dr Zenon Jabłoński
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagiellonski
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
e-mail: Zenon.Jablonski@im.uj.edu.pl

Autoreferat - opis dorobku i osiągnięć naukowych

Ciągi dodatnio i ujemnie określone w teorii operatorów

Podstawę osiągnięć naukowych stanowi cykl publikacji:

[16] Z. J. Jabłoński, Hyperexpansive operator valued unilateral weighted shifts, *Glasgow Math. J.* **46** (2004), 405-416.
[18] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Backward Extensions of Hyperexpansive Operators, *Studia Mathematica* **173** (2006), 223-257.
[23] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Weighted shifts on directed trees, *Mem. Amer. Math. Soc.* **216**, no. 1017, (2012), viii+107 pp.
[24] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, A non-hyponormal operator generating Stieltjes moment sequences, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 3946-3980.

Plan Autoreferatu

1. Wstęp 2
2. Hyperexpansive operator valued unilateral weighted shifts 2
3. Backward Extensions of Hyperexpansive Operators 3
4. Weighted shifts on directed trees 6
5. A non-hyponormal operator generating Stieltjes moment sequences 12
Literatura 22

1. Wstęp

Ciągi i ogólniej funkcje dodatnio określone odgrywają bardzo ważną rolę w różnych działach matematyki, między innymi w rachunku prawdopodobieństwa, teorii operatorów, równaniach całkowych, teorii funkcji zespolonych oraz teorii momentów. Przypomnijmy, że funkcję $\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ określoną na półgrupie $\mathbb{Z}_+$ nazywamy *dodatnio określoną*, jeśli dla wszystkich $n \geqslant 0$ oraz $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ zachodzi $\sum_{i,j=0}^n c_i\overline{c_j}\varphi(i+j) \geqslant 0$. Funkcję $\psi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ nazywamy *ujemnie określoną*, jeśli dla wszystkich $n \geqslant 1$ oraz $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ takich, że $\sum_{i=0}^n c_i = 0$, zachodzi $\sum_{i,j=0}^n c_i\overline{c_j}\psi(i+j) \leqslant 0$. Określając operator różnicowy ∇ działający na funkcjach $\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ wzorem $(\nabla\varphi)(s) = \varphi(s) - \varphi(s+1)$ możemy zdefiniować funkcje *całkowicie monotoniczne* jako te funkcje $\varphi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ dla których $(\nabla^n\varphi)(s) \geqslant 0$ dla $s, n \geqslant 0$, oraz funkcje *całkowicie alternujące* jako te funkcje $\psi\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ dla których $(\nabla^n\varphi)(s) \leqslant 0$ dla $s \geqslant 0$ oraz $n \geqslant 1$. Okazuje się, że funkcje całkowicie monotoniczne są dodatnio określone oraz funkcje całkowicie alternujące są ujemnie określone.

Istnieją pewne klasy operatorów ograniczonych T w przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}$, które mogą być scharakteryzowane poprzez zachowanie się ciągów postaci $\{\|T^nf\|^2\}_{n=0}^\infty$, $f \in \mathcal{H}$. Rzeczywiście, stosując charakteryzację ograniczonych operatorów subnormalnych podaną przez Lamberta w [**30**] otrzymujemy, że taką klasą jest klasa operatorów subnormalnych; w tym przypadku wspomniane ciągi są ciągami momentów Stieltjesa z miarami reprezentującymi skoncentrowanymi na przedziale $[0, \|T\|^2]$. Korzystając dodatkowo z klasycznego twierdzenia Hamburgera widzimy, że operator T jest subnormalny wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi $\{\|T^nf\|^2\}_{n=0}^\infty$, $f \in \mathcal{H}$, są dodatnio określone. Co więcej, stosując charakteryzację ciągów całkowicie monotonicznych (zob. [**2**, Theorem 4.6.5]) wnioskujemy, że T jest subnormalną kontrakcją wtedy i tylko wtedy gdy wyżej wymienione ciągi są ciągami całkowicie monotonicznymi. Drugą z takich klas jest klasa operatorów całkowicie hiperekspansywnych, zdefiniowana przez Athavale w [**1**]; w tym przypadku ciągi postaci $\{\|T^nf\|^2\}_{n=0}^\infty$, $f \in \mathcal{H}$, są ciągami całkowicie alternującymi. Dodajmy, że ważną podklasą operatorów całkowicie hiperekspansywnych jest klasa 2-izometrii, to znaczy operatorów spełniających równość $\|T^2f\|^2 - 2\|Tf\|^2 + \|f\|^2 = 0$, $f \in \mathcal{H}$.

W dalszej części używać będziemy następujących oznaczeń. Ciała liczb rzeczywistych i zespolonych są oznaczane odpowiednio przez $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$. Symbole $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ oraz $\mathbb{N}$ oznaczają odpowiednio zbiory liczb całkowitych, nieujemnych całkowitych i naturalnych. Dla danej przestrzeni topologicznej X, $\mathfrak{B}(X)$ oznacza σ-algebrę wszystkich borelowskich podzbiorów zbioru X. Jeśli $\zeta \in X$, to δ_ζ oznacza probabilistyczną miarę borelowską na X skoncentrowaną na zbiorze $\{\zeta\}$, zaś χ_Y oraz $\operatorname{card}(Y)$ odpowiednio funkcję charakterystyczną i moc zbioru Y. $\mathcal{H}$ oraz $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ oznaczają odpowiednio (zespoloną) przestrzeń Hilberta oraz C^*-algebrę wszystkich ograniczonych operatorów na $\mathcal{H}$.

2. Hyperexpansive operator valued unilateral weighted shifts

Niech $\ell^2(\mathcal{H}) = \oplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}$ oznacza przestrzeń Hilberta będącą sumę ortogonalną $\aleph_0$ kopii przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z iloczynem skalarnym danym wzorem

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^\infty \langle f_n, g_n\rangle, \quad f = \oplus_{n=0}^\infty f_n \in \ell^2(\mathcal{H}),\ g = \oplus_{n=0}^\infty g_n \in \ell^2(\mathcal{H}),$$

oraz niech $\{T_i\}_{i=0}^\infty$ będzie ciągiem operatorów ograniczonych na $\mathcal{H}$. Operator T w $\ell^2(\mathcal{H})$ zdefiniowany wzorem

$$\mathscr{D}(T) = \{f \in \ell^2(\mathcal{H})\colon \sum_{n=0}^\infty \|T_if_i\|^2 < \infty\},$$
$$T(f_0, f_1, f_2, \ldots) = (0, T_0f_0, T_1f_1, T_2f_2, \ldots), \quad f \in \mathscr{D}(T),$$

nazywamy *operatorowym przesunięciem ważonym* na $\ell^2(\mathcal{H})$ z ciągiem wag $\{T_i\}_{i=0}^\infty$. Jeśli ciąg $\{\|T_n\|\}_{n=0}^\infty$ jest ograniczony (co jest równoważne temu, że operator $T \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$), oraz wszystkie wagi T_i, $i \geqslant 0$ są operatorami odwracalnymi, to powiemy, że T jest *odwracalnym przesunięciem ważonym* (zob. [**29**]). Zbiór wszystkich odwracalnych przesunięć ważonych na $\ell^2(\mathcal{H})$ oznaczamy przez $\ell^2_{IW}(\mathcal{H})$. W omawianej pracy zostało wprowadzone pojęcie *odwracalnych przesunięć ważonych z dodatnimi produktami* (których klasę oznaczmy przez $\ell^2_{IWP}(\mathcal{H})$), jako tych odwracalnych przesunięć ważonych, dla których produkty $T_n \cdots T_0$, $n \geqslant 0$ są operatorami dodatnimi.

Następujący fakt jest podstawowym narzędziem pozwalającym na scharakteryzowanie 2-izometrycznych oraz całkowicie hiperekspansywnych odwracalnych przesunięć ważonych.

Propozycja 1 ([**16**, Proposition 2.2]). *Niech $T \in l^2_{IW}(\mathcal{H})$ będzie operatorowym przesunięciem ważonym z ciągiem wag $\{T_n\}_{n=0}^\infty$. Wtedy T jest unitarnie równoważny z operatorowym przesunięciem ważonym $T' \in l^2_{IWP}(\mathcal{H})$.*

Następnie podana jest między innymi charakteryzacja 2-izometrycznych i całkowicie hiperekspansywnych operatorowych przesunięć ważonych oraz wykazane jest, że operatory wcześniej wspomniane mają niezmienniczą dziedzinę.

Rozdział trzeci pracy poświęcony jest badaniu 2-izometrycznych przesunięć ważonych. Po wykazaniu pomocniczego lematu rozstrzygnięty jest problem uzupełnień jednej wagi do ciągu będącego wagami 2-izometrycznego przesunięcia ważonego:

PROPOZYCJA 2 ([**16**, Proposition 3.2]). *Niech $T_0 \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem (odp. odwracalnym operatorem) takim, że $T_0^*T_0 \geqslant I_{\mathcal{H}}$. Wtedy istniej rodzina operatorów (odp. odwracalnych operatorów) $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ takich, że operatorowe przesunięcie ważone z ciągiem wag $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest 2-izometrią.*

Najważniejszym rezultatem tego rozdziału jest charakteryzacja 2-izometrycznych odwracalnych przesunięć ważonych z dodatnimi produktami:

TWIERDZENIE 3 ([**16**, Theorem 3.3]). *Jeśli $T_0 \geqslant I$, wtedy istnieje dokładnie jedna rodzina operatorów $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ taka, że $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ uzupełnia operator T_0 do ciągu wag 2-izometrycznego operatora $T \in l^2_{IWP}(\mathcal{H})$. Ponadto, rodzina $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ składa się z przemiennych i dodatnich operatorów.*

Dodajmy tu jeszcze, że warunek $T_0 \geqslant I$ w powyższych rezultatach jest również warunkiem koniecznym.

Rozdział czwarty jest odpowiednikiem rozdziału trzeciego dla klasy operatorów całkowicie hiperekspansywnych. Na wstępie tego rozdziału podana jest charakteryzacja całkowicie hiperekspansywnych operatorowych przesunięć ważonych z dodatnimi produktami a następnie podany jest opis podstawowych obiektów związanych z operatorami hiperekspansywnymi (wprowadzonymi w pracy [**14**]) dla operatorowych przesunięć ważonych z dodatnimi produktami. Głównym wynikiem tego rozdziału jest rozwiązanie problemu uzupełnień dla dwóch wag w klasie całkowicie hiperekspansywnych odwracalnych przesunięć ważonych z dodatnimi produktami:

TWIERDZENIE 4 ([**16**, Theorem 4.3]). *Niech T_0 oraz T_1 będą przemiennymi operatorami dodatnimi. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *istnieje ciąg wag $\{T_n\}_{n=2}^{\infty}$ taki, że operatorowe przesunięcie ważone $T \in \boldsymbol{B}(\ell^2(\mathcal{H}))$ z ciągiem wag $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest całkowicie hiperekspansywne oraz $T \in l^2_{IWP}(\mathcal{H})$,*
(2) *$T_1 \geqslant I$ oraz $(T_1T_0)^2 - 2T_0^2 + I \leqslant 0$.*

Rozdział piąty zawiera przykłady między innymi 2-izometrycznych operatorowych przesunięć ważonych (ograniczonego oraz nieograniczonego), które nie są unitarnie równoważne z sumą ortogonalną klasycznych przesunięć ważonych (zob. [**16**, Examples 5.1 oraz 5.4]) oraz dwóch różnych operatorowych przesunięć ważonych $T, T' \in \ell^2_{IWP}(\mathcal{H})$ z odpowiednio ciągami wag $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ oraz $\{T'_n\}_{n=0}^{\infty}$, dla których $T_0 = T'_0$ oraz $T_1 = T'_1$ (zob. [**16**, Examples 5.2]).

3. Backward Extensions of Hyperexpansive Operators

Operator W na przestrzeni Hilberta ℓ^2 dany wzorem $W(\xi_0, \xi_1, \ldots) = (0, \lambda_0\xi_0, \lambda_1\xi_1, \ldots)$ dla $(\xi_0, \xi_1, \ldots) \in \ell^2$, gdzie $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem *dodatnich* liczb rzeczywistych, jest nazywany (*jednostronnym*) *przesunięciem ważonym* z *ciągiem wag* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$. Przez $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ będziemy oznaczać przesunięcie ważone z ciągiem wag $\boldsymbol{\lambda}$.

