Politechnika Łódzka
Instytut Matematyki

Łódź, 27.07.2017

Prof. dr hab. Bogdan Przeradzki
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Pawła Szafrańca

Opiniowaną rozprawę tworzy zbiór 5 opublikowanych artykułów (w tym są 2 współautorskie) poprzedzony autoreferatem prezentującym streszczenie wyników i ich relację w stosunku do innych badań na ten temat. Prace dotyczą modelowania matematycznego w mechanice ciała stałego i płynów z uwzględnieniem tarcia, lepkości i przepływu ciepła noszą więc charakter interdyscyplinarny. To w przypadku takich doktoratów ważne wydaje się wydzielenie subdyscypliny matematyka stosowana, bowiem znaczną część pracy zajmuje opisanie modeli z objaśnieniem interpretacji fizycznej wprowadzonych funkcji i stałych traktowane przez "czystych" matematyków jako nieistotne, a same twierdzenia pozbawione są matematycznej elegancji, choćby ze względu na ilość założeń; mają za to zastosowania praktyczne pozwalając przewidywać zachowanie się realnych obiektów. Oczywiście do tej predykcji wystarczy użyć metod przybliżonych z zastosowaniem komputera, ale takie czysto matematyczne wyniki, jak istnienie i jednoznaczność rozwiązania stanowią istotną przesłankę do zaakceptowania modelu.

Praca (I) dotyczy bardzo ogólnego modelu z teorii termolepkosprężystości, w którym tensor naprężeń σ jest sumą dwóch operatorów nieliniowych lepkości $\mathcal{A}$ i sprężystości $\mathcal{B}$ oraz operatora relaksacji typu Volterry zależnego od tensora odkształceń ε i operatora odkształceń cieplnych $\mathcal{C}_e$. Model składa się z równania na pole przemieszczeń u :

$$u''(t) - \mathrm{Div}\sigma(t) = f_0(t)$$

i nieliniowego równania ciepła na temperaturę θ :

$$\theta'(t) - \mathrm{div}K(x, t, \nabla\theta(t)) = R(t, u'(t)) + g(t)$$

zaopatrzonego w warunki początkowe na u, u' i θ oraz warunki brzegowe przy czym brzeg podzielony jest na 3 części: Γ_D – na niej nie ma przemieszczeń, Γ_N

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl

– na niej działa siła pochodząca z kontaktu ciała z otoczeniem oraz Γ_C – tutaj mamy transfer ciepła z otoczeniem. Nie umiem odpowiedzieć na pytanie na ile realistyczne jest założenie rozłączności tych trzech zbiorów. Na Γ_N mamy więc zadaną składową normalną tensora naprężeń, a warunki na Γ_C to:

$$-\sigma_\nu \in \partial j_\nu(x,t,u'_\nu(t)), \qquad -\sigma_\tau \in \partial j_\tau(x,t,u'_\tau(t)),$$

gdzie indeksy ν i τ oznaczają odpowiednio składową normalną i styczną, j_ν, j_τ są zadanymi funkcjami, a ∂ oznacza uogólniony gradient Clarke'a. Wreszcie warunki brzegowe na temperaturę to jej znikanie na $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ i nieliniowy warunek

$$K(x,t,\nabla\theta(t)) \cdot \nu \in j(x,t,\theta(t)) - h_\tau(x,t,\|u'_\tau(x,t)\|),$$

gdzie znowu funkcje K, j, h_τ są zadane. Głównym wynikiem pracy (I) jest twierdzenie o isnieniu i jednoznaczności tak postawionego zagadnienia brzegowo-początkowego przy dość naturalnych (a jeszcze bardziej licznych) założeniach na dane funkcje i operatory, z których warto wymienić monotoniczność i koercytywność operatora $\mathcal{A}$, bo sugeruje to przyjętą technikę dowodową, a zarazem wyjaśnia, w jakim sensie rozwiązania mamy na myśli. Mianowicie problem zastąpiony jest przez układ dwóch nierówności hemiwariacyjnych na u i θ, a więc w tym słabym sensie mamy jedyne rozwiązanie. Dalszy dowód jest dość standardowy, choć technicznie złożony i opiera się na rozseparowaniu pary nierówności, wykorzystaniu teorii operatorów pseudomonotonicznych i zastosowaniu twierdzenia A. Kulig i S. Migórskiego o punkcie stałym będącego wnioskiem z zasady kontrakcji.

Praca (II) ma bardzo podobną strukturę, jak dość szczegółowo omówiona praca (I). Pojawia się w niej dodatkowo skalarna funkcja zniszczenia materiału ζ ($\zeta = 1$ w punktach (x,t), gdzie materiał w ogóle nie jest zniszczony i $\zeta = 0$ tam, gdzie zniszczenie jest całkowite) opisana równaniem parabolicznym

$$\zeta'(t) - \kappa\Delta_x\zeta = \varphi(\varepsilon(u(t)), \zeta(t))$$

z zerowym warunkiem brzgowym Neumanna. Analogicznie w pracy (III) uwzględniono efekt piezoelektryczny i uzyskano podobny wynik o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania. W przypadku obu prac (II) i (III) zastosowano tę samą metodę, co w pierwszej.

