30.01.17

dr hab. Aleksander Ćwiszewski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 16.01.2016 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Liliany Klimczak

pt. „Nieliniowe zagadnienia brzegowe typu Neumanna z operatorami typu p-Laplace'a"

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Promotorem rozprawy jest dr hab. Leszek Gasiński. Praca jest napisana w języku polskim i liczy łącznie 81 stron.

Rozprawa poświęcona jest badaniom istnienia rozwiązań zagadnień postaci

$$(P) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}\, a(\nabla u(x)) = f(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n_a}(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ jest spójnym i ograniczonym zbiorem otwartym o brzegu klasy C^2, $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ polem wektorowym postaci $a(y) := a_0(|y|)y$, $y \in \mathbb{R}^N$, gdzie $a_0 \in C^1(0, +\infty) \cap C([0, +\infty))$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją Carathéodory'ego oraz $\frac{\partial u}{\partial n_a}(x) = a(\nabla u(x) \cdot n(x)$, gdzie $n(x)$ jest zewnętrznym wektorem normalnym do brzegu w punkcie $x \in \partial\Omega$. Wyniki uzyskano przy założeniu kilku ogólnych warunków na a, które oznaczono jako $H(a)$ i które, w szczególności, są spełnione przez takie operatory jak p-laplasjan dla $p \in (1, +\infty)$, $(\Delta_p u = \mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u))$, (p, q)-laplasjan dla $p, q \in (1, +\infty)$ $(\Delta_{p,q} = \Delta_p + \Delta_q)$ oraz uogólniony operator średniej krzywizny $(\mathrm{div}\,((1 + |\nabla u|^2)^{(p-2)/2}\nabla u))$. W odniesieniu do f rozważa się cztery rodzaje założeń dotyczących m.in. wzrostu funkcji f oraz jej zachowania w nieskończoności i w pobliżu zera. Autorka używa metod wariacyjnych w odniesieniu do funkcjonału

$$\varphi(u) = \int_\Omega G(\nabla u(x))\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, u(x))\,\mathrm{d}x,$$

gdzie $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jest taka, że $\nabla G = a$, a F jest funkcją pierwotną f lub jej modyfikacji. Zastosowane metody wariacyjne obejmują minimalizację funkcjonałów koercytywnych lub spełniających warunek Palais-Smale'a, twierdzenie o przełęczy górskiej, lemat o deformacji oraz wyniki teorii grup krytycznych.

Struktura rozprawy. Rozprawa składa się z czterech rozdziałów, spisu treści, zakończenia i bibliografii. W pierwszym rozdziale przedstawiono zagadnienie i założenia w kontekście historycznym, nakreśla również idee zastosowania metod wariacyjnych dla zagadnień z quasi-liniowym operatorem różniczkowym oraz wyjaśnia specyfikę zagadnień z warunkiem brzegowym Neumanna, na przykładzie braku nierówności Poicarégo dla przestrzeni $W^{1,p}(\Omega)$ i związanego z tym braku (słabej) koercytywności funkcjonału działania dla zagadnienia z p-laplasjanem i $f(x, u) = |u|^{q-2}u$, $0 < q < p$ lub $p < q < p^*$ (dla tego samego równania z warunkami brzegowymi Dirichleta własność koercytywności zachodzi). Rozdział 2 to preliminaria zawierające przedstawienie stosowanych oznaczeń i terminów oraz metod rachunku wariacyjnego wykorzystywanych w pracy. Sformułowano tu również twierdzenie o regularności rozwiązań i zasadę maksimum dla równania z quasiliniowym operatorem różniczkowym. Rozdział 3 poświęcony jest omówieniu różnych typów założeń i ich bezpośrednich konsekwencji dla funkcjonału działania. Zaprezentowano grupę założeń $H(a)$ dotyczących odwzorowania a (pochodzących od Libermana). Warunki te pozwalają na poszukiwanie słabych rozwiązań (P) poprzez badanie funkcjonału φ na przestrzeni $W^{1,p}(\Omega)$, gdzie $p \in (0, +\infty)$ jest wykładnikiem opisującym wzrost a, i jednocześnie zapewniają regularność słabych rozwiązań (uzyskanych wcześniej metodami wariacyjnymi). Następnie Autorka omawia cztery grupy założeń $H(f)_1$, $H(f)_2$, $H(f)_3$ i $H(f)_4$, które dotyczą funkcji f. Wreszcie rozdział 4 zawiera sformułowania i dowody wyników rozprawy. Rozprawa zwieńczona jest Zakończeniem, które stanowi podsumowanie i wskazuje na perspektywy dalszych badań.