W 1976 A. Lambert w pracy [**30**] podał charakteryzację subnormalności ograniczonych operatorów w języku klasycznych przesunięć ważonych, która mówi, że iniektywny operator T w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest subnormalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich niezerowych wektorów $h \in \mathcal{H}$, przesunięcie ważone $W_{T,h}$ z ciągiem wag $\{\|T^{n+1}h\| / \|T^n h\|\}_{n=0}^{\infty}$ jest subnormalne. Innymi słowy, klasa iniektywnych operatorów subnormalnych jest jedną z klas $\mathcal{C}$, iniektywnych operatorów w przestrzeniach Hilberta posiadających własność:

(P) operator T na $\mathcal{H}$ jest w klasie $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy
dla dla wszystkich niezerowych wektorów h w $\mathcal{H}$, przesunięcie ważone $W_{T,h}$ jest w kasie $\mathcal{C}$.

Okazuje się, że również klasa iniektywnych operatorów paranormalnych (tzn. spełniających warunek $\|Th\|^2 \leqslant \|h\|\|T^2h\|$ dla wszystkich $h \in \mathcal{H}$) ma własność (P). Dodajmy, że jak to jest wspomniane w omawianej pracy klasa iniektywnych operatorów hiponormalnych (tzn. spełniających warunek $\|T^*h\| \leqslant \|h\|\|Th\|$ dla wszystkich $h \in \mathcal{H}$) nie ma własności (P).

W pracy [**7**] R. Curto scharakteryzował subnormalne przesunięcia ważone które mają wsteczne rozszerzenia w klasie operatorów subnormalnych, gdzie przez *wsteczne subnormalne rozszerzenie* przesunięcia ważonego z wagami $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ rozumiemy subnormalne przesunięcie ważone z wagami $\{\lambda_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}$, gdzie λ_{-1} jest pewną rzeczywistą liczbą dodatnią. Dodajmy tu, że wsteczne rozszerzenia były studiowane w [**12, 27, 9**].

Następujący wynik charakteryzuje całkowicie hiperekspansywne przesunięcia ważone.

LEMAT 5 ([**14**, Lemma 4.1]). *Przesunięcie ważone* $W_{\boldsymbol{\lambda}}$ *z ciągiem wag* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *jest całkowicie hiperekspansywne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona dodatnia miara borelowska* μ *na* $[0,1]$ *taka, że*

$$\|W_{\boldsymbol{\lambda}}^n e_0\|^2 = 1 + \int_{[0,1]} (1 + \ldots + x^{n-1}) \mathrm{d}\mu(x), \quad n \geqslant 1. \tag{1}$$

Odpowiedniość $W_{\boldsymbol{\lambda}} \longleftrightarrow \mu$ *jest wzajemnie jednoznaczna (w szczególności, miara* μ *w* (1) *jest jedyna).*

Jeśli (1) zachodzi, to powiemy, że miara μ is *stowarzyszona* z przesunięciem ważonym W lub W jest *stowarzyszony* z miarą μ. Rozdział drugi kończą Propozycja 2.4 i Corollary 2.5 które mówią, że klasy operatorów 2-izometrycznych i całkowicie hiperekspansywnych mają własność (P).

Podstawową własnością charakteryzowaną w omawianej pracy jest własność k-wstecznej rozszerzalności (w przypadku $k = 1$ nazywanej wsteczną rozszerzalnością) w klasie operatorów całkowicie hiperekspansywnych.

DEFINICJA 6. Dla danej liczby $k \geqslant 1$, powiemy, że przesunięcie W z ciągiem wag $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ma *całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie*, jeśli dla pewnych dodatnich skalarów $\lambda_{-k}, \ldots, \lambda_{-1}$, przesunięcie ważone V z ciągiem wag $\{\lambda_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$ jest całkowicie hiperekspansywne; przesunięcie ważone V nazywamy *całkowicie hiperekspansywnym k-wstecznym rozszerzeniem W.*

Następujące twierdzenie charakteryzuje całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenia.

TWIERDZENIE 7 ([**18**, Theorem 4.2]). *Niech* $k \geqslant 1$ *będzie liczbą całkowitą oraz niech* W *będzie całkowicie hiperekspansywnym przesunięciem ważonym z ciągiem wag* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *oraz stowarzyszoną miarą* μ. *Wtedy*

1^0 *W ma całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\int_{[0,1]} \Big(\frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^k}\Big) \mathrm{d}\mu(x) < 1, \tag{2}$$

2^0 *jeśli* (2) *zachodzi, to miary ζ stowarzyszone z całkowicie hiperekspansywnym k-wstecznymi rozszerzeniami przesunięcia ważonego W są w jednoznacznej odpowiedniości z niujemnymi liczbami rzeczywistymi t poprzez*

$$\zeta(\sigma) = \frac{1+t}{1 - \int_{[0,1]} (\frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^k}) \mathrm{d}\mu(x)} \int_{\sigma} \frac{1}{x^k} \mathrm{d}\mu(x) + t\delta_0(\sigma), \quad \sigma \in \mathcal{B}([0,1]), \tag{3}$$

3^0 *jeśli* (2) *zachodzi, to istnieje co najwyżej jedno całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie V przesunięcia W które ma całkowicie hiperekspansywne rozszerzenie wsteczne; przesunięcie ważone V jest stowarzyszone z miarą ζ daną wzorem* (3) *z* $t = 0$.

Dla danego przesunięcia ważonego W, definiujemy wielkość $\varkappa_W$ w następujący sposób: jeśli W nie ma całkowicie hiperekspansywnego rozszerzenia wstecznego, wtedy $\varkappa_W = 0$; jeśli takie rozszerzenie istnieje, $\varkappa_W$ oznacza największą liczbę całkowitą $k \geqslant 1$ dla której W ma całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie pod warunkiem, że taka liczba istnieje; w przeciwnym przypadku definiujemy $\varkappa_W = \infty$. Powiemy, że ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest *silnie rosnący wewnątrz* $\mathbb{R}$ jeśli albo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest silnie rosnący, albo istnieje liczba całkowita $m \geqslant 1$ taka, że $\{a_n\}_{n=1}^{m} \subseteq \mathbb{R}$, $\{a_n\}_{n=1}^{m}$ jest silnie rosnący oraz $a_n = \infty$ dla wszystkich $n \geqslant m+1$.

WNIOSEK 8 ([**18**, Corollary 4.6]). *Niech W będzie całkowicie hiperekspansywnym przesunięciem ważonym z miarą stowarzyszoną μ. Niech* $\tau_k = \int_{[0,1]} \big(\frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^k}\big) \mathrm{d}\mu(x)$ *dla* $k \geqslant 1$. *Wtedy*

(i) $\varkappa_W = \infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy W jest jednostronnym izometrycznym przesunięciem ważonym,*

(ii) *jeśli* $1 \leqslant \varkappa_W < \infty$, *wtedy ciąg* $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ *jest silnie rosnący wewnątrz* $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty$ *oraz* $\varkappa_W = \max\{k \geqslant 1 : \tau_k < 1\}$,

(iii) *jeśli* $1 \leqslant \varkappa_W < \infty$, *to* $\|We_0\|^2 > 1$ *oraz* $\varkappa_W < \frac{1}{\|We_0\|^2 - 1}$.

Pewnym uogólnieniem pojęcia wstecznej rozszerzalności jest pełna wsteczna rozszerzalność.

DEFINICJA 9. Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $T \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem całkowicie hiperekspansywnym. Powiemy, że niezerowy wektor $h \in \mathcal{H}$ posiada *całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie* dla T, jeśli $W_{T,h}$ posiada całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie; zbiór tych wszystkich wektorów powiększony o wektor zerowy oznaczamy przez $\mathcal{E}_{T,k}$. Jeśli $\mathcal{E}_{T,k} = \mathcal{H}$, to powiemy, że T ma *pełne całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie.*

Do charakteryzacji operatorów mających pełne całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie potrzebujemy operatorowej wersji reprezentacji Levy-Chinczyna dla operatorów całkowicie hiperekspansywnych.

TWIERDZENIE 10 ([**14**, Theorem 4.2]). *Operator $T \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ jest całkowicie hiperekspansywny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje (jedyna) miara półspektralna[1] F_T na $[0,1]$ taka, że*

$$T^{*n}T^n = I_{\mathcal{H}} + \int_{[0,1]} (1 + \ldots + x^{n-1}) F_T(\mathrm{d}x), \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

Miarę półspektralną F_T nazwiemy miarą stowarzyszoną z operatorem całkowicie hiperekspansywnym T. Zdefiniujmy

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x^k} & \text{dla } x \in (0,1], \\ \infty & \text{dla } x = 0. \end{cases} \qquad k \geqslant 1.$$

Za [**33**, Appendix] powiemy, że $\psi \in L^1(F_T)$ jeśli ψ jest zespoloną funkcją borelowską na $[0,1]$ oraz

$$\int_{[0,1]} |\psi(x)| \langle F_T(\mathrm{d}x)h, h\rangle < \infty, \quad h \in \mathcal{H}.$$

W takim przypadku istnieje jedyny operator $\int_{[0,1]} \psi \mathrm{d}F_T \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ taki, że

$$\Big\langle \int_{[0,1]} \psi \mathrm{d}F_T h, h \Big\rangle = \int_{[0,1]} \psi(x) \langle F_T(\mathrm{d}x)h, h\rangle, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Ponadto

$$\Big\| \int_{[0,1]} \psi \mathrm{d}F_T \Big\| \leqslant \Big\| \int_{[0,1]} |\psi| \mathrm{d}F_T \Big\| = \sup_{\|h\|=1} \int_{[0,1]} |\psi(x)| \langle F_T(\mathrm{d}x)h, h\rangle.$$

Jeśli ψ jest nieujemna, to $\int_{[0,1]} \psi \mathrm{d}F_T \geqslant 0$.

TWIERDZENIE 11 ([**18**, Theorem 5.6]). *Niech $T \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ będzie całkowicie hiperekspansywnym operatorem ze stowarzyszoną miarą półspektralną F_T oraz niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy następujące warunki są równoważne*

(i) *T ma pełne całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie,*
(ii) *$\varphi_k \in L^1(F_T)$ oraz $\int_{[0,1]} \varphi_k \mathrm{d}F_T < I_{\mathcal{H}}$,*
(iii) *$\varphi_k \in L^1(F_T)$, $\| \int_{[0,1]} \varphi_k \mathrm{d}F_T \| \leqslant 1$ oraz 1 nie jest wartością własną operatora $\int_{[0,1]} \varphi_k \mathrm{d}F_T$.*

Ponadto, jeśli T ma pełne całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie, to

$$F_T([0,1]) < \frac{1}{k} I_{\mathcal{H}} \quad \text{oraz} \quad T^*T < \frac{k+1}{k} I_{\mathcal{H}}.$$

Okazuje się, że w klasie przesunięć ważonych pełne całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenia charakteryzują się w prosty sposób.

PROPOZYCJA 12 ([**18**, Proposition 6.1]). *Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą oraz niech W będzie całkowicie hiperekspansywnym przesunięciem ważonym. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *W ma całkowicie hiperekspansywne pełne k-wsteczne rozszerzenie,*
(ii) *W ma całkowicie hiperekspansywne k-wsteczne rozszerzenie (lub równoważnie: $e_0 \in \mathcal{E}_{W,k}$),*
(iii) *$\varphi_k \in L^1(F_W)$ oraz $\| \int_{[0,1]} \varphi_k \mathrm{d}F_W \| < 1$.*

Następujący rezultat charakteryzuje podobieństwo całkowicie hiperekspansywnych przesunięć ważonych, które są potęgowo ograniczone.

