za pomocą krzywych uziemionych z dowolną dokładnością.

Na koniec powróćmy do hipotezy Scotta [91]: dla każdego grafu H klasa grafów, w której zabronione są indukowane podpodziały ustalonego grafu, jest χ -ograniczona. Konstrukcja kanoniczna obala tę hipotezę dla grafów H , które są 1-podpodziałami grafów nieplanarnych. Wynik ten zachęcił badaczy do poszukiwania innych przykładów grafów H , dla których hipoteza Scotta jest fałszywa. W szczególności Chalopin i inni [16] wykazali, że takim przykładem jest 1-podpodział grafu K_4 . Udowodnili także, że każdy graf H , który nie jest lasem żyrandoli²⁵ ma podpodział H^* , taki że hipoteza Scotta jest fałszywa dla H^* . Chudnovsky, Scott i Seymour [19] uzyskali częściowy wynik odwrotny: jeżeli H jest lasem żyrandoli, to klasa *grafów przecięć krzywych* niezawierających indukowanych podpodziałów grafu H jest χ -ograniczona.

²³W niniejszym opisie dla uproszczenia pomijamy warunek czystości, który występuje w definicji tych grafów w pracy [B3], nazwanych tam *overlap game graphs*.

²⁴Zbiór taki jest *uziemiony*, jeżeli jego przecięcie z brzegiem półpłaszczyzny jest niepustym odcinkiem.

²⁵Graf jest *lasem żyrandoli*, jeżeli każda jego dwuspójna składowa jest drzewem z dodanym jednym wierzchołkiem połączonym krawędziami z liśćmi tego drzewa. Podpodział drzewa żyrandoli jest także drzewem żyrandoli.

5.2. Liczba krawędzi w grafach k -quasi-planarnych.

[B5] Andrew Suk, Bartosz Walczak,

New bounds on the maximum number of edges in k -quasi-planar graphs,
Computational Geometry: Theory and Applications 50, 24–33, 2015.

Wersja konferencyjna:

Andrew Suk, Bartosz Walczak,

New bounds on the maximum number of edges in k -quasi-planar graphs,
21st International Symposium on Graph Drawing (GD 2013), Lecture Notes in Computer Science 8242, 95–106, Springer, 2013.

Powróćmy do hipotezy przedstawionej pod koniec sekcji 4.2.1: każdy graf topologiczny k -quasi-planarny o n wierzchołkach ma $O_k(n)$ krawędzi. W pracy [B5] uzyskujemy poprawione ograniczenia górne w dwóch szczególnych przypadkach tego problemu:

- (1) $2^{\alpha(n)^\nu} n \log n$ w przypadku, gdy pary krawędzi przecinają się w co najwyżej t punktach, gdzie α jest funkcją odwrotną do funkcji Ackermanna, a ν zależy od k i t ,
- (2) $O_k(n \log n)$ w przypadku, gdy pary krawędzi przecinają się w co najwyżej jednym punkcie.

Najlepsze znane wcześniej ograniczenia wynosiły odpowiednio $n(\log n)^{O(\log k)}$ [32] i $2^{\alpha(n)^\nu} n \log n$ (gdzie α jest jak wyżej, a ν zależy od k) [33]. Dowód w obu przypadkach zaczyna się od znanej redukcji do grafów topologicznych zawierających krawędź, która przecina każdą inną krawędź [33, lemat 3.2]. Redukcja ta wprowadza czynnik $O_t(\log n)$ do ograniczenia liczby krawędzi. Następnie dowód ograniczenia (1) postępuje zgodnie z podejściem Valtra [103] oraz Foxa, Pacha i Suka [33] do problemu w przypadku pojedynczych przecięć, uogólniając je dzięki dodatkowym technicznym lematom. Wykorzystanie wyniku Kłazara [65] dotyczącego tak zwanych uogólnionych ciągów Davenporta-Schinzla dodaje czynnik $2^{\alpha(n)^\nu}$ do ograniczenia liczby krawędzi. Dowód ograniczenia (2) opiera się na wyniku z pracy [B4], który jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 6 dla 1-przecinających się krzywych ukorzenionych.

5.3. Rysowanie grafów za pomocą niewielu kierunków.

[B6] Kolja Knauer, Piotr Micek, Bartosz Walczak,

Outerplanar graph drawings with few slopes,
Computational Geometry: Theory and Applications 47 (5), 614–624, 2014.

Wersja konferencyjna:

Kolja Knauer, Piotr Micek, Bartosz Walczak,

Outerplanar graph drawings with few slopes,
18th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON 2012), Lecture Notes in Computer Science 7434, 323–334, Springer, 2012.

[B7] Kolja Knauer, Bartosz Walczak,

Graph drawings with one bend and few slopes,

12th Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN 2016), Lecture Notes in Computer Science 9644, 549–561, Springer, 2016.