Praca (IV) ma inny charakter, choć dotyczy modelu zagadnienia brzegowego z (I) z pewnymi uproszczeniami: liniowością operatorów sprężystości i odkształceń cieplnych i znikaniem operatora Volterry odpowiedzialnego za pamięć w modelu oraz zastąpieniem inkluzji w warunkach brzegowych równościami (w szczególności oznacza to zastąpienie gradientu Clarke'a zwykłym gradientem jednowartościowym). Jest to praca współautorska powstała przy

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl

współudziale K. Bartosza i D. Danana. Autorzy rozważają rozwiązania (u^h, θ^h) zagadnień przybliżonych, w których parametr $h > 0$ odpowiada za dyskretyzację zmiennej przestrzennej x, przy czym pochodne względem czasu pozostają bez zmian oraz rozwiązania (u^{hk}, θ^{hk}) zagadnień, w których dyskretyzowana jest także zmienna czasowa, przy czym $k > 0$ oznacza krok dyskretyzacji czasowej. Oba przybliżenia nazywają odpowiednio półdyskretnym i całkowicie dyskretnym. W omawianej pracy pokazano, że błąd obu przybliżeń nie przekracza liniowej funkcji h i k. Zaprezentowano także przykład numeryczny dla dwuwymiarowego ciała – prostokąta z konkretnymi (prostymi, ale nietrywialnymi) parametrami modelu, dla którego można było wskazać błąd rzeczywisty dla kilku wybranych wartości $h+k$. Z wykresu widać, że otrzymane błędy leżą rzeczywiście na prostej, co sugeruje, że oszacowanie błędu jest optymalne.

W ostatniej pracy cyklu (V) Doktorant dowodzi istnienia rozwiązania zagadnienia brzegowo-początkowego dla pary równań Naviera-Stokesa z siłą zależną od temperatury:

$$u'(t) - \alpha\Delta_x u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = F(\theta)$$

i nieliniwego równania ciepła:

$$\theta'(t) - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) + u \cdot \nabla\theta = h$$

z nieodłącznym dla równania N-S warunkiem znikania dywergencji u, warunkami początkowymi na u i θ oraz warunkami brzegowymi. Brzeg jest podzielony na dwie części: na pierwszej obie niewiadome funkcje mają znikać, a na drugiej

$$u_\nu = 0, \qquad -\sigma_\tau \in \partial j(u_\tau), \qquad -k(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\nu} \in \partial j_1(\theta),$$

gdzie znowu ν i τ oznaczają odpowiednio składową normalną i styczną, σ jest tensorem naprężeń cieczy (zadana funkcja u) i ∂ oznacza gradient Clarke'a. Badany układ jest zamieniony na układ dwóch nierówności hemiwariacyjnych, dla którego pokazano istnienie rozwiązania. Tym razem Doktorant użył innej metody: zastosował regularyzowaną aproksymację Galerkina i pokazał zbieżność ciągu tych przybliżeń do rozwiązania wyjściowego zagadnienia.

Wszystkie prace cyklu są napisane starannie. Nie zauważyłem prawie uchybień poza może usterką w pracy (V) polegającą na tym, że w warunku brzegowym (9) pojawia się symbol σ, który objaśniony jest dopiero 10 wierszy dalej – dla czytelnika wszystkich prac razem jest jasne, że chodzi o tensor naprężeń pojawiający się w poprzednich artykułach. Autor recenzowanej rozprawy wykazał się doskonałym opanowaniem metod matematycznych mechaniki kontaktowej: operatory pseudomonotoniczne, nierówności hemiwariacyjne, metoda

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl

Galerkina. W zagadnieniach fizycznych dobierał odpowiednie przestrzenie funkcyjne i wykorzystywał ich własności. Potrafił przekształcić zagadnienie brzegowo-początkowe pochodzące z problemu fizycznego na układ nierówności hemiwariacyjnych, a następnie je rozwiązać i zbadać charakter błędu naturalnych metod numerycznych. Doktorant jest autorem jeszcze 3 prac (poza pięcioma wchodzącymi w skład rozprawy), które nie zostały jeszcze opublikowane, co dobrze wróży Jego przyszłej aktywności naukowej. Podsumowując oceniam, że rozprawa spełnia wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie mgra Pawła Szafrańca do publicznej obrony. Jednocześnie wnoszę o uznanie rozprawy doktorskiej za wyróżniającą.

Instytut Matematyki
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 215
tel. 42 631 36 17, tel. / fax 42 631 38 65, e-mail: biuro_im@info.p.lodz.pl