PROPOZYCJA 13 ([**18**, Proposition 6.7]). *Niech W_1 oraz W_2 będą całkowicie hiperekspansywnymi przesunięciami ważonymi ze stowarzyszonymi miarami odpowiednio μ_1 oraz μ_2. Załóżmy, że W_1 oraz W_2 są potęgowo ograniczone. Wtedy przesunięcia ważone W_1 oraz W_2 są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\textit{albo} \quad \mu_1(\{1\}) + \mu_2(\{1\}) = 0 \quad \textit{albo} \quad \mu_1(\{1\}) \cdot \mu_2(\{1\}) > 0. \tag{5}$$

[1] F_T jest σ-addytywna względem słabej topologii operatorowe; nie zakładamy, że $F_T([0,1]) = I_{\mathcal{H}}$.

Kwestię podobieństwa przesunięcia ważonego do izometrycznego przesunięcia ważonego oraz przesunięcia Dirichleta (tzn. przesunięcia ważonego z wagami $\{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\}_{n=0}^{\infty}$) rozstrzyga następujący rezultat.

PROPOZYCJA 14 ([**18**, Proposition 6.8]). *Niech W będzie całkowicie hiperekspansywnym przesunięciem ważonym z miarą stowarzyszoną μ. Wtedy*

(i) *W jest podobny do jednostronnego izometrycznego przesunięcia ważonego wtedy i tylko wtedy, gdy W jest potęgowo ograniczony, lub równoważnie*

$$\mu(\{1\}) = 0 \quad oraz \quad \int_{[0,1)} \frac{1}{1-x} \mathrm{d}\mu(x) < \infty, \tag{6}$$

(ii) *W jest podobny do przesunięciaa Dirichleta wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\{1\}) > 0$.*

Ponadto, jednostronne przesunięcie izometryczne i przesunięcie Dirichleta nie są podobne.

4. Weighted shifts on directed trees

Głównym celem tej pracy jest implementacja pewnych metod teorii grafów w teorii operatorów. Czynimy to poprzez wprowadzenie nowej klasy operatorów, które proponujemy nazwać *przesunięcia ważone na drzewach skierowanych*. Będziemy badać przesunięcia ważone na drzewach skierowanych bez zakładania żadnych dodatkowych restrykcji na liczebność wierzchołków. Jednakże, jeśli chcemy badać gęsto określone przesunięcia ważone z wagami niezerowymi, to rozważane drzewa okazują się co najwyżej przeliczalne.

Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie grafem skierowanym (tzn., V będzie zbiorem wszystkich wierzchołków $\mathscr{T}$ oraz E będzie zbiorem wszystkich krawędzi $\mathscr{T}$). Jeśli dla danego wierzchołka $u \in V$, istnieje jedyny wierzchołek $v \in V$ taki, że $(v, u) \in E$, to powiemy, że u ma rodzica v i zapiszemy $\mathsf{par}(u)$ w miejsce v. Ponieważ odpowiedniość $u \mapsto \mathsf{par}(u)$ jest częściową funkcją (relacją) w V, możemy składać ją ze sobą k-razy ($k \in \mathbb{N}$); wynik oznaczać będziemy przez par^k (par^0 jest identycznościowym odwzorowaniem na V). Wierzchołek v grafu $\mathscr{T}$ nazywamy *korzeniem* $\mathscr{T}$, lub krócej $v \in \mathsf{Root}(\mathscr{T})$, jeśli nie istnieje wierzchołek u grafu $\mathscr{T}$ taki, że (u, v) jest krawędzią w grafie $\mathscr{T}$. Zauważmy, że jeśli $\mathscr{T}$ jest spójny i każdy wierzchołek $v \in V^\circ := V \setminus \mathsf{Root}(\mathscr{T})$ ma rodzica, to zbiór $\mathsf{Root}(\mathscr{T})$ ma co najwyżej jeden wierzchołek. Jeśli $\mathsf{Root}(\mathscr{T})$ jest zbiorem jednoelementowym, to jedyny element będziemy oznaczać przez root. Powiemy, że graf skierowany $\mathscr{T}$ jest *drzewem skierowanym*, jeśli $\mathscr{T}$ jest spójny, nie ma pętli oraz każdy wierzchołek $v \in V^\circ$ ma rodzica $\mathsf{par}(v)$.

Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie drzewem skierowanym. Niech $\mathsf{Chi}(u) = \{v \in V : (u, v) \in E\}$ dla $u \in V$. Elementy $\mathsf{Chi}(u)$ nazywamy *dziećmi* wierzchołka u. Powiemy, że drzewo $\mathscr{T}$ jest *bezlistne* jeśli $V = V'$, gdzie $V' := \{u \in V : \mathsf{Chi}(u) \neq \varnothing\}$. Jest oczywiste, że każde bezlistne drzewo jest nieskończone. Wierzchołek $u \in V$ nazywamy *rozgałęziającym* dla $\mathscr{T}$ jeśli $\mathrm{card}(\mathsf{Chi}(u)) \geqslant 2$.

Prosto możemy wykazać, że jeśli $\mathscr{T}$ jest drzewem skierowanym, to $\mathsf{Chi}(u) \cap \mathsf{Chi}(v) = \varnothing$ dla wszystkich $u, v \in V$ takich że $u \neq v$, oraz

$$V^\circ = \bigsqcup_{u \in V} \mathsf{Chi}(u). \tag{7}$$

(Symbol "$\bigsqcup$" oznacza rozłączną sumę zbiorów.) Dla podzbioru $W \subseteq V$, kładziemy $\mathsf{Chi}(W) = \bigsqcup_{v \in W} \mathsf{Chi}(v)$ oraz definiujemy $\mathsf{Chi}^{\langle 0 \rangle}(W) = W$, $\mathsf{Chi}^{\langle n+1 \rangle}(W) = \mathsf{Chi}(\mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(W))$ dla $n \in \mathbb{Z}_+$ oraz $\mathsf{Des}(W) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(W)$. Stosując indukcję otrzymujemy

$$\mathsf{Chi}^{\langle n+1 \rangle}(W) = \bigsqcup_{v \in \mathsf{Chi}(W)} \mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(\{v\}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{8}$$

$$\mathsf{Chi}^{\langle m \rangle}(\mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(W)) = \mathsf{Chi}^{\langle m+n \rangle}(W), \quad m, n \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

Będziemy używać oznaczenia $\mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(\{u\})$ oraz $\mathsf{Des}(\{u\})$ dla $\mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(u)$ oraz $\mathsf{Des}(u)$ odpowiednio.

Mając dane drzewo skierowane $\mathscr{T}$, będziemy milcząco zakładać, że V oraz E oznaczają zbiory wierzchołków i krawędzi $\mathscr{T}$ odpowiednio. Oznaczmy prze $\ell^2(V)$ przestrzeń Hilberta wszystkich funkcji zespolonych sumowalnych z kwadratem na V ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle f, g \rangle = \sum_{u \in V} f(u)\overline{g(u)}$. Dla $u \in V$, niech $e_u \in \ell^2(V)$ oznacza funkcję charakterystyczną jednoelementowego zbioru $\{u\}$. Wtedy $\{e_u\}_{u \in V}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\ell^2(V)$. Niech $\mathscr{E}_V = \mathrm{LIN}\{e_u : u \in V\}$.

Mając dane $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ} \subseteq \mathbb{C}$, definiujemy operator $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ w $\ell^2(V)$ wzorem

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) &= \{f \in \ell^2(V) : \Lambda_{\mathscr{T}} f \in \ell^2(V)\}, \\ S_{\boldsymbol{\lambda}} f &= \Lambda_{\mathscr{T}} f, \quad f \in \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}), \end{aligned}$$

gdzie $\Lambda_{\mathscr{T}}$ jest odwzorowaniem zdefiniowanym na funkcjach $f\colon V \to \mathbb{C}$ wzorem

$$(\Lambda_{\mathscr{T}} f)(v) = \begin{cases} \lambda_v \cdot f\big(\mathsf{par}(v)\big) & \text{jeśli } v \in V^{\circ}, \\ 0 & \text{jeśli } v = \mathsf{root}. \end{cases} \tag{10}$$

Operator $S_{\boldsymbol\lambda}$ nazywamy *przesunięciem ważonym* na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^{\circ}}$.

Problem kiedy przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol\lambda}$ na drzewie skierowanym jest operatorem ograniczonym ma proste rozwiązanie.

PROPOZYCJA 15 ([**23**, Proposition 3.1.8]). *Niech $S_{\boldsymbol\lambda}$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^{\circ}}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol\lambda}) = \ell^2(V)$,

(ii) $S_{\boldsymbol\lambda} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$,

(iii) $\sup_{u\in V} \sum_{v\in \mathsf{Chi}(u)} |\lambda_v|^2 < \infty$.

Jeśli $S_{\boldsymbol\lambda} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$, wtedy

$$\|S_{\boldsymbol\lambda}\| = \sup_{u\in V} \|S_{\boldsymbol\lambda} e_u\| = \sup_{u\in V} \sqrt{\sum_{v\in\mathsf{Chi}(u)} |\lambda_v|^2}. \tag{11}$$

Następujący rezultat pokazuje, że z punktu widzenia przestrzeni Hilberta, studiowanie przesunięć ważonych na drzewach skierowanych można ograniczyć do przypadku przesunięć ważonych z wagami nieujemnymi.

TWIERDZENIE 16 ([**23**, Theorem 3.2.1]). *Przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol\lambda}$ na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^{\circ}}$ jest unitarnie równoważne przesunięciu ważonemu $S_{|\boldsymbol\lambda|}$ na $\mathscr{T}$ z wagami $|\boldsymbol\lambda| = \{|\lambda_v|\}_{v\in V^{\circ}}$.*

Opiszemy teraz postać rozkładu polarnego przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym.

PROPOZYCJA 17 ([**23**, Proposition 3.5.1]). *Niech $S_{\boldsymbol\lambda}$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^{\circ}}$, oraz niech $S_{\boldsymbol\lambda} = U|S_{\boldsymbol\lambda}|$ będzie rozkładem polarnym $S_{\boldsymbol\lambda}$. Wtedy $|S_{\boldsymbol\lambda}|$ jest operatorem diagonalnym względem bazy ortonormalnej $\{e_u\}_{u\in V}$ z diagonalą $\{\|S_{\boldsymbol\lambda} e_u\|\}_{u\in V}$, oraz U jest przesunięciem ważonym $S_{\boldsymbol\pi}$ na $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\pi = \{\pi_u\}_{u\in V^{\circ}}$ danymi wzorem*[2]

$$\pi_u = \begin{cases} \dfrac{\lambda_u}{\|S_{\boldsymbol\lambda} e_{\mathsf{par}(u)}\|} & \textit{jeśli } \mathsf{par}(u) \in V_{\boldsymbol\lambda}^+, \\ 0 & \textit{jeśli } \mathsf{par}(u) \notin V_{\boldsymbol\lambda}^+, \end{cases} \quad u \in V^{\circ}, \tag{12}$$

gdzie $V_{\boldsymbol\lambda}^+ := \{u \in V\colon \|S_{\boldsymbol\lambda} e_u\| > 0\}$. Ponadto, następujące warunki są spełnione:

(i) $\mathscr{N}(U) = \mathscr{N}(S_{\boldsymbol\lambda}) = \mathscr{N}(|S_{\boldsymbol\lambda}|) = \ell^2(V \setminus V_{\boldsymbol\lambda}^+)$ *oraz* $\overline{\mathscr{R}(S_{\boldsymbol\lambda}^*)} = \ell^2(V_{\boldsymbol\lambda}^+)$,

(ii) $$\mathscr{N}(S_{\boldsymbol\lambda}^*) = \begin{cases} \langle e_{\mathsf{root}}\rangle \oplus \bigoplus_{u\in V'} \big(\ell^2(\mathsf{Chi}(u)) \ominus \langle \boldsymbol\lambda^u\rangle\big) & \textit{jeśli } \mathscr{T} \textit{ ma korzeń}, \\ \bigoplus_{u\in V'} \big(\ell^2(\mathsf{Chi}(u)) \ominus \langle \boldsymbol\lambda^u\rangle\big) & \textit{w przeciwnym przypadku}, \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol\lambda^u \in \ell^2(\mathsf{Chi}(u))$ jest dane wzorem $\boldsymbol\lambda^u\colon \mathsf{Chi}(u) \ni v \to \lambda_v \in \mathbb{C}$, oraz $\langle\boldsymbol\lambda^u\rangle$ oznacza liniowe rozpięcie $\{\boldsymbol\lambda^u\}$,

(iii) *przestrzeń początkowa U jest równa $\ell^2(V_{\boldsymbol\lambda}^+)$,*

(iv) $\mathscr{R}(U) = \overline{\mathscr{R}(S_{\boldsymbol\lambda})} = \bigoplus_{u\in V'} \langle\boldsymbol\lambda^u\rangle$.