Kierunek odcinka na płaszczyźnie jest to klasa równoważności wszystkich odcinków do niego równoległych. *Liczba kierunkowa* (ang. slope number) grafu G jest to minimalna liczba s , taka że graf G można narysować na płaszczyźnie, reprezentując krawędzie za pomocą odcinków o co najwyżej s kierunkach. Ponieważ w każdym wierzchołku co najwyżej dwie krawędzie mogą mieć ten sam kierunek, liczba kierunkowa grafu o maksymalnym stopniu Δ wynosi co najmniej $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$. Liczba kierunkowa grafów o maksymalnym stopniu 3 wynosi co najwyżej 4 [79], jak również istnieją grafy o maksymalnym stopniu 5 i o dowolnie dużej liczbie kierunkowej [7, 83]. Otwarte pozostaje pytanie, czy grafy o maksymalnym stopniu 4 mają ograniczoną liczbę

kierunkową. Dla (zewnątrznie) planarnego grafu G jego (zewnątrznie) planarna liczba kierunkowa jest to minimalne s , takie że graf G można narysować na płaszczyźnie za pomocą odcinków o co najwyżej s kierunkach w sposób (zewnątrznie) planarny²⁶. Wiadomo, że planarna liczba kierunkowa jest ograniczona wykładniczo względem maksymalnego stopnia [58] dla wszystkich grafów planarnych oraz wielomianowo względem maksymalnego stopnia dla grafów planarnych o szerokości drzewowej co najwyżej 3 (w szczególności dla grafów zewnętrze planarnych) [51]. W pracy [B6] dowodzimy, że zewnętrze planarna liczba kierunkowa grafów zewnętrze planarnych o maksymalnym stopniu Δ wynosi co najwyżej $\Delta - 1$ (o ile $\Delta \geq 4$; dla $\Delta = 2$ i $\Delta = 3$ ograniczenie wynosi 3) i że ograniczenie to jest optymalne. Dla grafu zewnętrze planarnego definiujemy jego „dekompozycję bąbelkową”, której używamy następnie do narysowania tego grafu w dowodzie ograniczenia górnego.

W pracy [B7] rozważamy 1-łamane (ang. 1-bend) warianty wyżej wymienionych liczb kierunkowych, do zdefiniowania których krawędzie grafu G reprezentujemy za pomocą linii łamanych z co najwyżej jednym zgięciem (tj. składających się z co najwyżej dwóch odcinków), tak że wszystkie narysowane odcinki mają co najwyżej s kierunków. Dowodzimy, że każdy graf zewnętrze planarny o maksymalnym stopniu Δ ma zewnętrze planarną 1-łamaną liczbę kierunkową $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$, chyba że $\Delta = 2$ i graf zawiera cykle — wtedy liczba ta wynosi 2. Dowód ten również opiera się na „dekompozycji bąbelkowej” z pracy [B6]. Dla ogólnych grafów o maksymalnym stopniu Δ ograniczamy 1-łamaną liczbę kierunkową od góry przez $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$, poprawiając poprzednie ograniczenie wynoszące $\Delta + 1$ [24]. Ponadto nieznacznie poprawiamy podane w pracy [58] ograniczenia górne planarnej 1-łamanej liczby kierunkowej grafów planarnych i grafów planarnych dwudzielnych.

5.4. Rozszerzanie częściowych reprezentacji.

- [B8] Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Tomasz Krawczyk, Bartosz Walczak,
Extending partial representations of function graphs and permutation graphs,
20th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2012), Lecture Notes in Computer
Science 7501, 671–682, Springer, 2012.

Reprezentacja grafu G jest to odwzorowanie $\mu: V \rightarrow \mathcal{C}$ zbioru wierzchołków V grafu G w pewną klasę zbiorów (np. obiektów geometrycznych) \mathcal{C} , takie że istnieje w grafie G krawędź uv wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(u) \cap \mu(v) \neq \emptyset$. Problem rozszerzania częściowych reprezentacji w klasie \mathcal{C} wyraża się następująco: dla danego grafu G i odwzorowania $\rho: R \rightarrow \mathcal{C}$, które jest reprezentacją podgrafu grafu G indukowanego na pewnym zbiorze wierzchołków $R \subseteq V$, rozstrzygnąć, czy odwzorowanie ρ można rozszerzyć do pełnej reprezentacji $\mu: V \rightarrow \mathcal{C}$ grafu G . Problem ten został zaproponowany przez Klavíka, Kratochvíla i Vyskočila [64] jako uogólnienie klasycznego problemu rozpoznawania. Udowodnili oni, że rozszerzanie częściowych reprezentacji można zrealizować w czasie wielomianowym dla grafów przedziałowych (tj. gdy \mathcal{C} jest klasą przedziałów w \mathbb{R}). Algorytm liniowy do tego samego problemu pochodzi od Bläsiusa i Ruttera [10]. Klavík i inni [62] opracowali liniowy algorytm dla grafów przedziałowych właściwych oraz wielomianowy algorytm dla grafów przedziałowych jednostkowych. W pracy [B8] przedstawiamy wielomianowy algorytm rozszerzania częściowych reprezentacji grafów funkcyjnych (tj. gdy \mathcal{C} jest klasą funkcji ciągłych $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$) oraz grafów permutacji (tj. gdy \mathcal{C} jest klasą funkcji liniowych $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$). Algorytm dla grafów funkcyjnych robi istotny użytek z dekompozycji modularnej, która zapewnia wielomianowy opis wszystkich orientacji przechodnich ustalonego grafu [35]. W pracy [B8] przedstawiamy także wariant problemu rozszerzania częściowych reprezentacji grafów funkcyjnych, w którym częściowa reprezentacja dana jest za pomocą funkcji $I \rightarrow \mathbb{R}$ dla podprzedziałów $I \subseteq [0, 1]$, które należy rozszerzyć do funkcji $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, i dowodzimy, że

²⁶Rysunek taki jest zewnętrze planarny, jeżeli jest planarny oraz wszystkie wierzchołki leżą na zewnętrznej ścianie.

ten wariant problemu jest NP-zupełny. Prace [17, 63] zajmują się problemami rozszerzania częściowych reprezentacji grafów przecięć cięciw okręgu i grafów cięciwowych.

