dr hab. Michał Jasiczak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 2 stycznia 2017

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Grzegorza Sroki

Pan mgr Grzegorz Sroka przedstawił rozprawę doktorską zatytułowaną "Nierówności typu A. A. Markowa i W. A. Markowa w normach L^p". Praca ta powstała pod kierunkiem Pani dr hab. Leokadii Białas-Cież. Składa się ona z wstępu oraz pięciu rozdziałów. Pracę kończy lista problemów "do dalszych badań". Cześć z przedstawionych wyników została opublikowana w pracy *Constants in V. A. Markov's inequality in L^p norms*, która ukazała się w J. Approx. Theory, jej autorem jest Pan mgr Sroka. Pan mgr Sroka jest także współautorem wraz z Panią dr hab. L. Białas-Cież artykułu *Polynomial inequalities in L^p norms with generalized Jacobi weights* przedstawionej do druku. Rozprawa doktorska zawiera także wyniki dotychczas nieopublikowane.

W swojej pracy Pan mgr Sroka zajmuje się przeniesieniem klasycznych nierówności wielomianowych, takich jak nierówność A. A. Markowa i W. A. Markowa, nierówności typu Schura czy Nikolskiego na przypadek norm L^p, także wagowych norm tego typu. Doktorant bada także tego typu nierówności na pewnych zbiorach z ostrzami.

Bodajże najbardziej znaną nierównością wielomianową jest nierówność udowodniona już w 1889 roku przez A. A. Markowa. Zgodnie z nią dla dowolnego wielomianu $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ mamy

$$\|P'\|_{[-1,1]} \leqslant n^2 \|P\|_{[-1,1]}. \tag{1}$$

Normy w powyższej nierówności to oczywiście normy supremalne. Od tego czasu zagadnienia te interesowały wielu matematyków. Warto wymienić W. A. Markowa, S. N. Bernsteina [3], P. Borweina, T. Edrélyi'ego [6] czy nawet P. Erdösa [8], którzy podali ważne uogólnienia klasycznego wyniku (1). Badano oczywiście także przypadek wielowymiarowy. Tutaj ważny wynik uzyskał C. Coatmelec [7], który wykazał, że nierówność typu Markowa zachodzi dla dowolnego zbioru zwartego i wypukłego w $\mathbb{R}^N$. Bodajże najlepsze oszacowanie stałej dla ciała wypukłego w tego typu nierówności podali A. Kroó i S.

Révész [10]. Wynik ten pochodzi z 1999 roku. Ważne uogólnienia nierówności typu Markowa na zbiory z ostrzami uzyskali W. Pawłucki i W. Pleśniak [11]. Klasyczna nierówność typu Markowa została uogólniona na przypadek L^p norm przez E. Hille, G. Szegö i I. D. Tamarkina [9]. Warto podkreślić, że tematyką nierówności wielomianowych zajmowali się matematycy polscy dowodząc wielu ważnych twierdzeń. Wymienić tutaj należy, poza cytowanymi już profesorami W. Pawłuckim i W. Pleśniakiem, M. Barana [1], [2] i R. Pierzchałę [12], czy promotora rozprawy doktorskiej, Panią L. Białas-Cież [4]. **Podsumowując tematyka, którą zajmuje się doktorant w przedstawionej rozprawie jest klasyczna, niewątpliwie ważna i cały czas aktualna. Co jednak najważniejsze, uzyskał On ciekawe wyniki, które wydają się być ważnym uzupełnieniem znanej teorii.** Omówię krótko te rezultaty.

Rozdział drugi rozprawy dotyczy nierówności W. A. Markowa w normie przestrzeni L^p na odcinku $[-1,1]$. Głównym wynikiem jest twierdzenie zgodnie, z którym dla dowolnego wielomianu $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

$$\|P^{(k)}\|_{L^p([-1,1])} \leqslant C(k,n,p)\|T_n^{(k)}\|_{[-1,1]}\|P\|_{L^p([-1,1])}.$$

Autor podaje także oszacowanie stałej $C(k,n,p)$. Symbol T_n oznacza wielomian Czebyszewa pierwszego rodzaju stopnia n. Głównym narzędziem jest punktowa nierówność Bernsteina.

Rozdział trzeci poświęcony jest nierównościom W. A. Markowa w normach L^p z wagami typu Jacobiego. Autor uzyskuje oszacowania typu

$$\|P^{(k)}\|_{L^p([-1,1]),\beta} \leqslant M_{n,k}(s,\alpha,p,\beta)\|P\|_{L^s([-1,1]),\alpha}.$$

Warto podkreślić, że co prawda było wiadomo, że takie oszacowania są prawdziwe, nie były jednak znane oszacowania stałych, które Autor podaje. **Sposób uzyskania tego typu nierówności oceniam jako bardzo ładny. Szczególnie podobał mi się dowód Propozycji 1 i 2.** Autor konsekwentnie stosuje metodę dowodu uzyskując coraz ciekawsze twierdzenia.