Przypomnijmy, że gęsto określony i domknięty operator T w zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ jest nazywany operatorem *Fredholma* jeśli obraz operatora T jest domknięty oraz przestrzenie $\mathscr{N}(T)$ oraz $\mathscr{N}(T^*)$ są skończenie wymiarowe. Jest dobrze znane, że domknięty i gęsto określony operator T w $\mathcal{H}$ jest operatorem Fredholma wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzenie $\mathscr{N}(T)$ oraz $\mathcal{H}/\mathscr{R}(T)$ są skończenie wymiarowe. *Indeks* $\mathrm{ind}(T)$ operatora Fredholma T jest dany wzorem $\mathrm{ind}(T) = \dim\mathscr{N}(T) - \dim\mathscr{N}(T^*)$.

Przesunięcia ważone na drzewach skierowanych będące operatorami Fredholma oraz ich indeksy mogą być scharakteryzowane w następujący sposób (poniżej będziemy stosować konwencję, że $\inf\varnothing = \infty$).

PROPOZYCJA 18 ([**23**, Proposition 3.6.2]). *Niech $S_{\boldsymbol\lambda}$ będzie gęsto określonym przesunięciem na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^{\circ}}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

---

[2] Dla prostoty zapisu, opuszczamy zależność $\boldsymbol\pi$ od $\boldsymbol\lambda$.

(i) $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest operatorem Fredholma,*

(ii) $\mathfrak{c}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) > 0$ *oraz* $\mathfrak{b}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) < \infty$, *gdzie*

$$\mathfrak{b}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) := \sum_{u \in V_{\boldsymbol{\lambda}}^+} (\mathrm{card}(\mathsf{Chi}(u)) - 1) + \sum_{u \in V' \setminus V_{\boldsymbol{\lambda}}^+} \mathrm{card}(\mathsf{Chi}(u)),$$

$$\mathfrak{c}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) := \inf\{|\lambda_u| \colon u \in V^\circ, \lambda_u \neq 0, \mathrm{card}(\mathsf{Chi}(\mathsf{par}(u))) = 1\},$$

(iii) $\mathfrak{c}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) > 0$, $\mathrm{card}(\mathsf{Chi}(u)) < \infty$ *dla wszystkich* $u \in V$, $\mathrm{card}(V_{\prec}) < \infty$, *gdzie* $V_{\prec} = \{u \in V \colon \mathrm{card}(\mathsf{Chi}(u)) \geqslant 2\}$, *oraz* $\mathrm{card}(V' \setminus V_{\boldsymbol{\lambda}}^+) < \infty$.

Jeśli $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest operatorem Fredholma, to* $\mathfrak{a}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) := \mathrm{card}(V \setminus V_{\boldsymbol{\lambda}}^+) < \infty$ *oraz*

$$\mathrm{ind}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) = \begin{cases} \mathfrak{a}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) - \mathfrak{b}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) - 1 & \textit{jeśli } \mathscr{T} \textit{ ma korzeń}, \\ \mathfrak{a}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) - \mathfrak{b}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{13}$$

W [**23**, Chapter 4] podajemy warunki charakteryzujące inkluzje $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) \subseteq \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^*)$ oraz $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^*) \subseteq \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}})$. W pierwszym przypadku warunki te wyglądają następująco.

TWIERDZENIE 19 ([**23**, Theorem 4.1.1]). *Jeśli* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest gęsto określonym przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym* $\mathscr{T}$ *z wagami* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$, *wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}) \subseteq \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^*)$,

(ii) *istnieje stała* $c > 0$ *taka, że*

$$\sum_{v \in \mathsf{Chi}(u)} \frac{|\lambda_v|^2}{1 + \|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\|^2} \leqslant c, \quad u \in V. \tag{14}$$

Warunki charakteryzujące zachodzenie inkuzji $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^*) \subseteq \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}})$ są bardziej skomplikowane i wymagają pewnych dodatkowych rozważań. W tym celu wiążemy z przesunięciem ważonym $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ operator diagonalny M_u w $\ell^2(\mathsf{Chi}(u))$, $u \in V'$, dany wzorem

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(M_u) &= \{g \in \ell^2(\mathsf{Chi}(u)) \colon \sum_{v \in \mathsf{Chi}(u)} \|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\|^2 |g(v)|^2 < \infty\}, \\ (M_u g)(v) &= \|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\| g(v), \quad v \in \mathsf{Chi}(u),\ g \in \mathscr{D}(M_u). \end{aligned} \tag{15}$$

Jeśli $u \in V'$ jest taki, że funkcja $\boldsymbol{\lambda}^u \colon \mathsf{Chi}(u) \ni v \to \lambda_v \in \mathbb{C}$ należy do $\mathscr{D}(M_u)$, wtedy definiujemy operator T_u w $\ell^2(\mathsf{Chi}(u))$ wzorem

$$T_u = M_u^2 - \frac{1}{1 + \|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_u\|^2} M_u(\boldsymbol{\lambda}^u) \otimes M_u(\boldsymbol{\lambda}^u), \quad u \in V'. \tag{16}$$

W celu uproszczenia, w zapisie opuszczamy zależność M_u oraz T_u od $\boldsymbol{\lambda}$.

TWIERDZENIE 20 ([**23**, Theorem 4.2.2]). *Jeśli* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest gęsto określonym przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym* $\mathscr{T}$ *z wagami* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$, *wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}}^*) \subseteq \mathscr{D}(S_{\boldsymbol{\lambda}})$,

(ii) $T_u \in \boldsymbol{B}(\ell^2(\mathsf{Chi}(u)))$ *dla wszystkich* $u \in V'$, *oraz*

$$\sup_{u \in V'} \|T_u\| < \infty. \tag{17}$$

W [**23**, Section 4.3] podajemy przykład ilustrujący zachodzenie wszystkich możliwych inkluzji pomiędzy dziedzinami nieograniczonego przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym oraz jego sprzężenia.

Przypomnijmy, że gęsto określony operator A w zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy *hiponormalnym* jeśli $\mathscr{D}(A) \subseteq \mathscr{D}(A^*)$ oraz $\|A^* f\| \leqslant \|Af\|$ dla wszystkich $f \in \mathscr{D}(A)$. Następujący rezultat charakteryzuje hiponormalne przesunięcia ważone na drzewach skierowanych.

TWIERDZENIE 21 ([**23**, Theorem 5.1.2 oraz Remark 5.1.5]). *Niech* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *będzie gęsto określonym przesunięciem ważonym na bezlistnym drzewie skierowanym* $\mathscr{T}$ *z niezerowymi wagami* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$. *Wtedy* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest hiponormalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{v \in \mathsf{Chi}(u)} \frac{|\lambda_v|^2}{\|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\|^2} \leqslant 1, \quad u \in V.$$

Przypomnijmy, że operator $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ nazywamy *ko-hiponormalnym* jeśli jego sprzężenie A^* jest hiponormalne. Problem ko-hiponormalności przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym jest bardziej subtelny niż problem hiponormalności.

TWIERDZENIE 22 ([**23**, Theorem 5.2.2]). *Niech $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ będzie niezerowym przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$. Wtedy $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest ko-hiponormalny wtedy i tylko wtedy, gdy drzewo $\mathscr{T}$ jest bez korzenia oraz jeden z dwóch rozłącznych warunków zachodzi:*

(i) *istnieje ciąg $\{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subseteq V$ taki, że*

$$0 < |\lambda_{u_n}| \leqslant |\lambda_{u_{n-1}}| \text{ oraz } u_{n-1} = \mathsf{par}(u_n) \tag{18}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$, oraz $\lambda_v = 0$ dla wszystkich $v \in V \setminus \{u_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$,

(ii) *istnieje ciąg $\{u_n\}_{n=-\infty}^{0} \subseteq V$ taki, że*

$$0 < \sum_{v \in \mathsf{Chi}(u_0)} |\lambda_v|^2 \leqslant |\lambda_{u_0}|^2, \ 0 < |\lambda_{u_n}| \leqslant |\lambda_{u_{n-1}}| \text{ oraz } u_{n-1} = \mathsf{par}(u_n) \tag{19}$$

dla wszystkich liczb całkowitych $n \leqslant 0$, oraz $\lambda_v = 0$ dla wszystkich $v \in V \setminus (\{u_n \colon n \leqslant 0\} \cup \mathsf{Chi}(u_0))$.

W [**23**, Section 5.3] podajemy przykłady ograniczonych iniektywnych przesunięć ważonych na drzewach skierowanych które są paranormalne a nie hiponormalne oraz hiponormalnego przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym którego kwadrat nie jest hiponormalny.

Przypomnijmy, że operator $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ jest *subnormalny* jeśli istnieje zespolona przestrzeń Hilberta $\mathcal{K}$ oraz operator normalny $N \in \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ taki, że $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ (izometryczne zanurzenie) oraz $Ah = Nh$ dla wszystkich $h \in \mathcal{H}$.

Mając daną rodzinę liczb zespolonych $\{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$, definiujemy rodzinę $\{\lambda_{u|v}\}_{u \in V, v \in \mathsf{Des}(u)}$ wzorem

$$\lambda_{u|v} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } v = u, \\ \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{\mathsf{par}^j(v)} & \text{jeśli } v \in \mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(u), \ n \geqslant 1. \end{cases} \tag{20}$$

Następujący rezultat charakteryzuje subnormalne przesunięcia ważone na drzewach skierowanych.

TWIERDZENIE 23 ([**23**, Theorem 6.1.3]). *Jeśli $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ jest przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$S_{\boldsymbol{\lambda}}$ jest subnormalny,*
(ii) *$\Big\{ \sum_{v \in \mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(u)} |\lambda_{u|v}|^2 \Big\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $u \in V$,*
(iii) *$\{\|S_{\boldsymbol{\lambda}}^n e_u\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $u \in V$,*
(iv) *$\{\|S_{\boldsymbol{\lambda}}^n e_u\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Hamburgera dla wszystkich $u \in V$,*
(v) *$\sum_{k,l=0}^{n} \|S_{\boldsymbol{\lambda}}^{k+l} e_u\|^2 \alpha_k \overline{\alpha_l} \geqslant 0$ dla wszystkich $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ oraz $u \in V$.*

Następująca propozycja dotyczy problemu subnormalnej rozszerzalności wag.

PROPOZYCJA 24 ([**23**, Proposition 6.1.12]). *Niech $\mathscr{T} = (V, E)$ będzie poddrzewem drzewa skierowanego $\hat{\mathscr{T}} = (\hat{V}, \hat{E})$ takim, że $\mathsf{Chi}_{\mathscr{T}}(w) \neq \mathsf{Chi}_{\hat{\mathscr{T}}}(w)$ dla pewnego $w \in V \setminus \mathsf{Root}(\mathscr{T})$, oraz $\mathsf{Des}_{\mathscr{T}}(v) = \mathsf{Des}_{\hat{\mathscr{T}}}(v)$ dla wszystkich $v \in \mathsf{Chi}_{\mathscr{T}}(w)$. Przypuśćmy, że $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ jest subnormalnym przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z niezerowymi wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_u\}_{u \in V^\circ}$. Wtedy drzewo skierowane $\mathscr{T}$ jest bezlistne oraz nie istnieje subnormalne przesunięcie ważone $S_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(\hat{V}))$ na $\hat{\mathscr{T}}$ z niezerowymi wagami $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \{\hat{\lambda}_u\}_{u \in \hat{V}^\circ}$ takie, że $\boldsymbol{\lambda} \subseteq \hat{\boldsymbol{\lambda}}$, to znaczy, $\lambda_u = \hat{\lambda}_u$ dla wszystkich $u \in V^\circ$.*

Klasyczne przesunięcia ważone są budowane na bardzo specjalnych drzewach skierowanych które są scharakteryzowane własnością, że każdy wierzchołek posiada dokładnie jedno dziecko. W [**23**, Section 6.2], rozważamy jeden krok bardziej skomplikowane drzewa skierowane, to znaczy takie z własnością, że każdy wierzchołek poza jednym ma dokładnie jedno dziecko; ten wyjątkowy wierzchołek jest wierzchołkiem rozgałęziającym.