5.5. Efektywne czasowo i pamięciowo wyznaczanie wspólnych stycznych.

[B9] Mikkel Abrahamsen, Bartosz Walczak,

Outer common tangents and nesting of convex hulls in linear time and constant workspace,
24th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2016), Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs) 57, 4:1–15, Dagstuhl, 2016.

W pracy [B9] zajmujemy się problemem wyznaczania wspólnych stycznych do dwóch rozłącznych wielokątów prostych w czasie liniowym i w stałej pamięci roboczej (tj. pamięci o dostępie do odczytu i zapisu) przy założeniu, że wierzchołki tych wielokątów dane są na wejściu w postaci uporządkowanych list. Dwa rozłączne wielokąty proste mają cztery wspólne styczne, dwie lub nie mają żadnej, jeżeli ich wypukłe otoczki są odpowiednio rozłączne, nachodzące się lub zagnieżdżone. Wspólne styczne do dwóch wielokątów *wypukłych* można łatwo wyznaczyć w czasie logarytmicznym i w stałej pamięci roboczej, ale obliczenie wypukłej otoczki wymaga liniowej pamięci roboczej w najgorszym przypadku. Abrahamsen [1] zaproponował bardzo prosty algorytm, który wyznacza wszystkie cztery wspólne styczne do dwóch wielokątów prostych, jeżeli ich wypukłe otoczki są rozłączne, lub stwierdza, że wypukłe otoczki nie są rozłączne. Dla tego drugiego przypadku w pracy [B9] podajemy algorytm, który wyznacza obie wspólne styczne do dwóch wielokątów prostych, jeżeli ich wypukłe otoczki się nachodzą, lub stwierdza, że wypukłe otoczki są zagnieżdżone. Algorytm ten wprowadza tylko drobną poprawkę do algorytmu z pracy [1], ale jego analiza jest zupełnie inna i bardziej skomplikowana.

5.6. Miary wypukłości zbiorów.

[B10] Martin Balko, Vít Jelínek, Pavel Valtr, Bartosz Walczak,

On the Beer index of convexity and its variants,
Discrete and Computational Geometry 57 (1), 179–214, 2017.

Wersja konferencyjna:

Martin Balko, Vít Jelínek, Pavel Valtr, Bartosz Walczak,

On the Beer index of convexity and its variants,
31st International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2015), Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs) 34, 406–420, Dagstuhl, 2015.

W pracy [B10] zajmujemy się dwiema miarami wypukłości zbioru S na płaszczyźnie: *indeksem wypukłości* zbioru S oznaczanym przez $b(S)$, czyli prawdopodobieństwem, że losowy odcinek o końcach w zbiorze S w całości zawiera się w S , oraz stosunkiem miary największego wypukłego podzbioru zbioru S do miary całego zbioru S oznaczanym przez $c(S)$. Cabello i inni [14] udowodnili ograniczenie $b(S) = O(c(S))$ dla wielokątów prostych S o tej własności, że każdy punkt wielokąta S widoczny jest wewnątrz S z pewnego ustalonego odcinka, i postawili hipotezę, że zachodzi ono dla wszystkich wielokątów prostych S . Głównym naszym wynikiem w pracy [B10] jest twierdzenie jeszcze ogólniejsze — że wszystkie jednospójne zbiory S , dla których $b(S)$ ma sens, spełniają ograniczenie $b(S) = O(c(S))$. W jego dowodzie konstruujemy podwójne pokrycie zbioru S przez zbiory o tej własności, że każdy odcinek wewnątrz S zawiera się w co najmniej jednym z nich oraz że dla każdego z tych zbiorów z osobna potrafimy udowodnić ograniczenie $b(S) = O(c(S))$, uogólniając metodę z pracy [14]. Ponadto rozważamy indeksy wypukłości wyższego rzędu — prawdopodobieństwa $b_d(S)$, że wypukła otoczka $d + 1$ losowych punktów zbioru S w całości zawiera się w S , dla $d \geq 2$. Dla zbiorów $S \subseteq \mathbb{R}^d$ dowodzimy, że $b_d(S) = O_d(c(S))$, w oparciu o twierdzenie Hausslera-Welzla o ε -sieciach [47]. Dowodzimy także, że ograniczenie to jest optymalne z dokładnością do czynnika logarytmicznego.

5.7. Wymiar porządków o rzadkich grafach pokryć.

- [B11] Gwenaël Joret, Piotr Micek, Kevin G. Milans, William T. Trotter, Bartosz Walczak, Ruidong Wang,
Tree-width and dimension,
Combinatorica 36 (4), 431–450, 2016.

