

Warszawa, 20.08.2017

prof. dr hab. Piotr Gwiazda
Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk
Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej magistra Pawła Szafraniec "Systems of Hemivariational Inequalities in Contact Mechanics"

Recenzowana przeze mnie rozprawa doktorska ma charakter kumulatywny, czyli składa się z pięciu opublikowanych artykułów poprzedzonych autoreferatem oraz zawiera oświadczenia współautorów. Jest to zresztą pierwsza rozprawa doktorska w formie kumulatywnej, którą recenzuję, wcześniej w takiej formie miałem tylko do czynienia z rozprawami habilitacyjnymi. Zanim przejdę do oceny merytorycznej tej konkretnej rozprawy doktorskiej chciałbym podzielić się uwagą natury ogólnej. Wydaje mi się, że taka forma jest niewłaściwa dla rozpraw doktorskich. A mianowicie tryb edytorski w czasopismach matematycznych jest na tyle długi w stosunku do czteroletniego okresu studiów doktoranckich, że uniemożliwia zawarcie wyników uzyskanych w trakcie czwartego, a być może i trzeciego roku studiów doktoranckich. Tak jest zresztą i w tym wypadku: na osiem prac wymienionych jako publikacje doktoranta, dwie są wymienione jako wysłane, a jedna jako przyjęta i nie są włączone do rozprawy. W tej sytuacji zasadniczo nie będę oceniał formy zawartych w rozprawie prac w czasopismach, bo została ona oceniona przez recenzentów i edytorów.

Przechodząc do oceny tej konkretnej rozprawy zacznę od przedstawienia jej zawartości. Rozprawa składa się z następujących prac:

- (I) S. Migórski, P. Szafraniec, A class of dynamic frictional contact problems governed by a system of hemivariational inequalities in thermoviscoelasticity, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 15 (2014), 158–171.
- (II) P. Szafraniec, Dynamic nonsmooth frictional contact problems with damage in thermoviscoelasticity, *Mathematics and Mechanics of Solids* 21 (2016), 525–538.
- (III) P. Szafraniec, Analysis of an elasto-piezoelectric system of hemivariational inequalities with thermal effects, *Acta Mathematica Scientia* 37 (2017), 1–13.
- (IV) K. Bartosz, D. Danan, P. Szafraniec, Numerical analysis of a dynamic bilateral thermoviscoelastic contact problem with nonmonotone friction law, *Computers and Mathematics with Applications* 73 (2017), 727–746.
- (V) P. Szafraniec, Evolution Boussinesq model with nonmonotone friction and heat flux, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 34 (2017), 403–415.

Chciałbym podkreślić, że pod względem ilości prac oraz poziomu czasopism dorobek jest obszerny. Najlepsze publikacje (pod względem czasopism) zawarte w rozprawie są opublikowane w czasopiśmie *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, które moim zdaniem jest dobrym, aczkolwiek nie bardzo dobrym czasopismem. Mimo że w wypadku młodej osoby będącej jeszcze doktorantem jest to bardzo dobra lista publikacji, to zdecydowanie w kolejnym etapie kariery matematycznej powinny pojawiać się też prace w czasopismach wyższej rangi, przy czym należy pamiętać, że nie zawsze impact factor jest najlepszym wyznacznikiem jakości czasopisma.

Pierwsze trzy publikacje są bardzo podobne do siebie co do zastosowanych technik matematycznych. Zastosowane zostały nierówności hemiwariacyjne do niemonotonicznych zagadnień brzegowych dla problemów sprężystości. Technika polega na rozbiciu układu równań z wielowartościowym warunkiem brzegowym na poszczególne nierówności przy danych zmiennych pochodzących z pozostałych równań. Następnie pokazuje się, że rozwiązania tychże nierówności spełniają oszacowania lipschitzowskie względem pozostałych niewiadomych. Dzięki temu metoda Banacha punktu stałego, przy założeniu odpowiedniej małości stałych, umożliwia wyznaczenie rozwiązania pełnego układu. Trudno tu mówić o rozwijaniu głębokiej teorii matematycznej, jest to raczej stosowanie znanych metod do nowych równań. Analitycznie trudno też uznać metody analityczne za bardzo współczesne, czy znajdujące się w głównym nurcie teorii równań różniczkowych cząstkowych, raczej jak pisze sam autor w autoreferacie jest to "kontynuacja dziedzictwa pozostawionego przez Panagiotopoulosa".