Mając dane przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$ oraz $u \in V^\circ$, oznaczymy przez $S_{\boldsymbol{\lambda}_{\rightarrow}(u)}$ oraz przez $S_{\boldsymbol{\lambda}_{\leftarrow}(u)}$ przesunięcia ważone na drzewach skierowanych $\mathscr{T}_{\mathsf{Des}(u)}$ oraz $\mathscr{T}_{V \setminus \mathsf{Des}(u)}$ z wagami $\boldsymbol{\lambda}_{\rightarrow}(u) := \{\lambda_v\}_{v \in \mathsf{Des}(u) \setminus \{u\}}$ oraz $\boldsymbol{\lambda}_{\leftarrow}(u) := \{\lambda_v\}_{v \in V \setminus (\mathsf{Des}(u) \cup \mathsf{Root}(\mathscr{T}))}$, odpowiednio. Jeśli $\mathscr{T}$ ma korzeń oraz $u = \mathsf{root}$, wtedy piszemy $S_{\boldsymbol{\lambda}_{\rightarrow}(u)} := S_{\boldsymbol{\lambda}}$. Niech $J_\iota = \{k \in \mathbb{N} \colon k \leqslant \iota\}$ dla $\iota \in \mathbb{Z}_+ \sqcup \{\infty\}$. Zauważmy, że $J_0 = \varnothing$ oraz $J_\infty = \mathbb{N}$.

Niech $S_{\boldsymbol\lambda} \in B(\ell^2(V))$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$. Jeśli dla pewnego $u \in V$, $\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n e_u\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa, wtedy jest on zdeterminowany i jego jedyna miara reprezentująca skoncentrowana jest na $[0, \|S_{\boldsymbol\lambda}\|^2]$. Oznaczmy tą miarę przez μ_u (lub przez $\mu_u^{\mathscr{T}}$ jeśli chcemy wyrazić jasno zależność μ_u od $\mathscr{T}$).

TWIERDZENIE 25 ([**23**, Theorem 6.2.1]). *Przypuśćmy, że $\mathscr{T}$ jest drzewem skierowanym dla którego istnieje wierzchołek $\omega \in V$ taki, że $\mathrm{card}(\mathsf{Chi}(\omega)) \geqslant 2$ oraz $\mathrm{card}(\mathsf{Chi}(v)) = 1$ dla wszystkich $v \in V \setminus \{\omega\}$. Niech $S_{\boldsymbol\lambda} \in B(\ell^2(V))$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z niezerowymi wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^\circ}$. Wtedy zachodzą następujące warunki.*

(i) *Jeśli $\omega \in \mathsf{Root}(\mathscr{T})$, wtedy $S_{\boldsymbol\lambda}$ jest subnormalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{v\in\mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^\infty \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\mu_v(s) \leqslant 1, \tag{21}$$

oraz $\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n e_v\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $v \in \mathsf{Chi}(\omega)$.

(ii) *Jeśli $\mathscr{T}$ ma korzeń oraz $\omega \neq \mathsf{root}$, wtedy $S_{\boldsymbol\lambda}$ jest subnormalny wtedy i tylko wtedy, gdy następujące dwa równoważne warunki zachodzą:*

(ii-a) *$S_{\boldsymbol\lambda_{\to(\omega)}}$ jest subnormalny,*

$$\sum_{v\in\mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^\infty \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\mu_v(s) = 1, \tag{22}$$

$$\frac{1}{|\prod_{j=0}^{k-1}\lambda_{\mathsf{par}^j(\omega)}|^2} = \sum_{v\in\mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^\infty \frac{1}{s^{k+1}}\mathrm{d}\mu_v(s) \tag{23}$$

dla wszystkich $k \in J_{\kappa-1}$, oraz

$$\frac{1}{|\prod_{j=0}^{\kappa-1}\lambda_{\mathsf{par}^j(\omega)}|^2} \geqslant \sum_{v\in\mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^\infty \frac{1}{s^{\kappa+1}}\mathrm{d}\mu_v(s), \tag{24}$$

gdzie κ jest jedyną dodatnią liczbą całkowitą taką, że $\mathsf{par}^\kappa(\omega) = \mathsf{root}$;

(ii-b) *$\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n e_{\mathsf{root}}\|^2\}_{n=0}^\infty$ oraz $\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n e_v\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $v \in \mathsf{Chi}(\omega)$.*

(iii) *Jeśli $\mathscr{T}$ nie ma korzenia, wtedy $S_{\boldsymbol\lambda}$ jest subnormalny wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z dwóch następujących warunków równoważnych zachodzi:*

(iii-a) *$S_{\boldsymbol\lambda_{\to(\omega)}}$ jest subnormalny, (22) zachodzi dla $u = \omega$, oraz (23) zachodzi dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$,*

(iii-b) *$\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n e_{\mathsf{par}^k(\omega)}\|^2\}_{n=0}^\infty$ oraz $\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n e_v\|^2\}_{n=0}^\infty$ są ciągami momentów Stieltjesa dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $k \geqslant 1$ oraz dla wszystkich $v \in \mathsf{Chi}(\omega)$.*

Dla danych $\eta, \kappa \in \mathbb{Z}_+ \sqcup \{\infty\}$ z $\eta \geqslant 2$, definiujemy drzewo skierowane $\mathscr{T}_{\eta,\kappa} = (V_{\eta,\kappa}, E_{\eta,\kappa})$ wzorami

$$\begin{aligned} V_{\eta,\kappa} &= \big\{-k\colon k \in J_\kappa\big\} \sqcup \{0\} \sqcup \big\{(i,j)\colon i \in J_\eta,\ j \in \mathbb{N}\big\},\\ E_{\eta,\kappa} &= E_\kappa \sqcup \big\{(0,(i,1))\colon i \in J_\eta\big\} \sqcup \big\{((i,j),(i,j+1))\colon i \in J_\eta,\ j \in \mathbb{N}\big\},\\ E_\kappa &= \big\{(-k,-k+1)\colon k \in J_\kappa\big\}. \end{aligned} \tag{25}$$

Jeśli $\kappa < \infty$, to drzewo skierowane $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ ma korzeń oraz $\mathsf{root}(\mathscr{T}_{\eta,\kappa}) = -\kappa$. W szczególności, jeśli $\kappa = \infty$, to drzewo skierowane $\mathscr{T}_{\eta,\infty}$ nie ma korzenia. We wszystkich przypadkach, wierzchołkiem rozgałęziającym ω jest 0. Dodajmy, że najprostrzym[3] bezlistnym drzewem skierowanym, które nie jest izomorficzne z $\mathbb{Z}_+$ ani z $\mathbb{Z}$ jest $\mathscr{T}_{2,0}$. W [**23**, Section 6.3] podajemy metodę konstruowania wszystkich ograniczonych subnormalnych przesunięć ważonych na drzewie skierowanym $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ z niezerowymi wagami. Jest to zrobione w [**23**, Procedure 6.3.1]. Powiążemy teraz subnormalność przesunięć ważonych na drzewie skierowanym $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ z jednostronnymi klasycznymi przesunięciami ważonymi, które posiadają subnormalne $(\kappa+1)$-wsteczne rozszerzenia.

PROPOZYCJA 26 ([**23**, Proposition 6.3.4]). *Niech $\kappa, \eta \in \mathbb{Z}_+ \sqcup \{\infty\}$ oraz niech $\eta \geqslant 2$. Jeśli dla wszystkich $i \in J_\eta$, S_i jest ograniczonym jednostronnym klasycznym przesunięciem ważonym z dodatnimi wagami $\{\alpha_{i,n}\}_{n=1}^\infty$, wtedy następujące warunki są równoważne:*

[3] To oznacza, że nie istnieje właściwe, bezlistne poddrzewo danego drzewa skierowanego które jest izomorficzne z $\mathbb{Z}_+$.

(i) *istnieje system* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ_{\eta,\kappa}}$ *dodatnich skalarów taki, że przesunięcie ważone* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *na drzewie skierowanym* $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ *jest ograniczone i subnormalne, oraz*

$$\alpha_{i,n} = \lambda_{i,n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \; i \in J_\eta, \tag{26}$$

(ii) S_i *ma subnormalne* $(\kappa+1)$*-wsteczne rozszerzenie dla wszystkich* $i \in J_\eta$*, oraz* $\sup_{i \in J_\eta} \|S_i\| < \infty$.

Ponadto, jeśli $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest jak w* (i)*, wtedy* $\|S_{\boldsymbol{\lambda}}\| = \sup_{i \in J_\eta} \|S_i\|$.

Całkowicie hiperekspansywne przesunięcia ważone na drzewach skierowanych mogą być scharakteryzowane w następujący sposób.

TWIERDZENIE 27 ([**23**, Theorem 7.1.4]). *Jeśli* $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ *jest przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym* $\mathscr{T}$ *z wagami* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$*, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest całkowicie hiprekspansywne,*

(ii) $\Big\{ \sum_{v \in \mathsf{Chi}^{\langle n \rangle}(u)} |\lambda_{u|v}|^2 \Big\}_{n=0}^{\infty}$ *jest ciągiem całkowicie alternującym dla wszystkich* $u \in V$,

(iii) $\{\|S^n_{\boldsymbol{\lambda}} e_u\|^2\}_{n=0}^\infty$ *jest ciągiem całkowicie alternującym dla wszystkich* $u \in V$,

(iv) $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \|S^j_{\boldsymbol{\lambda}} e_u\|^2 \leqslant 0$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $u \in V$.

Niech $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$. Jeśli dla pewnego $u \in V$, ciąg $\{\|S^n_{\boldsymbol{\lambda}} e_u\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest całkowicie alternujący, wtedy jego jedyną miarę reprezentującą skoncentrowaną na przedziale $[0,1]$ będziemy oznaczać przez τ_u (lub przez $\tau_u^{\mathscr{T}}$ jeśli chcemy wyrazić jasno zależność τ_u od $\mathscr{T}$).

Następujące twierdzenie jest odpowiednikiem [**23**, Theorem 6.2.1] dla całkowicie hiperekspansywnych przesunięć ważonych.

TWIERDZENIE 28 ([**23**, Theorem 7.2.1]). *Przypuśćmy, że* $\mathscr{T}$ *jest drzewem skierowanym dla którego istnieje wierzchołek* $\omega \in V$ *taki, że* $\operatorname{card}(\mathsf{Chi}(\omega)) \geqslant 2$ *oraz* $\operatorname{card}(\mathsf{Chi}(v)) = 1$ *dla wszystkich* $v \in V \setminus \{\omega\}$*. Niech* $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ *będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym* $\mathscr{T}$ *z niezerowymi wagami* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$*. Wtedy zachodzą następujące warunki.*

(i) *Jeśli* $\omega = \mathsf{root}$*, wtedy* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest całkowicie hiprekspansywny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg* $\{\|S^n_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\|^2\}_{n=0}^\infty$ *jest całkowicie alternujący dla wszystkich* $v \in \mathsf{Chi}(\omega)$*, oraz*

$$\sum_{v \in \mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \geqslant 1 + \sum_{v \in \mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^1 \frac{1}{s} \, \mathrm{d}\tau_v(s).$$

(ii) *Jeśli* $\mathscr{T}$ *ma korzeń oraz* $\omega \neq \mathsf{root}$*, wtedy* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest całkowicie hiperekspansywny wtedy i tylko wtedy kiedy jeden z następujących dwóch warunków równoważnych zachodzi:*

(ii-a) $S_{\boldsymbol{\lambda}_{\to(\omega)}}$ *jest całkowicie hiperekspansywny,* $\sum_{v \in \mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \geqslant 1 + \sum_{v \in \mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^1 \frac{1}{s} \, \mathrm{d}\tau_v(s)$,

$$|\lambda_{\mathsf{par}^{k-1}(\omega)}|^2 = 1 + \Big|\prod_{j=0}^{k-1} \lambda_{\mathsf{par}^j(\omega)}\Big|^2 \sum_{v \in \mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^1 \frac{1}{s^{k+1}} \mathrm{d}\tau_v(s)$$

dla wszystkich $k \in J_{\kappa-1}$*, oraz*

$$|\lambda_{\mathsf{par}^{\kappa-1}(\omega)}|^2 \geqslant 1 + \Big|\prod_{j=0}^{\kappa-1} \lambda_{\mathsf{par}^j(\omega)}\Big|^2 \sum_{v \in \mathsf{Chi}(\omega)} |\lambda_v|^2 \int_0^1 \frac{1}{s^{\kappa+1}} \mathrm{d}\tau_v(s),$$

gdzie κ *jest jedyną dodatnią liczbą całkowitą taką, że* $\mathsf{par}^\kappa(\omega) = \mathsf{root}$,

(ii-b) *ciągi* $\{\|S^n_{\boldsymbol{\lambda}} e_{\mathsf{root}}\|^2\}_{n=0}^\infty$ *oraz* $\{\|S^n_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\|^2\}_{n=0}^\infty$ *są całkowicie alternujące dla wszystkich* $v \in \mathsf{Chi}(\omega)$.