W pracy [B11] dowodzimy, że wymiar porządków o wysokości h , których grafy pokryć mają szerokość drzewową k , jest ograniczony względem h i k . Kontekst tego wyniku oraz wynikający z niego dalszy postęp w badaniach zostały omówione w sekcji 4.3. W szczególności w pracy [B11] postawiliśmy jako hipotezę słabszą postać twierdzenia 9 (dla zabronionych minorów zamiast minorów topologicznych) udowodnione później w pracy [A5].

5.8. Przecinające się wektory.

- [B12] Michał Lasoń, Piotr Micek, Noah Streib, William T. Trotter, Bartosz Walczak,
An extremal problem on crossing vectors,
Journal of Combinatorial Theory, Series A 128, 41–55, 2014.

Dwa wektory $x, y \in \mathbb{Z}^w$ się k -przecinają, jeżeli istnieją współrzędne $i, j \in \{1, \dots, w\}$, takie że $x_i - y_i \geq k$ oraz $y_j - x_j \geq k$. Praca [B12] poświęcona jest następującemu problemowi: jaka jest maksymalna liczba wektorów w \mathbb{Z}^w , wśród których każde dwa się 1-przecinają, ale żadne dwa się nie k -przecinają? Problem ten wywodzi się z następującego pytania w kombinatoryce porządków: jaka jest maksymalna szerokość kraty maksymalnych (w sensie liczności) antylańcuchów w skończonym porządku $(k + k)$ -wolnym o szerokości w ? Felsner, Krawczyk i Micek postawili hipotezę, że odpowiedź wynosi k^{w-1} na pierwsze (patrz [B12, hipoteza 1]) i $(k - 1)^{w-1}$ na drugie pytanie (patrz [B12, hipoteza 5]). Nietrudno jest zauważyć, że dowolne ograniczenie górne postaci $f(k, w)$ w pierwszym problemie prowadzi do ograniczenia górnego postaci $f(k - 1, w)$ w drugim problemie (patrz [B12, propozycja 4]). Hipoteza jest trywialnie spełniona dla $w = 1$ i łatwo spełniona dla $w = 2$. W pracy [B12] udowadniamy hipotezę dla $w = 3$ za pomocą dość złożonego argumentu przeliczeniowego. Ponadto dla pierwszego problemu podajemy ogólne ograniczenie górne postaci $\min\{k^w - k^2(k - 1)^{w-2}, \lceil \frac{w}{3} \rceil k^{w-1}\}$ (dla $w \geq 4$) oraz przedstawiamy kilka zasadniczo różniących się konstrukcji, które świadczą o ograniczeniu dolnym k^{w-1} .

5.9. Gry kombinatoryczne na grafach.

- [B13] Piotr Micek, Bartosz Walczak,
A graph-grabbing game,
Combinatorics, Probability and Computing 20 (4), 623–629, 2011.
- [B14] Piotr Micek, Bartosz Walczak,
Parity in graph sharing games,
Discrete Mathematics 312 (10), 1788–1795, 2012.
- [B15] Adam Gągol, Piotr Micek, Bartosz Walczak,
Graph sharing game and the structure of weighted graphs with a forbidden subdivision,
Journal of Graph Theory, praca w druku, 29 stron, DOI: 10.1002/jgt.22045.

W pracach [B13, B14] wprowadzamy gry kombinatoryczne na grafach zwane graph sharing games, niezależnie zaproponowane również przez Cibulkę i innych [21]. Dwoje graczy, Ala i Bob, dysponując spójnym grafem G o nieujemnych wagach przypisanych wierzchołkom, zabiera z grafu G na zmianę po jednym wierzchołku i gromadzi ich wagi. Zależnie od wariantu gry (zwanego grą T lub grą R) gracze muszą zachowywać spójność części zabranej z grafu (w grze T) lub pozostającej w grafie (w grze R). Gracze oboje starają się zmaksymalizować łączną wagę wierzchołków zgromadzonych przez nich w momencie zakończenia gry, gdy wszystkie wierzchołki

zostały zabrane. Specjalnym przypadkiem tych gier na grafach G będących cyklami jest „problem pizzy” Winklera, dla którego Cibulka i inni [20] oraz niezależnie Knauer, Micek i Ueckerdt [66] udowodnili, że Ala może sobie zawsze zapewnić $\frac{4}{9}$ łącznej wagi, i wynik ten jest najlepszy możliwy.

Prace [B13, B14, B15] poruszają następujący ogólny problem: przy ustalonej klasie grafów spójnych \mathcal{G} jaki maksymalny ułamek $p(\mathcal{G})$ łącznej wagi może sobie zapewnić Ala w grze T lub w grze R na dowolnym grafie $G \in \mathcal{G}$ z dowolnym rozmieszczeniem wag? Powyższy wynik z prac [20, 66] oznacza, że $p(\mathcal{C}) = \frac{4}{9}$ dla klasy \mathcal{C} wszystkich cykli. Wartość $p(\mathcal{G})$, a w szczególności to, czy $p(\mathcal{G}) > 0$, okazuje się w dużym stopniu zależeć od parzystości liczby wierzchołków (w skrócie — parzystości) grafów w klasie \mathcal{G} oraz od strukturalnych własności grafów w klasie \mathcal{G} .