Moim zadaniem, o ile prace są napisane porządnie, w sposób zwarty charakterystyczny dla specjalistycznego czasopisma, to w autoreferacie zagadnienia powinny być przedstawione z szerszej perspektywy. W szczególności brak jest szerszej perspektywy mechaniki i termodynamiki ośrodków ciągłych. Szczególnie polecałbym autorowi zapoznanie się z początkowymi rozdziałami książki Constantina Dafermosa "Hyperbolic Conservation Laws". W tym kontekście polecałbym zaznajomienie się z prezentowanymi tam równaniami nieliniowej termo-sprężystości z półwypukłym potencjałem sprężystości. Rozumiem, że stosowane metody matematyczne nierówności hemiwariacyjnych mają istotne ograniczenia stosowalności i nie mogłyby być z powodzeniem stosowane do nieliniowej teorii sprężystości, ale moim zdaniem bardziej elegancko byłoby wyjść od równań w postaci ogólnej, a następnie sprecyzować ograniczenia ogólności narzucane przez wybraną metodologię matematyczną. W tym kontekście uważam, że istotną byłaby też analiza istotności dla podejścia nierówności hemiwariacyjnych członu $\mathcal{A}(t, \varepsilon(u'(t)))$, czemu w liniowej wersji odpowiada wyraz z tensorem a_{ijkl} pojawiający się na dole piątej strony doktoratu. Człon ten odpowiada za lepkościową dysypację energii mechanicznej (energia kinetyczna i energia swobodna Hemholtza), matematycznie zaś powoduje, że nawet sama część mechaniczna układu staje się dysypatywna (paraboliczna), zamiast zachowawcza (hiperboliczna). Osobiście uważam, że przyjęcie że tensor a_{ijkl} jest równy zero wykluczyłoby stosowanie metod nierówności hemiwariacyjnych, w sytuacji kiedy innymi metodami (liniowa teoria pólgrup) R. Racke ze współpracownikami (Jiang, Racke, *Evolution equations in thermoelasticity*, 2000) przynajmniej w wypadku pro-

stych warunków brzegowych udowodnili istnienie rozwiązań. Z dużym zdziwieniem w spisie literatury autoreferatu nie znalazłem monografii R. Racke dotyczącej tej tematyki. Uważam również, że tak jak pojęcia monotoniczności, czy pseudomonotoniczności są w pełni standardowe, tak już pojęcie L -monotoniczności powinno zostać w autoreferacie zdefiniowane.

Zaskakujący jest tu też brak jakichkolwiek cytowań do prac dotyczących sprężystości lub sprężystości z uwzględnieniem efektów termicznych, rozwijanych np. przez grupę wokół K. Chełmińskiego na MiNi PW. Jest to o tyle dziwne, że metody matematyczne są inne, ale równania podobne i zapoznanie się z nimi przez doktoranta dałoby mu szerszy punkt widzenia o słabości i sile metod hemiwariacyjnych. W szczególności mogłoby to być istotne z uwagi na pytania dotyczące regularności rozwiązań, który to temat poruszę w dalszej części mojej recenzji. Istotnym mogłyby się tutaj okazać studia w zakresie teorii regularności dla zbliżonego układu sprężysto-plastyczności (z pominięciem sił inercyjnych), których rezultatem był doktorat pana Przemysława Kamińskiego na MiNi PW, którego również miałem przyjemność być recenzentem.