(iii) *Jeśli* $\mathscr{T}$ *nie ma korzenia, to* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest całkowicie hiperekspansywny wtedy i tylko wtedy, gdy* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest izometrią.*

W [**23**, Section 7.3] podajemy metodę konstruowania wszystkich ograniczonych całkowicie hiperekspansywnych przesunięć ważonych na drzewie skierowanym $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ z niezerowymi wagami. Metoda ta jest opisana w [**23**, Procedure 7.3.6]. Następujący rezultat jest odpowiednikiem [**23**, Proposition 6.3.4] dla całkowicie hiperekspansywnych przesunięć ważonych.

PROPOZYCJA 29. *Niech* $\eta \in \{2, 3, \ldots\} \sqcup \{\infty\}$ *oraz* $\kappa \in \mathbb{Z}_+$*. Jeśli dla wszystkich* $i \in J_\eta$*,* S_i *jest ograniczonym jednostronnym klasycznym przesunięciem ważonym z dodatnimi wagami* $\{\alpha_{i,n}\}_{n=1}^\infty$*, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje system* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ_{\eta,\kappa}}$ *dodatnich skalarów taki, że przesunięcie ważone* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *na drzewie skierowanym* $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ *jest ograniczone i całkowicie hiperekspansywne, oraz*

(27) $$\alpha_{i,n} = \lambda_{i,n+1}, \quad n \in \mathbb{N},\, i \in J_\eta,$$

(ii) *operator* S_i *jest całkowicie hiperekspansywny oraz* $\int_0^1 \frac{1}{s^{\kappa+1}} \mathrm{d}\tau_i(s) < \infty$ *dla wszystkich* $i \in J_\eta$ (τ_i *jest miarą reprezentującą* S_i), S_{i_0} *ma całkowicie hiperekspansywne* $(\kappa+1)$*-wsteczne rozszerzenie dla pewnego* $i_0 \in J_\eta$, *oraz* $\sup_{i \in J_\eta} \|S_i\| < \infty$.

Okazuje się, że bezpośredni odpowiednik [**23**, Proposition 6.1.12] dla całkowicie hiperekspansywnych przesunięć ważonych nie jest prawdziwy (zobacz [**23**, Example 7.5.2]. W rzeczywistości sytuacja teraz jest bardziej skomplikowana co pokazuje następująca propozycja.

PROPOZYCJA 30. [**23**, Proposition 7.5.1] *Niech* $\mathscr{T} = (V, E)$ *będzie poddrzewem drzewa skierowanego* $\hat{\mathscr{T}} = (\hat{V}, \hat{E})$ *takim, że dla pewnego* $w \in V \setminus \mathsf{Root}(\mathscr{T})$, $\mathsf{Chi}_{\mathscr{T}}(w) \neq \mathsf{Chi}_{\hat{\mathscr{T}}}(w)$, $\mathsf{Chi}_{\mathscr{T}}(\mathsf{par}(w)) = \mathsf{Chi}_{\hat{\mathscr{T}}}(\mathsf{par}(w))$, *oraz* $\mathsf{Des}_{\mathscr{T}}(v) = \mathsf{Des}_{\hat{\mathscr{T}}}(v)$ *dla wszystkich* $v \in \mathsf{Chi}_{\mathscr{T}}(w) \cup \big(\mathsf{Chi}_{\mathscr{T}}(\mathsf{par}(w)) \setminus \{w\}\big)$. *Załóżmy, że* $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ *jest całkowicie hiperekspansywnym przesunięciem ważonym na* $\mathscr{T}$ *z niezerowymi wagami* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_u\}_{u \in V^\circ}$. *Jeśli* $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *spełnia jeden z następujących warunków:*

(i) $w \in V \setminus \big(\mathsf{Root}(\mathscr{T}) \cup \mathsf{Chi}(\mathsf{Root}(\mathscr{T}))\big)$,

(ii) $\sum_{v \in \mathsf{Chi}(\mathsf{par}(w))} |\lambda_v|^2 = 1 + \sum_{v \in \mathsf{Chi}(\mathsf{par}(w))} |\lambda_v|^2 \int_0^1 \frac{1}{s} \,\mathrm{d}\tau_v(s)$,

wtedy nie istnieje całkowicie hiperekspansywne przesunięcie ważone $S_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(\hat{V}))$ *na* $\hat{\mathscr{T}}$ *z nieujemnymi wagami* $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \{\hat{\lambda}_u\}_{u \in \hat{V}^\circ}$ *takie, że* $\boldsymbol{\lambda} \subseteq \hat{\boldsymbol{\lambda}}$, *i.e.,* $\lambda_u = \hat{\lambda}_u$ *dla wszystkich* $u \in V^\circ$.

W [**23**, Section 8.1] charakteryzujemy drzewa skierowane dopuszczające przesunięcia ważone z wybranymi własnościami (gęsty obraz, hiponormalność, subnormalność, quasinormalność, normalność, etc.). Ściślej, mówimy, że drzewo skierowana $\mathscr{T}$ *dopuszcza* przesunięcie ważone z własnością $\mathcal{P}$ jeśli istnieje przesunięcie ważone na $\mathscr{T}$ z tą własnością.

Przypomnijmy, że operator $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ nazywamy *p-hiponormalnym*, gdzie p jest dodatnią liczbą całkowitą, jeśli $|A^*|^{2p} \leqslant |A|^{2p}$. Dzięki nierówności Löwnera-Heinza, dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych p, q takich, że $p < q$, jeśli $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ jest q-hiponormalny, to A jest p-hiponormalny (zobacz [**36**] oraz [**10**]). Oczywiście, operatory 1-hiponormalne oraz hiponormalne to są te same operatory.

TWIERDZENIE 31. [**23**, Theorem 8.2.1] *Niech* $S_{\boldsymbol{\lambda}} \in \boldsymbol{B}(\ell^2(V))$ *będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym* $\mathscr{T}$ *z wagami* $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$, *oraz niech* p *będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $S_{\boldsymbol{\lambda}}$ *jest p-hiponormalny,*

(ii) *następujące dwa warunki zachodzą:*

(28) $$\text{dla wszystkich } u \in V, \text{ jeśli } v \in \mathsf{Chi}(u) \text{ oraz } \|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\| = 0, \text{ to } \lambda_v = 0,$$

(29) $$\|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_u\|^{2(p-1)} \sum_{v \in \mathsf{Chi}^+_{\boldsymbol{\lambda}}(u)} \frac{|\lambda_v|^2}{\|S_{\boldsymbol{\lambda}} e_v\|^{2p}} \leqslant 1, \quad u \in V^+_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

W [**23**, Example 8.2.1] pokazujemy jak separować p-hiponormalność przy użyciu przesunięć ważonych na drzewie skierowanym $\mathscr{T}_{2,1}$.

5. A non-hyponormal operator generating Stieltjes moment sequences

Powiemy, że operator S w $\mathcal{H}$ *generuje* ciągi momentów Stieltjesa, jeśli zbiór $\mathcal{D}^\infty(S)$ wszystkich jego C^∞-wektorów jest gęsty w $\mathcal{H}$ oraz $\{\|S^n f\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $f \in \mathcal{D}^\infty(S)$. Charakteryzacja operatorów subnormalnych podana przez Lamberta w [**30**] mówi, że (domknięty) ograniczony operator liniowy jest subnormalny wtedy i tylko wtedy, gdy generuje ciągi momentów Stieltjesa. Jak wykazano w [**3, 4, 34**], wynik ten pozostaje prawdziwy w pewnych klasach operatorów nieograniczonych. Według naszej wiedzy, jedyne znane przykłady operatorów które nie są subnormalne i generują ciągi momentów Stieltjesa pochodzą od operatorów formalnie normalnych (zobacz [**3**, Section 3.2]). Niestetym operatory tak skonstruowane pomimo iż są domykalne nie są domknięte. W [**24**] podaliśmy przykład operatora który nie jest hiponormalny (więc również nie jest subnormalny), a jest domknięty, paranormalny, generuje ciągi momentów Stieltjesa (dodajmy, że jeśli S jest operatorem w przestrzeni Hilberta, który generuje ciągi momentów Stieltjesa, to operator $S|_{\mathcal{D}^\infty(S)}$ jest paranormalny; zobacz [**24**, (4.1.21)]) oraz który ma własność, że $\mathcal{D}^\infty(S)$ jest rdzeniem dla wszystkich potęg S^n operatora S (zobacz [**24**, Example 4.2.1]). Ponieważ przykład ten mocno bazuje na pewnych subtelnych własnościach niezdeterminowanych ciągów momentów Stieltjesa, w [**24**, Sections 2.1 oraz 2.2] zamieszczamy konieczne fakty dotyczące miar N-ekstremalnych, w szczególności miar Kreina oraz Friedrichsa.

Przypomnijmy, że ciąg liczb rzeczywistych $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy *ciągiem momentów Stieltjesa* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na $\mathbb{R}_+$ taka, że (będziemy używać oznaczenia $\int_{\mathbb{R}_+}$ dla $\int_0^{\infty}$)

$$\gamma_n = \int_0^{\infty} x^n \mathrm{d}\mu(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Taką miarę μ będziemy nazywać *miarą S-reprezentującą* dla ciągu momentów Stieltjesa $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ciąg momentów Stieltjesa będziemy nazywać *S-zdeterminowanym* jeśli posiada dokładnie jedną miarę S-reprezentującą; w przeciwnym przypadku taki ciąg nazwiemy *S-niezdeterminowanym.*

Ciąg $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ będziemy nazywać *ciągiem momentów Hamburgera* jeśli istnieje dodatnia miara borelowska μ na $\mathbb{R}$ taka, że

$$\gamma_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{d}\mu(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Taką miarę μ nazwiemy *miarą H-reprezentującą* ciągu momentów Hamburgera $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ciąg momentów Hamburgera nazwiemy *H-zdeterminowanym* jeśli posiada dokładnie jedną miarę H-reprezentującą; w przeciwnym przypadku taki ciąg nazwiemy *H-niezdeterminowanym.*

W następującym wyniku konstruujemy S-niezdeterminowany ciąg momentów Stieltjes z pewnymi specyficznymi własnościami które będą użyte później do skonstruowania operatora generującego ciągi momentów Stieltjesa, który nie jest hiponormalny.