Praca [B13] dotyczy gry R. W grze tej Ala nie może sobie zapewnić dodatniego wyniku nawet na tak prostym grafie, jakim jest 3-wierzchołkowa ścieżka (ogólniej — każda ścieżka o nieparzystej liczbie wierzchołków) z całą wagą pośrodku. W pracy [B13] dowodzimy, że $p(\mathcal{T}_{\text{even}}) \geq \frac{1}{4}$ dla klasy $\mathcal{T}_{\text{even}}$ parzystych drzew oraz $p(\mathcal{S}_{\text{even}}) = \frac{1}{2}$ dla klasy $\mathcal{S}_{\text{even}}$ parzystych podpodziałów gwiazd. Ponadto stawiamy hipotezę, że $p(\mathcal{T}_{\text{even}}) = \frac{1}{2}$, udowodnioną później przez Seacrest i Seacresta [92], oraz wskazujemy prostą rodzinę \mathcal{G} parzystych spójnych grafów, dla której $p(\mathcal{G}) = 0$.

Prace [B14, B15] dotyczą gry T. W pracy [B14] dowodzimy, że $\frac{1}{4} \leq p(\mathcal{T}_{\text{odd}}) \leq \frac{2}{5}$ dla klasy \mathcal{T}_{odd} nieparzystych drzew, oraz wskazujemy proste rodziny \mathcal{G} parzystych drzew oraz nieparzystych spójnych grafów, dla których $p(\mathcal{G}) = 0$. W pracy [B15] dowodzimy, że $p(\mathcal{G}_{\text{odd}}^n) > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\mathcal{G}_{\text{odd}}^n$ jest klasą nieparzystych spójnych grafów niezawierających K_n jako minoru topologicznego. Cibulka i inni [21] wykazali, że wyniku tego nie da się uogólnić do klas grafów o ograniczonej ekspansji. Dowód w pracy [B15] łączy metodę z pracy [B14] z nowym wynikiem strukturalnym [B15, twierdzenie 1.2], który mówi z grubsza, że każdy spójny ważony graf G niezawierający K_n jako minoru topologicznego ma „spójny separator” lub wygląda „podobnie do cyklu”²⁷.

Dla gry T i gry R Cibulka i inni [21] wskazali więcej przykładów rodzin \mathcal{G} , dla których $p(\mathcal{G}) = 0$ (w szczególności rodziny grafów o dowolnie wysokiej spójności). Udowodnili także, że problem określenia zwycięzcy w grze R na ogólnych grafach spójnych jest PSPACE-zupełny.

LITERATURA

Pozycje [A1–A5] wypisane są na początku sekcji 4 jako prace wchodzące w skład osiągnięcia habilitacyjnego.

Pozycje [B1–B15] wypisane są w sekcji 5 jako pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze.

- [1] Mikkel Abrahamsen, An optimal algorithm for the separating common tangents of two polygons, *31st International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2015), Leibniz Int. Proc. Inform. (LIPIcs)* 34, 198–208, Dagstuhl, 2015.
- [2] Eyal Ackerman, On the maximum number of edges in topological graphs with no four pairwise crossing edges, *Discrete Comput. Geom.* 41 (3), 365–375, 2009.
- [3] Pankaj K. Agarwal, Boris Aronov, János Pach, Richard Pollack, Micha Sharir, Quasi-planar graphs have a linear number of edges, *Combinatorica* 17 (1), 1–9, 1997.
- [4] Pankaj K. Agarwal, János Pach, Micha Sharir, State of the union (of geometric objects), *Surveys on Discrete and Computational Geometry: Twenty Years Later, Contemp. Math.* 453, 9–48, AMS, 2008.
- [5] Miklós Ajtai, János Komlós, Endre Szemerédi, A note on Ramsey numbers, *J. Combin. Theory Ser. A* 29 (3), 354–360, 1980.
- [6] Edgar Asplund, Branko Grünbaum, On a colouring problem, *Math. Scand.* 8, 181–188, 1960.
- [7] János Barát, Jiří Matoušek, David R. Wood, Bounded-degree graphs have arbitrarily large geometric thickness, *Electron. J. Combin.* 13 (1), #R3, 2006.
- [8] Dwight R. Bean, Effective coloration, *J. Symb. Logic* 41 (2), 289–560, 1976.
- [9] Csaba Biró, Mitchel T. Keller, Stephen J. Young, Posets with cover graph of pathwidth two have bounded dimension, *Order* 33 (2), 195–212, 2016.
- [10] Thomas Bläsius, Ignaz Rutter, Simultaneous PQ-ordering with applications to constrained embedding problems, *24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2013)*, 1030–1043, SIAM, 2013.

²⁷Dokładne definicje „spójnego separatora” i „podobieństwa do cyklu” są dość techniczne — uwzględniają rozmieszczenie wag w grafie G i pewną stałą, której wartość zależy od n .

