Prof. dr hab. Paweł Strzelecki
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa, Polska
e-mail: pawelst@mimuw.edu.pl

Warszawa, 28.10.2016

Recenzja rozprawy doktorskiej
Pana Dongwei Gu

Rozprawa doktorska *Some fully non-linear elliptic equations in differential geometry* Pana Dongwei Gu, napisana pod opieką prof. Zbigniewa Błockiego, jest poświęcona badaniu rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, wiążących się z problemami, ciekawymi z punktu widzenia geometrii różniczkowej. Tekst składa się z dwóch zasadniczo niezależnych części; każda z nich jest wystarczająco obszerna i bogata, żeby stanowić akceptowalny tekst doktoratu.

Pierwsza część rozprawy (rozdział 2) dotyczy zagadnienia geodezyjnych w przestrzeni unormowanych form objętości na ustalonej spójnej, zamkniętej rozmaitości Riemannowskiej (M, g). Badania tej przestrzeni prowadził m.in. Donaldson w pracy, napisanej w 2007 roku[1] i motywowanej po pierwsze badaniami struktury przestrzeni tzw. potencjałów kählerowskich (nawiązującymi do wcześniejszych prac Mabuchiego, Semmesa i samego Donaldsona), po drugie zaś – zagadnieniami regularności dla pewnych zagadnień ze swobodną granicą o dość wyraźnej motywowacji fizycznej.[2] Przestrzeń unormowanych form objetości można zdefiniować jako

$$\mathcal{V}_0 = \left\{(1+\Delta\phi)\, dg : \ \phi \in C^\infty(M,\mathbb{R}),\ 1+\Delta\phi > 0 \text{ na } M\right\},$$

gdzie Δ oznacza operator Laplace'a dla metryki g, zaś dg jest kanoniczną formą objetości wyznaczoną przez tę metrykę. Każdy element $\mathcal{V}_0$ jest wyznaczony przez odpowiednią funkcję ϕ (z dokładnością do stałej), tzn. $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}/\mathbb{R}$, gdzie $\mathcal{V}$ oznacza przestrzeń tych rzeczywistych funkcji gładkich ϕ na M, które spełniają warunek $1 + \Delta\phi > 0$. Donaldson definiuje na przestrzeni stycznej do $\mathcal{V}$ metrykę typu Weila–Petersona; funkcja gładka $\Phi\colon [0, 1] \times M \to \mathbb{R}$ wyznaczająca drogę $\Phi(t, \cdot)$ w przestrzeni $\mathcal{V}$, określa geodezyjną we wspomnianej metryce, gdy spełnia *równanie geodezyjnych*

$$\ddot{\Phi}\big(1+\Delta\Phi\big) - |\nabla\dot{\Phi}| = 0\,. \tag{1}$$

[1] *Nahm's equations and free-boundary problems*, https://arxiv.org/abs/0709.0184. Praca omawia związki zagadnień ze swobodnym brzegiem z teorią grup Liego.

[2] Ibidem, patrz str. 2–3.

Główny wynik pierwszej części rozprawy, uzyskany w pracy wspólnej z promotorem orzeka, że jeśli rozmaitość (M, g) ma nieujemną krzywiznę sekcyjną, to dowolne dwa punkty w przestrzeni unormowanych form objętości łączy dokładnie jedna geodezyjna klasy $C^{1,1}$. Dowód tego wyniku jest inspirowany wiedzą o sytuacji kählerowskiej (w tym wcześniejszymi wynikami promotora) oraz pracą Chena i He. W tej ostatniej rozwiązania równania (1) aproksymuje się rozwiązaniami takiego samego równania z prawą stroną równą ε i dowodzi jednostajnych, niezależnych od parametru ε, oszacowań dla takich rozwiązań. Główny nowy składnik dowodu zaprezentowanego w tej części rozprawy to wykazanie (patrz podrozdział 2.6), że z oszacowań na $\Phi, \nabla\Phi, \Delta\Phi, \ddot{\Phi}$ oraz $\nabla\dot{\Phi}$ można wywieść kolejne (niezależne od ε) oszacowanie – dla kompletu drugich pochodnych funkcji Φ. Stosowane są w tym celu techniczne rozważania, wzorowane na dowodach klasycznej zasady maksimum dla równań eliptycznych.