Przykład 32. [**24**, Example 2.3.1] Ustalmy $\kappa \in \mathbb{Z}_+ \sqcup \{\infty\}$. Konstruujemy system dodatnich liczb rzeczywistych $\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^{\infty}$, który ma następujące własności:

(i) $\gamma_0 = 1$,

(ii) istnieje dodatnia miara borelowska ν na $(0, \infty)$ taka, że

$$\gamma_n = \int_0^{\infty} x^n \mathrm{d}\nu(x), \quad n \in \mathbb{Z}, n \geqslant -\kappa,$$

(iii) $\{\gamma_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ jest S-niezdeterminowanym ciągiem momentów Stieltjesa,

(iv) istnieje miara S-reprezentująca ρ ciągu $\{\gamma_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ taka, że

$$\operatorname{supp} \rho \text{ nie ma punktów skupienia w } (0, \infty), \tag{30}$$

$$0 < \int_0^{\infty} \frac{1}{x^n} \mathrm{d}\rho(x) < \infty, \quad n = 1, \ldots, \kappa + 1, \tag{31}$$

oraz

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}\rho(x) > 1. \tag{32}$$

Co więcej, możemy zawsze skonstruować system dodatnich liczb rzeczywistych $\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^{\infty}$ który spełnia warunki od (i) do (iv) oraz który ma własność, że ciąg $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest albo H-zdeterminowany lub S-niezdeterminowany, w zależności od naszych potrzeb.

Potęgi przesunięć ważonych na drzewach skierowanych opisane są w [**24**, Section 3.2]. W konsekwencji zostało wykazane, że jeśli $\mathcal{D}^{\infty}(S_{\boldsymbol\lambda})$ jest gęsta w danej przestrzeni Hilberta, wtedy $\mathcal{D}^{\infty}(S_{\boldsymbol\lambda})$ jest rdzeniem dla wszystkich potęg $S_{\boldsymbol\lambda}^n$ operator $S_{\boldsymbol\lambda}$ (zobacz [**24**, Corollary 3.2.3]).

Następny wynik pokazuje, że przesunięcie ważone $S_{\boldsymbol\lambda}$ na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ generuje ciągi momentów Stieltjesa wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor bazowy e_u, $u \in V$, indukuje ciąg momentów Stieltjesa.

TWIERDZENIE 33. [**24**, Theorem 3.2.4] *Niech $S_{\boldsymbol\lambda}$ będzie przesunięciem ważonym na $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$. Przypuśćmy, że $\mathscr{E}_V \subseteq \mathcal{D}^{\infty}(S_{\boldsymbol\lambda})$ oraz $\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n e_u\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $u \in V$. Wtedy $\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n f\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $f \in \mathcal{D}^{\infty}(S_{\boldsymbol\lambda})$.*

Niech $\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^{\infty}$ będzie systemem dodatnich liczb rzeczywistych takim, że

$$\gamma_0 = 1 \tag{33}$$

$$\gamma_n = \int_0^{\infty} x^n \mathrm{d}\nu(x), \quad n \in \mathbb{Z}, n \geqslant -\kappa, \tag{34}$$

dla pewnej dodatniej miary borelowskiej ν na $\mathbb{R}_+$ (zauważmy, że jeśli $\kappa > 0$, wtedy (34) implikuje, że $\nu(\{0\}) = 0$). Z (34) wynika, że

(35) $\{\gamma_{n-k}\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich liczb całkowitych $k \leqslant \kappa$.

Przypuśćmy, że istnieje miar S-reprezentująca ρ ciągu $\{\gamma_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ taka, że

$$0 < \int_0^\infty \frac{1}{x^n} \mathrm{d}\rho(x) < \infty, \quad n \in J_{\kappa+1}, \tag{36}$$

$$\operatorname{card}(\operatorname{supp}\rho) \geqslant \begin{cases} \eta & \text{jeśli } \eta < \infty, \\ \aleph_0 & \text{jeśli } \eta = \infty. \end{cases} \tag{37}$$

Niech $\{\Omega_i\}_{i=1}^\eta$ będzie ciągiem parami rozłącznych podzbiorów borelowskich zbioru $(0, \infty)$ takim, że

$$\rho(\Omega_i) > 0, \quad i \in J_\eta, \tag{38}$$

$$\bigsqcup_{i \in J_\eta} \Omega_i = (0, \infty). \tag{39}$$

Ponieważ, dzięki (36), 0 nie jest atomem miary ρ, prosto można wydedukować z (37) że taki ciąg $\{\Omega_i\}_{i=1}^\eta$ zawsze istnieje. Korzystając z (38), możemy zdefiniować ciąg $\{\mu_{i,1}\}_{i\in J_\eta}$ probabilistycznych miar borelowskich na $\mathbb{R}_+$ wzorem

$$\mu_{i,1}(\sigma) = \frac{1}{\rho(\Omega_i)} \rho(\Omega_i \cap \sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+),\ i \in J_\eta, \tag{40}$$

oraz rodzinę dodatnich liczb rzeczywisty $\{\lambda_{i,j} \colon i \in J_\eta, j \in \mathbb{N}\}$ wzorem

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\rho(\Omega_i)} & \text{dla } j = 1, \\ \sqrt{\dfrac{\int_0^\infty x^{j-1} \mathrm{d}\mu_{i,1}(x)}{\int_0^\infty x^{j-2} \mathrm{d}\mu_{i,1}(x)}} & \text{dla } j \geqslant 2, \end{cases} \quad i \in J_\eta. \tag{41}$$

Jeśli $\kappa > 0$, wtedy definiujemy ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $\{\lambda_{-k}\}_{k=0}^{\kappa-1}$ wzorem

$$\lambda_{-k} = \sqrt{\frac{\gamma_{-k}}{\gamma_{-(k+1)}}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \leqslant k < \kappa. \tag{42}$$

Niech $S_{\boldsymbol\lambda}$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ (zobacz (25)) z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v \in V_{\eta,\kappa}^\circ}$ zdefiniowanym wzorami (41) oraz (42) (będziemy używać notacji $\lambda_{i,j}$ w miejsce bardziej formalnych wyrażeń $\lambda_{(i,j)}$). Czytelnik powinien być świadomy faktu, że tak skonstruowany operator $S_{\boldsymbol\lambda}$ zależy nie tylko od $\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^\infty$ oraz ρ, ale także od podziału $\{\Omega_i\}_{i=1}^\eta$ zbioru $(0, \infty)$. Możemy teraz podać pewne istotne własności operatora $S_{\boldsymbol\lambda}$.

Twierdzenie 34. *Niech* $\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^\infty$, ρ, $\{\Omega_i\}_{i\in J_\eta}$, $\{\mu_{i,1}\}_{i\in J_\eta}$, $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v \in V_{\eta,\kappa}^\circ}$ *oraz* $S_{\boldsymbol\lambda}$ *będą jak wyżej. Wtedy zachodzą następujące warunki.*

(i) $\mathcal{E}_{V_{\eta,\kappa}} \subseteq \mathcal{D}^\infty(S_{\boldsymbol\lambda})$.
(ii) $\{\|S_{\boldsymbol\lambda}^n f\|^2\}_{n=0}^\infty$ *jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich* $f \in \mathcal{D}^\infty(S_{\boldsymbol\lambda})$.
(iii) $S_{\boldsymbol\lambda}$ *jest operatorem paranormalnym.*
(iv) $\sum_{v\in\mathsf{Chi}(0)} |\lambda_v|^2 \int_0^\infty \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\mu_v(x) \leqslant 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\rho(x) \leqslant 1. \tag{43}$$

(v) $S_{\boldsymbol\lambda}$ *jest hiponormalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{i\in J_\eta} \frac{\lambda_{i,1}^2}{\|S_{\boldsymbol\lambda} e_{i,1}\|^2} \leqslant 1. \tag{44}$$

(vi) *Następująca nierówność zachodzi*

$$\sum_{i\in J_\eta} \frac{\lambda_{i,1}^2}{\|S_{\boldsymbol\lambda} e_{i,1}\|^2} \leqslant \int_0^\infty \frac{1}{x} \mathrm{d}\rho(x). \tag{45}$$

(vii) *W nierówności (45) zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $i \in J_\eta$, istnieje $q_i \in \Omega_i$ takie, że*

$$\rho(\sigma \cap \Omega_i) = \rho(\Omega_i) \cdot \delta_{q_i}(\sigma), \quad \sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+),\ i \in J_\eta. \tag{46}$$

(viii) *Jeśli $\{\gamma_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ jest S-zdeterminowany, to $S_\boldsymbol{\lambda}$ jest subnormalny oraz warunek (43) zachodzi.*

Odnośnie Twierdzenia 33 (vii) warto dodać, że jeśli $\mathrm{card}(\operatorname{supp}\rho) = \aleph_0$, wtedy możemy zawsze znaleźć borelowskie rozbicie $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$ zbioru $(0,\infty)$ spełniające (38) oraz (46) z $\eta = \infty$.

PROPOZYCJA 35. [**24**, Theorem 4.1.2] *Przypuśćmy, że ρ jest skończoną dodatnią miarą borelowską na $\mathbb{R}_+$ taką, że $\mathrm{card}(\operatorname{supp}\rho) = \aleph_0$. Wtedy istnieje borelowskie rozbicie $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$ zbioru $(0,\infty)$ oraz ciąg $\{q_i\}_{i=1}^\infty \subseteq (0,\infty)$ taki, że $\rho(\Omega_i) > 0$, $q_i \in \Omega_i$ oraz $\rho(\sigma \cap \Omega_i) = \rho(\Omega_i) \cdot \delta_{q_i}(\sigma)$ dla wszystkich $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ oraz $i \in \mathbb{N}$.*

Następujący przykład był zapowiedziany w tytule pracy [**24**].

Przykład 36. [**24**, Example 4.2.1] Ustalmy $\kappa \in \mathbb{Z}_+ \sqcup \{\infty\}$. Niech $\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^\infty$, ν oraz ρ będą jak w Przykładzie 32, to znaczy, $\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^\infty$ jest sytemem dodatnich liczb rzeczywistych oraz ν, ρ są dodatnimi miarami borelowskimi na $\mathbb{R}_+$ spełniającymi warunki od (i) do (iv) tego przykładu. Z (iii) oraz (iv) wnioskujemy, że $\mathrm{card}(\operatorname{supp}\rho) = \aleph_0$. Więc trójka $(\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^\infty, \nu, \rho)$ spełnia warunki (33), (34), (36) oraz (37) z $\eta = \infty$. Z Propozycji 35 wynika, że istnieje borelowskie rozbicie $\{\Omega_i\}_{i=1}^\infty$ zbioru $(0,\infty)$ oraz ciąg $\{q_i\}_{i=1}^\infty \subseteq (0,\infty)$ który spełnia (38) oraz (46) z $\eta = \infty$ (dodajmy, że jeśli $\rho = \tilde{\rho}_a$ dla pewnego $a \in (0,\infty)$, gdzie $\tilde{\rho}_a$ jest jak w Przykładzie 32, wtedy możemy prosto rozważyć ciąg $\{q_i\}_{i=1}^\infty := \{a, aq, aq^{-1}, aq^2, aq^{-2}, \ldots\}$). Niech $S_\boldsymbol{\lambda}$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}_{\infty,\kappa}$ z wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V_{\infty,\kappa}^\circ}$ zdefiniowanymi wzorami (40), (41) oraz (42) z $\eta = \infty$. Dzięki (32) oraz warunkom (v), (vi) oraz (vii) Twierdzenia 34, operator $S_\boldsymbol{\lambda}$ nie jest hiponormalny. Warunki (i), (ii) oraz (iii) Twierdzenia 34 implikują, że $S_\boldsymbol{\lambda}$ jest operatorem paranormalnym który generuje ciągi momentów Stieltjesa; ponadto, dzieki [**24**, Corollary 3.2.3], $\mathcal{D}^\infty(S_\boldsymbol{\lambda})$ jest rdzeniem $S_\boldsymbol{\lambda}^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$. Na mocy (32) oraz warunku (iv) Twierdzenia 34, przesunięcie ważone $S_\boldsymbol{\lambda}$ nie spełnia warunku $\sum_{v \in \mathsf{Chi}(0)} |\lambda_v|^2 \int_0^\infty \frac{1}{x}\, \mathrm{d}\mu_v(x) \leqslant 1$. Ponieważ $\mathcal{E}_{V_{\infty,\kappa}} \subseteq \mathcal{D}^\infty(S_\boldsymbol{\lambda})$ oraz $S_\boldsymbol{\lambda}$ nie jest subnormalny, wnioskujemy z [**3**, Theorem 5.1.1] że przesunięcie ważone $S_\boldsymbol{\lambda}$ nie ma konsystentnego systemu miar (w sensie [**3**]). Na koniec, dzięki odpowiedniemu doborowi trójki $(\{\gamma_n\}_{n=-\kappa}^\infty, \nu, \rho)$, możemy zagwarantować, że $\{\|S_\boldsymbol{\lambda}^{n+1} e_0\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest S-niezdeterminowany, podczas gdy $\{\|S_\boldsymbol{\lambda}^n e_0\|^2\}_{n=0}^\infty$ jest albo H-zdeterminowany albo S-niezdeterminowany w zależności od naszych potrzeb (zobacz Przykład 32).