- [11] Hans L. Bodlaender, Dynamic programming on graphs with bounded treewidth, *15th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 1988)*, *Lecture Notes Comput. Sci.* 317, 105–118, Springer, 1988.
- [12] Peter Brass, William Moser, János Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, 2005.
- [13] James P. Burling, *On coloring problems of families of prototypes*, PhD thesis, University of Colorado, Boulder, 1965.
- [14] Sergio Cabello, Josef Cibulka, Jan Kynčl, Maria Saumell, Pavel Valtr, Peeling potatoes near-optimally in near-linear time, *30th Annual Symposium on Computational Geometry (SoCG 2014)*, 224–231, ACM, 2014.
- [15] Parinya Chalermsook, Coloring and maximum independent set of rectangles, *14th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX 2011) and 15th International Workshop on Randomization and Computation (RANDOM 2011)*, *Lecture Notes Comput. Sci.* 6845, 123–134, Springer, 2011.
- [16] Jérémie Chalopin, Louis Esperet, Zhentao Li, Patrice Ossona de Mendez, Restricted frame graphs and a conjecture of Scott, *Electron. J. Combin.* 23 (1), #P1.30, 2016.
- [17] Steven Chaplick, Radoslav Fulek, Pavel Klavík, Extending partial representations of circle graphs, *21st International Symposium on Graph Drawing (GD 2013)*, *Lecture Notes Comput. Sci.* 8242, 131–142, Springer, 2013.
- [18] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul D. Seymour, Robin Thomas, The strong perfect graph theorem, *Ann. Math.* 164 (1), 51–229, 2006.
- [19] Maria Chudnovsky, Alex D. Scott, Paul D. Seymour, Induced subgraphs of graphs with large chromatic number. V. Chandeliers and strings, arXiv:1609.00314.
- [20] Josef Cibulka, Jan Kynčl, Viola Mészáros, Rudolf Stolař, Pavel Valtr, Solution to Peter Winkler’s pizza problem, *Fete of Combinatorics and Computer Science, Bolyai Soc. Math. Stud.* 20, 69–93, Springer, 2010.
- [21] Josef Cibulka, Jan Kynčl, Viola Mészáros, Rudolf Stolař, Pavel Valtr, Graph sharing games: complexity and connectivity, *Theor. Comput. Sci.* 494, 49–62, 2013.
- [22] Kenneth L. Clarkson, Peter W. Shor, Applications of random sampling in computational geometry, II, *Discrete Comput. Geom.* 4 (5), 387–421, 1989.
- [23] Guoli Ding, Excluding a long double path minor, *J. Combin. Theory Ser. B* 66 (1), 11–23, 1996.
- [24] Vida Dujmović, Matthew Suderman, David R. Wood, Graph drawings with few slopes, *Comput. Geom.* 38 (3), 181–193, 2007.
- [25] Ben Dushnik, Edwin W. Miller, Partially ordered sets, *Amer. J. Math.* 63 (3), 600–610, 1941.
- [26] Alon Efrat, Micha Sharir, On the complexity of the union of fat convex objects in the plane, *Discrete Comput. Geom.* 23 (2), 171–189, 2000.
- [27] Thomas Erlebach, Jiří Fiala, On-line coloring of geometric intersection graphs, *Comput. Geom.* 23 (2), 243–255, 2002.
- [28] Stefan Felsner, On-line chain partitions of orders, *Theor. Comput. Sci.* 175 (2), 283–292, 1997.
- [29] Stefan Felsner, Ching Man Li, William T. Trotter, Adjacency posets of planar graphs, *Discrete Math.* 310 (5), 1097–1104, 2010.
- [30] Jacob Fox, János Pach, A separator theorem for string graphs and its applications, *Combin. Prob. Comput.* 19 (3), 371–390, 2010.
- [31] Jacob Fox, János Pach, Coloring K_k -free intersection graphs of geometric objects in the plane, *European J. Combin.* 33 (5), 853–866, 2012.
- [32] Jacob Fox, János Pach, Applications of a new separator theorem for string graphs, *Combin. Prob. Comput.* 23 (1), 66–74, 2014.
- [33] Jacob Fox, János Pach, Andrew Suk, The number of edges in k -quasi-planar graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 27 (1), 550–561, 2013.
- [34] Zoltán Füredi, Jeff Kahn, On the dimensions of ordered sets of bounded degree, *Order* 3 (1), 15–20, 1986.
- [35] Tibor Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 18 (1–2), 25–66, 1967.
- [36] Michael R. Garey, David S. Johnson, Larry Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, *Theor. Comput. Sci.* 1 (3), 237–267, 1976.
- [37] Fănică Gavril, The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 16 (1), 47–56, 1974.
- [38] Fănică Gavril, Maximum weight independent sets and cliques in intersection graphs of filaments, *Inform. Process. Lett.* 73 (5–6), 181–188, 2000.
- [39] Martin Grohe, Local tree-width, excluded minors, and approximation algorithms, *Combinatorica* 23 (4), 613–632, 2003.
- [40] Martin Grohe, Dániel Marx, Structure theorem and isomorphism test for graphs with excluded topological subgraphs, *SIAM J. Comput.* 44 (1), 114–159, 2015.