Wyniki rozprawy. Pierwsza grupa wyników o istnieniu rozwiązań zagadnienia (P) dotyczy f spełniającego założenia $H(f)_1$. Założono tu, że istnieją ujemnej w_- i dodatniej w_+ takich, że $f(x, w_-(x)) \leq 0 \leq f(x, w_+(x)))$ dla p.w. $x \in \Omega$ oraz $A(w_-) \leq 0 \leq A(w_+)$, gdzie $A : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$, $\langle A(u), v\rangle := \int_\Omega a(\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx$. Ponadto wymaga się, aby f była ograniczona na zbiorach ograniczonych (z uwzględnieniem zbiorów miary zero) oraz aby spełniony był następujący jednostronny warunek wzrostu

$$f(x, u)u \geq c_0|u|^s - c_1|u|^r \text{ dla p.w. } x \in \Omega \text{ i wszystkich } u \in \mathbb{R},$$

gdzie $1 < s \leq p < r < p^*$, i warunek typu Ambrosettiego-Rabinowitza na zbiorze ograniczonym. Przy założeniu, że $f(x, 0) = 0$ dla p.w. $x \in \Omega$, Autorka dowodzi, że zbiór dodatnich (odpowiednio: ujemnych) rozwiązań zagadnienia (P) jest niepustym zbiorem posiadającym element maksymalny (minimalny) u_+ (v_-) (tw. 4.1 i 4.2). Istnienie rozwiązań jest uzyskane przez rozważenie odpowiednich przedłużeń funkcji f obciętych do zbiorów $\{(x, u) \in \Omega\times\mathbb{R} \mid 0 \leq u \leq w_+(x)\}$ i $\{(x, u) \in \Omega\times\mathbb{R} \mid\leq w_-(x) \leq u \leq 0\}$ (z uwzględnieniem faktu, że f jest funkcją Caratheodory'ego). Wówczas stowarzyszone funkcjonały $\widehat{\varphi}_+$ i $\widehat{\varphi}_-$ są (słabo) koercytywne i słabo półciągłe z dołu, co wobec refleksywności $W^{1,p}(\Omega)$ implikuje przyjmowanie przez nie minimum, które dzięki założeniom z grupy $H(f)_1$ są ujemne. Stąd punkty, w których są osiągane są różne od zerowego rozwiązania. Następnie używając odpowiednich funkcji próbnych pokazuje się, że uzyskane punkty minimalizujące są w zbiorach, odpowiednio, $[0, w_+]$ i $[w_-, 0]$ (w sensie relacji nierówności prawie wszędzie), czyli są słabymi rozwiązaniami zagadnienia z oryginalnym f. Istnienie elementów maksymalnych i minimalnych otrzymuje się przez zastosowanie teorii górnych i dolnych rozwiązań oraz lematu Kuratowskiego-Zorna w zbiorach rozwiązań dodatnich i ujemnych. Ponadto, przy dodatkowych założeniu $H(a)(v)$, udowodniono istnienie rozwiązania zmieniającego znak (tw. 4.9). Funkcjonał $\tilde{\varphi}$ dla zagadnienia z odpowiednim przedłużeniem obcięcia funkcjonału f do zbioru pomiędzy v_- i u_+, na mocy twierdzenia o górskiej przełęczy, posiada punkt krytyczny y_0 typu siodłowego, który jest w zbiorze $[v_-, u_+]$ i $\tilde{\varphi}(y_0) > \max\{\tilde{\varphi}(v_-), \tilde{\varphi}(u_+)\}$. Z ogólnej teorii wiadomo, że dla punktu siodłowego pierwsza grupa krytyczna jest nietrywialna, a w przypadku $\tilde{\varphi}$ pokazano, że grupy krytyczne zera są trywialne (stw. 4.5), co oznacza, że $y_0 \neq 0$. Zmiana znaku przez y_0 wynika z faktu, że rozwiązania o stałym znaku są punktami krytycznymi jednego ze wspomnianych wcześniej funkcjonałów $\tilde{\varphi}_+$ i $\tilde{\varphi}_-$, a ktore posiadają jedynie dwa punkty krytyczne, odpowiednio, $0, u_+$ i $0, v_-$ (Lemat 4.7).