Program, którego oczekiwałem od autora to wyjście od *praw zachowania* wyznaczonych przez obiektywne prawa fizyki (prawo zachowania masy, prawo zachowania pędu, prawo zachowania energii całkowitej układu), a następnie jasna dyskusja *konstryktywnych relacji*, którymi są uzupełnione te prawa w celu zamknięcia układu równań oraz fizycznego znaczenia konkretnych rozpatrywanych warunków brzegowych. Należy tu podkreślić, że równania na energię całkowitą układu w ogóle nie udało mi się w pracy doktorskiej znaleźć, z punktu konsystentności opisu zjawiska fizycznego wypisanie takiego równania dałoby autorowi szansę na zastanowienie się, co dzieje się z energią mechaniczną traconą na efekty lepkościowe, powinna ona potencjalnie przekładać się na wzrost energii wewnętrznej (będącej funkcją temperatury).

Nie do końca uprawniona moim zadaniem jest też prezentacja subrózniczki Clarka jako uogólnienia subrózniczki funkcji wypukłej. Pragnąłbym zauważyć w tym kontekście, że funkcja indykatorowa zbioru wypukłego nie jest lokalnie lipschitzowska.

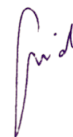
Przechodząc do oceny pracy IV dotyczącej numerycznych eksperymentów oraz analitycznych dowodów zbieżności schematów numerycznych brak mi szczególnie w autoreferacie wyjaśnienia precyzyjnie jednego zagadnienia. Zbieżność schematów numerycznych (oraz jej rząd), czyli Corollary 13 z pracy IV, albo dowodzi się przy założeniu, że rozwiązanie dokładne układu jest w klasie regularności uzyskiwanej z twierdzeń o istnieniu, albo nie. W tym drugim przypadku analityk powinien przeprowadzić dyskusję, czy metody regularnościowe pozwalają na udowodnienie potrzebnej regularności (Theorem 12 z pracy IV), czy nie. Niestety w tym konkretnym przypadku brak jest jakichkolwiek rozważań w tym kierunku. W mojej osobistej ocenie regularności potrzebne w zbieżnościach schematów nie są osiągalne za pomocą metod hemiwariacyjnych, być może zresztą nie da się ich w ogóle udowodnić przy założonej ogólności warunków brzegowych. Stąd pytanie, czy rozważania o zbieżności alorytmów są rozważaniami czysto apriori (tj. czy istnienie tych regularnych rozwiązań można udowodnić).

Jeżeli chodzi o pracę V, to autoreferat powinien być napisany znacznie pre-

czyjniej i ostrożniej. Zdanie na stronie 13 autoreferatu "The Navier-Stokes system still remains unsolved in the three-dimensional case, hence we restrict our consideration to a two-dimensional problem" jest dość niezrozumiałe. Teoria istnienia słabych rozwiązań dla 3-wymiarowego przypadku jest znana od pionierskiej pracy Lereya (1934), to zaś co nie jest znane to regularność globalnych w czasie rozwiązań oraz jednoznaczność. Powstaje pytanie, jakie dokładnie własności równania Naviera-Stokesa byłyby autorowi potrzebne, czy istnienie, czy regularność i jednoznaczność, co nie wynika na pewno z autoreferatu, jak i w pracy nie jest to dokładnie opisane.

Konkluzja: Moim zdaniem doktorat spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim w dziedzinie nauk matematycznych. Nie mam najmniejszych wątpliwości, żeby wnioskować o dopuszczenie magistra Pawła Szafranca do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Słowa krytyczne w mojej recenzji należy raczej rozumieć jako wskazówki, które mogą być pomocne w dalszej karierze matematycznej. Zdecydowanie Pan Szafraniec wydaje się być młodą ambitną osobą, która nie zamierza poprzestać na doktoracie. Zaznaczę, że niestety mogę tutaj oceniając samą rozprawę doktorską, a wolałbym oceniać cały dorobek. Wówczas, z uwagi na szerszą tematykę i bogatszy zasób metod matematycznych późniejszych, już bardziej dojrzałych prac, byłbym w stanie podkreślić dodatkowe elementy uzyskanych rezultatów.

Z wyrazami szacunku



Piotr Gwiazda