- [41] Martin Grötschel, László Lovász, Alexander Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, 1988.
- [42] András Gyárfás, On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs, *Discrete Math.* 55 (2), 161–166, 1985. Corrigendum: *Discrete Math.* 62 (3), 333, 1986.
- [43] András Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, *Zastos. Mat.* 19 (3–4), 413–441, 1987.
- [44] András Gyárfás, Jenő Lehel, Covering and coloring problems for relatives of intervals, *Discrete Math.* 55 (2), 167–180, 1985.
- [45] András Gyárfás, Jenő Lehel, On-line and first fit colorings of graphs, *J. Graph Theory* 12 (2), 217–227, 1988.
- [46] Rudolf Halin, S -functions for graphs, *J. Geom.* 8 (1–2), 171–186, 1976.
- [47] David Haussler, Emo Welzl, ε -Nets and simplex range queries, *Discrete Comput. Geom.* 2 (2), 127–151, 1987.
- [48] Eduard Helly, Über Systeme von abgeschlossen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten, *Monatsh. Math. Phys.* 37 (1), 281–302, 1930.
- [49] Toshio Hiraguchi, On the dimension of orders, *Sci. Rep. Kanazawa Univ.* 4 (1), 1–20, 1955.
- [50] David M. Howard, Noah Streib, William T. Trotter, Bartosz Walczak, Ruidong Wang, The dimension of posets with planar cover graphs excluding two long incomparable chains, arXiv:1608.08843.
- [51] Vít Jelínek, Eva Jelínková, Jan Kratochvíl, Bernard Lidický, Marek Tesař, Tomáš Vyskočil, The planar slope number of planar partial 3-trees of bounded degree, *Graphs Combin.* 29 (4), 981–1005, 2013.
- [52] Gwenaél Joret, Piotr Micek, William T. Trotter, Ruidong Wang, Veit Wiechert, On the dimension of posets with cover graphs of treewidth 2, *Order*, praca w druku.
- [53] Gwenaél Joret, Piotr Micek, Veit Wiechert, Sparsity and dimension, *27th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2016)*, 1804–1813, SIAM, 2016.
- [54] Richard M. Karp, On-line algorithms versus off-line algorithms: how much is it worth to know the future?, *IFIP 12th World Computer Congress on Algorithms, Software, Architecture: Information Processing '92*, vol. 1, 416–429, North-Holland, 1992.
- [55] Gyula Katona, Tibor Nemetz, Miklós Simonovits, Újabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira, *Mat. Lapok* 15 (1–3), 228–238, 1964.
- [56] Klara Kedem, Ron Livne, János Pach, Micha Sharir, On the union of Jordan regions and collision-free translational motion amidst polygonal obstacles, *Discrete Comput. Geom.* 1 (1), 59–71, 1986.
- [57] David Kelly, On the dimension of partially ordered sets, *Discrete Math.* 35 (1–3), 135–156, 1981.
- [58] Balázs Keszegh, János Pach, Dömötör Pálvölgyi, Drawing planar graphs of bounded degree with few slopes, *SIAM J. Discrete Math.* 27 (2), 1171–1183, 2013.
- [59] Henry A. Kierstead, William T. Trotter, An extremal problem in recursive combinatorics, *3rd Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (CGTC 1981)*, *Congressus Numerantium* 33, 143–153, Utilitas Math. Pub., 1981.
- [60] Jeong Han Kim, The Ramsey number $R(3, t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$, *Random Struct. Algorithms* 7 (3), 173–207, 1995.
- [61] Seog-Jin Kim, Alexandr V. Kostochka, Kittikorn Nakprasit, On the chromatic number of intersection graphs of convex sets in the plane, *Electron. J. Combin.* 11 (1), #R52, 2004.
- [62] Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Yota Otachi, Ignaz Rutter, Toshiki Saitoh, Maria Saumell, Tomáš Vyskočil, Extending partial representations of proper and unit interval graphs, *Algorithmica*, praca w druku.
- [63] Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Yota Otachi, Toshiki Saitoh, Extending partial representations of subclasses of chordal graphs, *Theor. Comput. Sci.* 576, 85–101, 2015.
- [64] Pavel Klavík, Jan Kratochvíl, Tomáš Vyskočil, Extending partial representations of interval graphs, *8th International Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC 2011)*, *Lecture Notes Comput. Sci.* 6648, 276–285, Springer, 2011.
- [65] Martin Klazar, A general upper bound in extremal theory of sequences, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 33 (4), 737–746, 1992.
- [66] Kolja Knauer, Piotr Micek, Torsten Ueckerdt, How to eat 4/9 of a pizza, *Discrete Math.* 311 (16), 1635–1645, 2011.
- [67] Alexandr V. Kostochka, On upper bounds for the chromatic numbers of graphs, *Trudy Inst. Mat.* 10, 204–226, 1988, po rosyjsku.
- [68] Alexandr V. Kostochka, Coloring intersection graphs of geometric figures with a given clique number, *Towards a Theory of Geometric Graphs*, *Contemp. Math.* 342, 127–138, AMS, 2004.
- [69] Alexandr V. Kostochka, Jan Kratochvíl, Covering and coloring polygon-circle graphs, *Discrete Math.* 163 (1–3), 299–305, 1997.
- [70] Alexandr V. Kostochka, Kevin G. Milans, Coloring clean and K_4 -free circle graphs, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, 399–414, Springer, 2012.