Prezentacja materiału w rozdziale 2, mimo pewnej technicznej suchości, jest przejrzysta (także dzięki powtórzeniu wyników cząstkowych lub o charakterze przygotowawczym, pochodzących od Donaldsona, Błockiego oraz Chena i He), pozwala dobrze zrozumieć, na czym polegają uzyskane wyniki i jakimi metodami się je uzyskuje. Widać, co autor zaczerpnął z prac innych, a co dołożył sam. Zapoznałem się z tym rozdziałem z przyjemnością.

Druga część rozprawy (rodział 3) dotyczy zespolonych równań typu Monge'a–Ampère'a. Autor rozważa zwartą rozmaitość hermitowską $(\bar{M}, \alpha)$ z gładkim brzegiem ∂M. Dla liczby $1 \leq m \leq n = \dim_{\mathbb{C}} M$, ustalonej formy χ typu (1,1) na $\bar{M}$, zadanej dodatniej funkcji $f\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ i danych brzegowych $\varphi\colon \partial M \to \mathbb{R}$, poszukiwana jest funkcja $u\colon \bar{M} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$(\chi + dd^c u)^m \wedge \alpha^{n-m} = f\alpha^n, \qquad u = \varphi \quad \text{na } \partial M, \tag{2}$$

a przy tym

$$(\chi + dd^c u)^k \wedge \alpha^{n-k} > 0, \qquad k = 1, \ldots, m\,.$$

Autor dowodzi najpierw, dla gładkich f, φ, twierdzenia o istnieniu rozwiązań zagadnienia Dirichleta (2) na odpowiednio małych kulach w $\mathbb{C}^n$, a następnie wywodzi stąd wniosek, mówiący, że tzw. uogólnione funkcje m-subharmoniczne można lokalnie aproksymować malejącymi ciągami gładkich funkcji m-subharmonicznych. Oba narzędzia umożliwiają później dowodzenie istnienia ciągłych rozwiązań zagadnienia (2) w ogólnym przypadku, gdy f, φ są ciągłe – metodą Perrona. Dodatek do rozdziału 3 zawiera dość przejrzysty, zamknięty wykład narzędzi z zakresu teorii potencjału i pluripotencjału, przydatnych w dowodach w tej części rozprawy.

Cała praca napisana jest zwięźle i dość przejrzyście,[3] a także zaopatrzona w bogatą, dobrze świadczącą o znajomości literatury przedmiotu, bibliografię (88 pozycji, wśród nich prace nowe i bardzo nowe; pośród autorów cytowanych pozycji jest zarówno wielu przedstawicieli współczesnej krakowskiej szkoły analizy zespolonej i równań różniczkowych cząstkowych, jak i matematycy tej klasy, co np. Cafarelli, Donaldson, Kohn, Semmes, Spruck, Yau). Autor w moim odczuciu dobrze radzi sobie z technicznie trudnym materiałem, wymagającym wysokiej biegłości w analizie i teorii równań cząstkowych – wszak nawet znane od kilkudziesięciu lat klasyczne wzorce podobnych rozumowań, dla liniowych równań eliptycznych, należą do matematyki wymagającej znacznej pomysłowości i uporu.

Rozprawa nie zawiera moim zdaniem takich wyników, które należałoby uznać za *nadzwyczaj* pomysłowe, *bardzo zaskakujące*, czy osiągnięte nieoczekiwaną drogą. W związku z tym, na postawioną w piśmie Dziekana WMiI UJ prośbę o wyraźne zaznaczenie, czy uznaję rozprawę za wyróżniającą się, odpowiadam przecząco. Niemniej, jak wspominałem wyżek, tematyka bez wątpienia jest technicznie trudna, zaś autor w pełni mnie przekonał, że potrafi się w niej poruszać jak sprawny i solidny rzemieślnik. Dlatego nie mam wątpliwości, że przedstawiona rozprawa dowodzi kwalifikacji matematycznych autora i spełnia wszystkie ustawowe (por. art. 13 ust. 1 Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym), a także zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim.

Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie Pana Dongwei Gu do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

[3]Nie wyliczam tu drobnych usterek językowych ani redakcyjnych; mocno irytująca była np. oddzielna numeracja twierdzeń, lematów, wniosków etc., w której np. po Twierdzeniu 3.2.3 następuje Lemat 3.2.2, a potem dopiero Wniosek 3.2.1 – nawigowanie w takim tekście wymaga większej cierpliwości Czytelnika…