W rozdziale czwartym udowodniona jest punktowa nierówność Bernsteina dla k-tych pochodnych. Nierówność ta jest wykorzystana do pokazania nierówności W. A. Markowa w normach L^p z wagami Jacobiego. Dokładniej Autor dowodzi i wykorzystuje następującą nierówność

$$|P^{(k)}(x_0)| < \left(\frac{2n}{\sqrt{1-x_0^2}}\right)^k \|P\|_{[-1,1]}$$

prawdziwą dla wielomianów $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Rozdział piąty poświęcony jest badaniu nierówności typu

$$\| |\operatorname{grad} Q| \|_{L^p(E)} \leqslant C n^m \|Q\|_{L^p(E)}, \tag{2}$$

gdzie Q jest wielomianem stopnia n oraz

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^{2/l} + y^{2/l} \leqslant 1\}.$$

Autor znajduje oszacowanie górne i dolne na wykładnik m w nierówności (2). **Tematykę tego rozdziału oceniam jako bardzo interesującą. Z całą pewnością zrozumienie przypadku ogólnego zbiorów z ostrzami musi opierać się na analizie konkrentych przypadków, takich jak właśnie analizowany przez Autora zbiór E.** Ciekawe jest także oszacowanie stałej w nierówności Markowa dla sympleksu. Poprawia ono znane oszacowanie uzyskane przez L. Białas-Cież oraz P. Goetghelucka [5]. Metoda dowodu wykorzystuje teorię pluripotencjału.

Praca zredagowana jest w sposób staranny. Pan mgr Sroka nie ustrzegł się jednak pewnych błędów. Wydaje mi się, że najważniejszym jest błędne oszacowanie w dowodzie Wniosku 3 na stronie 18 rozprawy. Wniosek ten pozostaje nieudowodniony, co ma swoje konsekwencje w dalszej części pracy.

Mocną stroną pracy jest zaprezentowana przez Autora duża biegłość w badanej tematyce. Z recenzowanej rozprawy można się sporo nauczyć. Autor zawsze w interesujący sposób opisuje tło badanych problemów, przedstawia znane wyniki. **Można powiedzieć, że twierdzenia udowodnione przez Pana mgra Srokę "ładnie pasują" do znanej teorii, stanowią jej interesujące uzupełnienie i ilustrację.**

Podsumowując stwierdzam, że przedstawiona przez Pana mgra Srokę rozprawa spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim. Stanowi oryginalny i twórczy wkład w teorię nierówności wielomianowych. Uzyskane przez doktoranta wyniki są interesujące. Wnioskuję w związku z tym o dopuszczenie mgra Sroki do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora nauk matematycznych.

Literatura

[1] M. Baran, *Bernstein type theorems for compact sets in $\mathbb{R}^N$ revisited*, J. Approx. Theory **79** (1994), 190–198.

[2] M. Baran, *Markov inequality on sets with polynomial parametrization*, Ann. Polon. Math. **60** (1994), 69–79.

[3] S. N. Bernstein, *Collected Works: Vol. I. Theory of Functions (1905-1930)*, Atomic Energy Commission, Springfield, VA 1958.

[4] L. Białas-Cież, *Equivalence of Markov's and Schur's inequalities on compact subsets of the complex plane*, J. Inequal. Appl. **3** (1999), 45–49.

[5] L. Białas-Cież, P. Goetgheluck, *Constants in Markov's inequality on convex sets*, East Journal on Approximations **1(3)** (1995), 379–389.

[6] P. Borwein, T. Erdélyi, *Markov and Bernstein type inequalities in L^p for classes of polynomials with constaints*, J. London Math. Soc. **51 (2)** (1995), 573–588.

[7] C. Coatmelec, *Approximation et interpolation des fonctions différentiables des plusieurs variables*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **83 (3)** (1966), 271–341.

[8] P. Erdös, *On extremal properties of the derivatives of polynomials*, Ann. Math. **41 (2)** (1940), 310-313.

[9] E. Hille, G. Szegö, I. D. Tamarkin, *On some generalization of a theorem of A. Markoff*, Duke Math. J. **3** (1937), 729–739.

[10] A. Kroó, S. Révész, On Bernstein and Markov-type inequalities for multivariate polynomials on convex bodies, J. Approc. Theory **99** (1999), 134–152.

[11] W. Pawłucki, W. Pleśniak, *Markov's inequality and C^∞ functions on sets with polynomial cusps*, Math. Ann. **275** (1986), 467–480.

[12] R. Pierzchała, *Remez-type inequality on sets with cusps*, Adv. Math. **281** (2015), 508–552.