Druga grupa wyników dotyczy funkcji f spełniającej założenia $H(f)_2$, gdzie zakłada sie subkrytyczny wzrost, ograniczenie z góry funkcji pierwotnej F przez funkcję całkowalną oraz istnienie dodatniej wartości średniej $f(\cdot, c)$ dla ustalonego $c \neq 0$. Wówczas przy założeniu, że $\int_\Omega \limsup_{|u|\to+\infty} F(x,u)\mathrm{d}x < 0$, funkcjonał φ jest ograniczony z dołu i posiada własność Palais-Smale'a, co implikuje istnienie punktu u_1, w ktorym φ przyjmuje minimumm (tw. 4.12 dla $b \equiv 0$). Okazuje się, że istnieje drugie nietrywialne rozwiązanie przy dodatkowych założeniu, że wartości $F(x,u)$ po podzieleniu przez $|u|^p$ są dodatnie dla u bliskich zeru (przynajmniej dla x ze zbioru miary dodatniej) oraz F jest ograniczona przez odpowiednią wielokrotność $\lambda_1|u|^p$. Wtedy φ przyjmuje wartości ujemne dla stałych odwzorowań z pewnego sąsiedztwa zera, czyli na $[-R,R]\setminus\{0\}$, dla pewnego $R>0$, oraz nieujemne dla u takich, że $\int_\Omega |u(x)|^{p-2}u(x)\,\mathrm{d}x = 0$. To implikuje, że $c_R \geq 0$, gdzie $c_R := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max \varphi(\gamma([-R,R]))$ i $\Gamma := \{\gamma \in C([-R,R], W^{1,p}(\Omega)) \mid \gamma(\pm R) = \pm R\}$. Z drugiej strony jeśli założy się, że φ nie ma innych ma punktów krytycznych oprócz 0 i u_1, to lemat o deformacji pozwala na znalezienie krzywej w zbiorze Γ, na której φ przyjmuje jedynie ujemne wartości. Przeczy to zauważonej wcześniej własności $c_R \geq 0$ i dowodzi istnienia drugiego nietrywialnego rozwiązania zagadnienia (P).

W trzeciej grupie wyników znalazło się twierdzenie o istnieniu rozwiązań (P) dla a spełniającego warunki $H(a)(i)$-(v) oraz $(p-1)$-podliniowej f, tj. spełniającej założenia $H(f)_2$, a w szczególności

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{f(x,u)}{|u|^{p-2}u} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{|u|\to\infty} F(x,u) = +\infty$$

jednostajnie dla p.w. $x \in \Omega$. Dodatkowo zakłada się ograniczoność f na zbiorach ograniczonych i pewne warunki typu Ambrosettiego-Rabinowitza. Przy tych założeniach Autorka pokazuje, że grupy krytyczne w zerze są trywialne. Ponadto wykazano, że $\lim_{|u|\to+\infty, u\in\mathbb{R}} \varphi(u) = -\infty$ i φ jest ograniczona na przestrzeni $V \subset W^{1,p}(\Omega)$ odzworowań o zerowej wartości średniej. Wówczas z ogólnego faktu (stw. 2.25) wynika, że jeżeli zbiór punktów krytycznych jest skończony, to pierwsza grupa krytyczna jest nietrywialna (a zatem różna od grupy krytycznej zera), co na mocy odpowiedniego twierdzenia z teorii grup krytycznych implikuje istnienie nietrywialnego rozwiązania.

Czwarty typ wyników dotyczy f spełniających założenia $H(f)_4$, tj. takich które są $(p-1)$-nadliniowe w nieskończoności i $(p-1)$-podliniowe w zerze, mają subkrytyczny wzrost, spełniają pewien wariant założeń typu Ambrosettiego-Rabinowitza (3.24) i warunek $f(x,u)u \geq 0$. Przy tych założeniach pokazano, że w grupy krytyczne zera są trywialne, o ile φ jest ograniczona z dołu na zbiorze punktów krytycznych. Ponadto, jeżeli zero byłoby izolowanym punktem krytycznym, to jego pierwsza grupa krytyczna byłaby nietrywialna (czyli różna od trywialnej grupy krytycznej w zerze), co pociąga za sobą istnienie niezerowego rozwiązania zagadnienia (P).

Ocena rozprawy. Ogólnie rzecz ujmując praca zredagowana została starannie. Sformułowania definicji, założeń i tez są precyzyjne i zrozumiałe. Dowody są przeprowadzone w sposób poprawny, choć zawierają sporą ilość odnośników do dowodów z innych pozycji bibliograficznych. Nie znalazłem istotnych pomyłek, które podważałyby prawdziwość wyników lub samych rozumowań. Kilka istotniejszych uwag formułuję poniżej.

