Streszczenie rozprawy doktorskiej Dongwei Gu

pt. Some Fully Nonlinear Equations in Kähler and Riemannian Geometry

Celem rozprawy będzie analiza pewnych nieliniowych równań eliptycznych na rozmaitościach kählerowskich oraz riemannowskich. Na zwartej rozmanitości riemannowskiej (M, g), analogicznie do przypadku rozmaitości kählerowskich, Donaldson rozważał przestrzeń $\mathcal{M}$ form objętości o stałej objętości całkowitej V. Wszystkie one są postaci $dV' = (\Delta\varphi+1)dV$, gdzie φ należy do przestrzeni

$$\mathcal{H} = \{\varphi \in C^\infty(M) \colon \Delta\varphi + 1 > 0\}.$$

Mamy więc $\mathcal{M} = \mathcal{H}/\sim$, gdzie $\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = const.$ Na $\mathcal{H}$ można w naturalny sposób wprowadzić (nieskończenie wymiarową) strukturę riemannowską. W pracy [1] wprowadzono odpowiednik funkcjonału Aubina-Yau na $\mathcal{H}$:

$$I(\varphi) = \frac{1}{V}\int_M (\varphi + \frac{1}{2}\varphi\Delta\varphi)dV.$$

Pokazano tam, że jądro $\mathcal{H}_0 = I^{-1}(0)$ jest całkowicie geodezyjną podprzestrzenią $\mathcal{H}$ i że w ten sposób wprowadzona struktura riemannowska na $\mathcal{M}$ jest naturalna, tj. w szczególności przestrzeń styczna do $\mathcal{H}_0$ jest postaci

$$\{\psi \in C^\infty(M) \colon \int_M \psi\, dV = 0\}.$$

Jak pokazał Donaldson, geodezyjne w przestrzeni $\mathcal{H}$ są rozwiązaniami równania

$$(\Delta\varphi + 1)\varphi_{tt} - |\nabla\varphi_t|^2 = 0.$$

Chen-He udowodnili, że te geodezyjne mają ograniczony Laplacian, czyli w szczególności są klasy $C^{1,\alpha}$ dla każdego $\alpha < 1$. Darvas-Lempert pokazali, że takie geodezyjne nie muszą być klasy C^2, pozostaje więc pytanie, czy są one zawsze klasy $C^{,1,1}$. W [3] udowodniono, że tak jest w przypadku, gdy krzywizna sekcyjna rozważanej rozmaitości jest nieujemna.

W pracy [2] problem Dirichleta dla równania hessianowego na rozmaitościach hermitowskich z brzegiem. Udowodniono w szczególności istnienie gładkich rozwiązań na odpowiednio małych kulach oraz ciągłych rozwiązań w przypadku, gdy istnieje podrozwiązanie.

References

[1] D. Gu, *Counterpart of the Aubin-Yau functional for real Riemannian manifolds*, Univ. Iag. Acta Math. 52 (2015), 15–21

[2] D. Gu, N.-C. Nguyen, *The Dirichlet for the complex Hessian equation on Hermitian manifolds with boundary*, preprint

[3] Z. Błocki, D. Gu, *On the full $C^{1,1}$-regularity in the space of volume forms of a compact Riemannian manifold*, preprint