- [71] Alexandr V. Kostochka, Jaroslav Nešetřil, Chromatic number of geometric intersection graphs, *1995 Prague Midsummer Combinatorial Workshop, KAM Series* 95–309, 43–45, Charles University, Prague, 1995.
- [72] Kazimierz Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* 15, 271–283, 1930.
- [73] Ewa Malesińska, Steffen Piskorz, Gerhard Weißenfels, On the chromatic number of disk graphs, *Networks* 32 (1), 13–22, 1998.
- [74] Jiří Matoušek, János Pach, Micha Sharir, Shmuel Sifrony, Emo Welzl, Fat triangles determine linearly many holes, *SIAM J. Comput.* 23 (1), 154–169, 1994.
- [75] Sean McGuinness, On bounding the chromatic number of L-graphs, *Discrete Math.* 154 (1–3), 179–187, 1996.
- [76] Sean McGuinness, Colouring arcwise connected sets in the plane I, *Graph. Combin.* 16 (4), 429–439, 2000.
- [77] Piotr Micek, Rom Pinchasi, Note on the number of edges in families with linear union-complexity, arXiv:1312.1678.
- [78] Piotr Micek, Veit Wiechert, Topological minors of cover graphs and dimension, arXiv:1504.07388.
- [79] Padmini Mukkamala, Dömötör Pálvölgyi, Drawing cubic graphs with the four basic slopes, *19th International Symposium on Graph Drawing (GD 2011), Lecture Notes Comput. Sci.* 7034, 254–265, Springer, 2012.
- [80] Jaroslav Nešetřil, Patrice Ossona de Mendez, *Sparsity, Algorithms Combin.* 28, Springer, 2012.
- [81] Øystein Ore, *Theory of Graphs, AMS Colloq. Publ.* 38, AMS, 1962.
- [82] János Pach, Decomposition of multiple packing and covering, *Diskrete Geometrie, 2. Kolloq. Inst. Math. Univ. Salzburg*, 169–178, 1980.
- [83] János Pach, Dömötör Pálvölgyi, Bounded-degree graphs can have arbitrarily large slope numbers, *Electron. J. Combin.* 13 (1), #N1, 2006.
- [84] János Pach, Radoš Radoičić, Géza Tóth, Relaxing planarity for topological graphs, *More Graphs, Sets and Numbers, Bolyai Soc. Math. Stud.* 15, 285–300, Springer, 2006.
- [85] János Pach, Farhad Shahrokhi, Mario Szegedy, Applications of the crossing number, *Algorithmica* 16 (1), 111–117, 1996.
- [86] René Peeters, On coloring j -unit sphere graphs, Technical Report FEW 512, Department of Economics, Tilburg University, 1991.
- [87] Neil Robertson, Paul D. Seymour, Graph minors. III. Planar tree-width, *J. Combin. Theory Ser. B* 36 (1), 49–64, 1984.
- [88] Neil Robertson, Paul D. Seymour, Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph, *J. Combin. Theory Ser. B* 89 (1), 43–76, 2003.
- [89] Neil Robertson, Paul D. Seymour, Graph minors. XX. Wagner’s conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* 92 (2), 325–357, 2004.
- [90] Alexandre Rok, Bartosz Walczak, Coloring curves that cross a fixed curve, arXiv:1512.06112.
- [91] Alex D. Scott, Induced trees in graphs of large chromatic number, *J. Graph Theory* 24 (4), 297–311, 1997.
- [92] Deborah E. Seacrest, Tyler Seacrest, Grabbing the gold, *Discrete Math.* 312 (10), 1804–1806, 2012.
- [93] Micha Sharir, On k -sets in arrangements of curves and surfaces, *Discrete Comput. Geom.* 6 (1), 593–613, 1991.
- [94] Daniel D. Sleator, Robert E. Tarjan, A data structure for dynamic trees, *J. Comput. System Sci.* 26 (3), 362–391, 1983.
- [95] Noah Streib, William T. Trotter, Dimension and height for posets with planar cover graphs, *European J. Combin.* 35, 474–489, 2014.
- [96] Andrew Suk, Coloring intersection graphs of x -monotone curves in the plane, *Combinatorica* 34 (4), 487–505, 2014.
- [97] Mikkel Thorup, Compact oracles for reachability and approximate distances in planar digraphs, *J. ACM* 51 (6), 993–1024, 2004.
- [98] William T. Trotter, Order preserving embeddings of aographs, *Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes Math.* 642, 572–579, Springer, 1978.
- [99] William T. Trotter, *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, Johns Hopkins, 1992.
- [100] William T. Trotter, John I. Moore, The dimension of planar posets, *J. Combin. Theory Ser. B* 22 (1), 54–67, 1977.
- [101] William T. Trotter, John I. Moore, David P. Sumner, The dimension of a comparability graph, *Proc. Amer. Math. Soc.* 60, 35–38, 1976.
- [102] Pavel Valtr, Graph drawing with no k pairwise crossing edges, *5th International Symposium on Graph Drawing (GD 1997), Lecture Notes Comput. Sci.* 1353, 205–218, Springer, 1997.
- [103] Pavel Valtr, On geometric graphs with no k pairwise parallel edges, *Discrete Comput. Geom.* 19 (3), 461–469, 1998.
- [104] Klaus Wagner, Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, *Math. Ann.* 114 (1), 570–590, 1937.
- [105] Mihalis Yannakakis, The complexity of the partial order dimension problem, *SIAM J. Algebr. Discrete Methods* 3 (3), 351–358, 1982.