1. W definicji 2.2 Autorka definiuje słabą półciągłość z dołu i słabą koercytywność dla funkcjonałów z przestrzeni sprzężonej X^* do przestrzeni Banacha X, używając przy tym odwzorowania dualności $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}$ (jest jasne, że żaden element X^* nie jest słabo koercytywny). Podobnie w dowodzie stw. 3.23 użyta jest wspomniana dualność w odniesieniu do nieliniowego funkcjonału, tzn. dla argumentu, który nie należy do dziedziny odwzorowania. Na szczęście po odpowiednich (oczywistych) korektach otrzymujemy poprawną definicję i rozumowanie.

2. Równość (3.31) w dowodzie lematu 3.18 jest w ogólności nieprawdziwa. Dowód lematu 3.18 (b) i (c) będzie poprawny jeśli całkowanie względem t będzie się odbywać na przedziale $[-1, 0]$ lub $y_1 - y_2$ będzie zastąpione przez $y_2 - y_1$.

3. Nie jest jasne czym jest element w_+ w dowodzie stwierdzenia 3.22. Rozważa się tu $f = \psi$, dla której $w_+ = \xi_0$ (zgodnie z Uwagą 3.7 i Przykładem 3.9). Wówczas wydaje się, że dowód stw. 3.22 możnaa zakończyć się w połowie strony nr 30, gdyż wiadomo tu, że $u, y \in [\xi_0, w_+]$, tj. $u = y = u^* = \xi_0$ (dalsza część byłaby wtedy niepotrzebna).

4. W dowodzie lematu 4.4 oszacowanie na wartości funkcji $z \mapsto \tilde{f}(z, x_n(z))$, zgodnie z (4.21), zależy również od w_- $(w_- \leq v_-)$, a w oszacowaniu na stronie 47 pojawia się jedynie $\|a_{w_+(\hat{z}_0)}\|_\infty$.

5. Różniczkowalność funkcjonału φ (w przeciwieństwie do jego ciągłości) została potraktowana w sposób niezbyt uporządkowany. A mianowicie, w niektórych miejscach Autorka odcytowuje ciągłą różniczkowalność funkcjonału do miejsca, gdzie nie dyskutuje się tej kwestii. W następnym miejscu wskazaje w jaki sposób można to wykazać dla składnika funkcjonału związanego z a, a w późniejszym rozdziale uzasadnia różniczkowalność składnika związanego z operatorem Niemyckiego funkcji f. A konkretnie: w tezie tw. 3.21 stwierdza sie, że ogólny funkcjonał działania jest klasy C^1 sugerując, że dowód Theorem 3.1 z [51] pozostaje prawdziwy dzięki oszacowaniu (3.32). Jednak wynik ten odnosi się do drugiej części tw. 3.21 dotyczącego faktu mówiącego, że lokalne minimum funkcjonału względem $C^1(\overline{\Omega})$ jest lokalnym minimum względem $W^{1,p}(\Omega)$ (na marginesie: we wskazanym dowodzie używa się nieco innych oszacowań na G niż (3.32) i nie porusza kwestii regularności funkcjonału działania). Teza o regularności tego funkcjonału pojawia się jednak ponownie później w stwierdzeniu 3.23, w którego dowodzie autorka mówi, że regularność funkcjonału związanego z a sprawdza się „podobnie jak dla operatora Niemyckiego (patrz [21, Chapter 2])". Później w dowodzie twierdzenia 4.1 auorka uzasadnia ciągłą różniczkowalność składnika pochodzącego od operatora Niemyckiego korzystając z Theorem 2.8 w opracowaniu [21].

6. Podobnie jak w punkcie 5, nie jest jasne na jakiej podstawie autorka wnioskuje w dowodzie stwierdzenia 3.22, że funkcjonał σ_+ obcięty do $\operatorname{int} C_+$ jest różniczkowalny w sensie Frechéta.

7. Uzyskane w rozprawie słabe rozwiązania okazują się być odpowiednio regularne dzięki założeniom $H(a)$ oraz twierdzeniu 2.28. W dowodach nie używa się regularności rozwiązań, dlatego kwestia regularności wydaje się tu nieco wtórna (zasadnicza wartość pracy leży w umiejętności znajdowania słabych rozwiązań). Wg mnie brakuje dyskusji czy wszystkie założenia na a i f są niezbędne do otrzymania słabych rozwiązań i które dodano ze względu na pojawienie się regularności w tezach twierdzeń.

8. Nierówność (3.16) w lemacie 3.8 (str. 17) nie ma formmalnego sensu dla $\xi < 0$ (a jest sformułowana dla $\xi \in \mathbb{R}$). W miejscu, gdzie jest stosowana, tj. w dowodzie tw. 4.1 na stronie 38, jest potrzebna dla $\xi \geq 0$.

9. Autorka w wielu miejscach odwołuje się do twierdzeń w innych pracach lub książkach i nie cytuje ich sformułowania. W części tych przypadków nie stanowi to problemu. Ale jest kilka miejsc, w których taka redakcja stanowiła znaczne utrudnienie. Dotyczy to wspomnianej już kwesti różniczkowalności funkcjonału φ, ale także kilku innych fragmentów. Przykładowo, w dowodzie stwierdzenia 3.23, w celu stwiedzenia,

że $v_0 \in L^\infty(\Omega)$, autorka odwołuje się do Corollary 8.7 w książce [50], gdzie stosowny wynik znajduje się, ale samo jego przeczytanie wymaga zapoznania się z nieco innymi założeniami na a i f oraz sprawdzenia, że założenia z rozprawy implikują te wymagane w książce. Inne przykłady, w których czytelnik napotyka podobne trudności to: dowód twierdzenia 3.20 o własnościach odwzorowania A wyznaczonego przez a, gdzie jest jedynie odwołanie do dowodu Proposition 3.1 w publikacji [25]; w dowodzie stwierdzenia 3.22 jest odwołanie do dowodu Proposition 3.7 w publikacji [33]; w dowodzie Lematu 4.3 jest odwołanie do dowodu Lemma 4.2 w pracy [26]. Uważam, że rozprawa doktorska nie jest miejscem na tego typu redakcję dowodów twierdzeń, które nie stanowią wątku pobocznego pracy, lecz kluczowe części rozprawy (z założenia mające stanowić przedmiot szczególnego zainteresowania rezenzentów). Być może świadczy to o tym, że część przygotowawcza pracy, tj. rozdziały 2 i 3, powinny być bardziej wyczerpujące (i obszerne). Na szczęście opisany tu problem nie jest wszechobecny w pracy i jest złagodzony przez fakt, że w ogólnosci rozprawa zawiera również pełne i interesujące uzasadnienia głównych wyników.

10. W dowodzie twierdzenia 4.1 na stronie 37 nie jest jasne wyjaśnienie faktu, iż słaba zbieżnoość $x_n \rightharpoonup x$ w $W^{1,p}(\Omega)$ pociąga zbieżność $x_n \to x$ w $L^r(\Omega)$ (co jest prawdą). Autorka powołuje się tu na Exercise 11.14 w książce [42]. Jednak tam jest mowa o zbieżności $x_n \to x$ w $L^p(\Omega)$, która nie jest podprzestrzenią $L^r(\Omega)$ (przypomnę, że tutaj $p < r < p^*$).

Przejdę teraz do oceny znaczenia wyników rozprawy. Tematyka rozprawy wpisuje się w szeroki i obecny w świecie nurt badań nieliniowych zagadnień różniczkowych opartych na metodach wariacyjnych. W pracy nie proponuje się nowych metod lub modyfikacji znanych. Stosuje się tu klasyczne techniki do wcześniej niebadanych w takiej ogólności zagadnień. Ogólnie rzecz ujmując, wyniki p. Klimczak stanowią odpowiedniki podobnych twierdzeń dla zagadnień z warunkami Dirichleta. Przypadek zagadnień z warunkami Neumanna jest jednak istotnie różny. Główną wartość pracy upatruję w sformułowaniu założeń dla f oraz analizy geometrii i topologii funkcjonału φ przy różnych założeniach, z uwzględnieniem dodatkowej trudności wynikającej z nieliniowości operatora różniczkowego i braku nierówności Poincarégo na całej przestrzeni $W^{1,p}(\Omega)$. Zarówno założenia o a jak i o f są dosyć złożone i obszerne. Jednak klasa odwozorowań spełniających założenia na a jest na tyle szeroka, że obejmuje kilka ważnych i wcześniej wspomianych klas nieliniowych operatorów różniczkowych. Natomiast założenia na f są naturalne, często spotykane w literaturze i podparte konkretnymi przykładami. Autorka swobodnie używa narzędzi wariacyjnych i pojęć analizy funkcjonalnej. Uważam, że zbadanie zagadnienia (P) dla różnych założeń o funkcji f stanowi ciekawy wkład w dziedzinę nieliniowych zagadnień z operatorami typu p-Laplace'a.

Konkluzja. Biorąc pod uwagę wyżej sformułowane oceny, uważam, że rozprawa doktorska mgr. Liliany Klimczak spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania oraz wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Aleksander Ćwiszewski

Aleksander Ćwiszewski