Okazuje się, że Przykład 36 może być również zrealizowany jako operator kompozycji w przestrzeni L^2. Pokażemy, że często przesunięcia ważone na drzewach skierowanych mogą być identyfikowane z operatorami kompozycji w przestrzeni L^2.

LEMAT 37. [**24**, Lemma 4.3.1] *Niech $S_\boldsymbol{\lambda}$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T} = (V, E)$ które nie ma korzenia, z dodatnimi wagami $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_v\}_{v \in V^\circ}$. Przypuśćmy, że $\mathrm{card}(V) = \aleph_0$. Wtedy $S_\boldsymbol{\lambda}$ jest unitarnie równoważny operatorowi kompozycji C na pewnej σ-skończonej przestrzeni Hilberta L^2. Ponadto, jeśli drzewo skierowane $\mathscr{T}$ nie ma liści, to C może być skonstruowany jako operator iniektywny.*

Następujący niespodziewany rezultat wynika bezpośrednio z Przykładu 36 z $\kappa = \infty$ oraz Lematu 37.

TWIERDZENIE 38. [**24**, Theorem 4.3.3] *Istnieje nie hiponormalny operator kompozycji C w przestrzeni L^2 z σ-skończoną miarą który jest iniektywny, paranormalny i który generuje ciągi momentów Stieltjesa. Ponadto, C ma własność, że $\mathcal{D}^\infty(C)$ jest rdzeniem C^n dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$.*

W [**24**, Appendix] pokazujemy, że stwierdzenie niezależności w twierdzeniu Barry Simona które parametryzuje rozszerzenia von Neumanna domkniętych i symetrycznych operatorów z indeksami defektu $(1,1)$ jest nieprawdziwe (zobacz [**24**, Proposition 5.4.1]). To twierdzenie było użyte przez Simona do opisu miar N-ekstremalnych niezdeterminowanego ciągu momentów w [**32**]. Na szczęście, błąd ten nie ma wypływu na główne rezultaty pracy Simona[4] które bazują na formule (4.20) z [**32**].

[4] Może z wyjątkiem Uwagi 2 na stronie 104 w [**32**].

OPIS PUBLIKACJI NIE WCHODZĄCYCH W SKŁAD ROZPRAWY HABILITACYJNEJ

Prace [**13, 14, 15**] są poświęcone studiowaniu operatorów całkowicie hiperekspansywnych. W [**13**] wykazujemy, że większość własności (ograniczonych) operatorów całkowicie hiperekspansywnych pozostaje prawdziwych dla nieograniczonych operatorów 2-hiperekspansywnych oraz wyznaczamy różne części widma takich operatorów. Podajemy także przykłady nieograniczonych domkniętych operatorów 2-hiperekspansywnych (2-izometrycznych) z niezmienniczymi dziedzinami. W [**14**] podajemy nowe charakteryzacje operatorów subnormalnych i całkowicie hiperekspansywnych.

TWIERDZENIE 39. [**14**, Theorem 3.2] *Niech S będzie operatorem na $\mathcal{H}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *S jest subnormalną kontrakcją,*
(2) $\sum_{i,j=0}^{n}\|S^{i+j+1}f\|^2\lambda_i\overline{\lambda_j} \leqslant \sum_{i,j=0}^{n}\|S^{i+j}f\|^2\lambda_i\overline{\lambda_j}$ *dla* $n\geqslant 0, f\in\mathcal{H}, \lambda_0,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$,
(3) *dla wszystkich $f\in\mathcal{H}$ istnieje (jedyna) skończona borelowska miara μ na $[0,1]$ taka, że*

$$\|S^nf\|^2=\|f\|^2-\int_{[0,1]}(1+\cdots+x^{n-1})\mathrm{d}\mu_f(x),\quad n\geqslant 1,$$

(4) $\sum_{i,j=0}^{n}\langle S^{i+j+1}f_j,S^{i+j+1}f_i\rangle \leqslant \sum_{i,j=0}^{n}\langle S^{i+j}f_j,S^{i+j}f_i\rangle$ *dla* $n\geqslant 0, f_0,\ldots,f_n\in\mathcal{H}$.

Ponadto, jeśli (1) *zachodzi, to* $\sum_{i,j=0}^{n}\langle S^{i+j}f_j,S^{i+j}f_i\rangle \geqslant \|B^{1/2}\sum_{i=0}^{n}f_i\|^2$, *gdzie*

$$B=(\mathrm{SOT})\lim_{n\to\infty}S^{*n}S^n.$$

Rozważmy następujące warunki:

$$(\mathrm{IB}_1)\qquad \sum_{i,j=0}^{n}\|T^{i+j+1}f\|^2\lambda_i\overline{\lambda_j}\geqslant\sum_{i,j=0}^{n}\|T^{i+j}f\|^2\lambda_i\overline{\lambda_j}\quad \text{dla } f\in\mathcal{H},\ n\geqslant 0 \text{ oraz } \lambda_0,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C},$$

$$(\mathrm{IB}_2)\qquad \sum_{i,j=0}^{n}\langle T^{i+j+1}f_j,T^{i+j+1}f_i\rangle\geqslant\sum_{i,j=0}^{n}\langle T^{i+j}f_j,T^{i+j}f_i\rangle\quad \text{dla } n\geqslant 0 \text{ oraz } f_0,\ldots,f_n\in\mathcal{H}.$$

Można łatwo sprawdzić, że $\mathrm{IB}_2\Rightarrow\mathrm{IB}_1$. Dla operatora T w $\mathcal{H}$ niech $r(T)$ oznacza promień spektralny operatora T. oraz $r(T,f)$ oznacza $\overline{\lim}_{n\to\infty}\|T^nf\|^{1/n}$, lokalny promień spektralny.

TWIERDZENIE 40. [**14**, Theorem 5.1] *Niech $T\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest całkowicie hiperekspansywny,*
(2) *T spełnia IB_1 oraz $\|T^3f\|^2-\|T^2f\|^2-\|Tf\|^2+\|f\|^2\leqslant 0$ dla $f\in\mathcal{H}$,*
(3) *T spełnia IB_1 oraz ciąg $\{\|T^{n+1}f\|^2-\|T^nf\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ jest ograniczony dla wszystkich $f\in\mathcal{H}$,*
(4) *T spełnia IB_1 oraz $r(T,f)\leqslant 1$ dla wszystkich $f\in\mathcal{H}$,*
(5) *T spełnia IB_1 oraz $r(T)\leqslant 1$,*
(6) *T spełnia IB_1 oraz istnieje $k\geqslant 1$ takie, że T^k jest 2-hiperekspansywny,*
(7) *T spełnia IB_1 oraz dla wszystkich $k\geqslant 1$, T^k jest 2-hiperekspansywny.*

Warunki (1)-(7) *pozostają ciągle równoważne, zamieniając warunek* IB_1 *przez warunek* IB_2.

Oznaczmy przez $L^2(\mu)=L^2(X,\mathscr{A},\mu)$ przestrzeń Hilberta wszystkich zespolonych funkcji na X sumowalnych z kwadratem. Norma i iloczyn skalarny w $L^2(\mu)$ są oznaczane odpowiednio prze $\|\cdot\|$ oraz $\langle\cdot,\text{-}\rangle$. Niech ϕ będzie *$\mathscr{A}$-mierzalną* transformacją X, to znaczy, $\phi^{-1}(\varDelta)\in\mathscr{A}$ dla wszystkich $\varDelta\in\mathscr{A}$. Oznaczmy przez $\mu\circ\phi^{-1}$ dodatnią miarę na $\mathscr{A}$ daną wzorem $\mu\circ\phi^{-1}(\varDelta)=\mu(\phi^{-1}(\varDelta))$ dla wszystkich $\varDelta\in\mathscr{A}$. Powiemy, że ϕ jest *niesingularna* jeśli $\mu\circ\phi^{-1}$ jest absolutnie ciągła względem μ. Można łatwo wykazać, że jeśli ϕ jest niesingularna, to odwzorowanie $C_\phi\colon L^2(\mu)\supseteq\mathscr{D}(C_\phi)\to L^2(\mu)$ dane wzorem

$$\mathscr{D}(C_\phi)=\{f\in L^2(\mu)\colon f\circ\phi\in L^2(\mu)\}\ \text{oraz}\ C_\phi f=f\circ\phi\ \text{dla}\ f\in\mathscr{D}(C_\phi),\tag{47}$$

jest dobrze określone i liniowe. Taki operator nazywamy *operatorem kompozycji* indukowanym prze ϕ; transformacja ϕ nazywana jest *symbolem* operatora C_ϕ. Jeśli ϕ jest niesingularna, to dzięki twierdzeniu Radona-Nikodyma istnieje jedyna (z dokładnością do zbiorów miary zero) $\mathscr{A}$-mierzalna funkcja $\mathsf{h}_\phi\colon X\to[0,\infty]$ taka, że

(48)
$$\mu\circ\phi^{-1}(\Delta)=\int_{\Delta}\mathsf{h}_{\phi}\mathrm{d}\mu,\quad \Delta\in\mathscr{A}.$$

W pracy [**15**] rozważamy operatory kompozycji w przestrzeni L^2. Głównym wynikiem tej pracy jest następujący rezultat. Niech $\{\mu_n; n\in\mathbb{N}\}$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Zdefiniujmy miarę μ na σ-algebrze Σ wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ wzorem $\mu(\sigma)=\sum_{n\in\sigma}\mu_n$ dla wszystkich $\sigma\subseteq\mathbb{N}$. Wtedy przez przestrzeń z miarą dyskretną rozumiemy przestrzeń (X,Σ,μ).

TWIERDZENIE 41. [**15**, Theorem 2.7] *Niech (X,Σ,μ) będzie przestrzenią z miarą dyskretną oraz niech C_ϕ będzie operatorem kompozycji w $L^2(\mu)$. Wtedy*

(1) *ciąg $\xi_j=\frac{1}{\sqrt{\mu_j}}\chi_{\{j\}}$, $j\geqslant 0$, jest bazą ortonormalną przestrzeni $L^2(\mu)$,*

(2) *operator C_ϕ jest opisany formułami*

$$\mathscr{D}(C_\phi)=\{f\in L^2(\mu);\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|\langle f,\xi_j\rangle|^2}{\mu_j}\sum_{s:\phi(s)=j}\mu_s<\infty\},$$

$$C_\phi f=\sum_{j=0}^{\infty}\langle f,\xi_j\rangle\sum_{s:\phi(s)=j}\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_j}}\xi_s,\quad f\in\mathscr{D}(C_\phi),$$

$$\|C_\phi f\|^2=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|\langle f,\xi_j\rangle|^2}{\mu_j}\sum_{s:\phi(s)=j}\mu_s,\quad f\in\mathscr{D}(C_\phi).$$

Ponadto, jeśli $\sum_{s:\phi(s)=j}\mu_s<\infty$ dla wszystkich $j\in\mathbb{N}$, to

(3) *$\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}\subset\mathscr{D}(C_\phi)$ oraz liniowe rozpięcie $\{\xi_j\}_{j=0}^{\infty}$ jest rdzeniem operatora C_ϕ,*

(4) *istnieje σ-skończona bezatomowa miara borelowska[5] τ na $[0,\infty)$ oraz funkcja borelowska $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ taka, że $\tau\circ\psi^{-1}$ jest absolutnie ciągła względem τ, oraz operator kompozycji C_ψ działający w przestrzeni $L^2([0,\infty),\mathfrak{B}([0,\infty)),\tau)$ jest unitarnie równoważny sumie ortogonalnej $\aleph_0$ kopii operatora C_ϕ.*

Prace [**17, 19, 20, 21**] dotyczą wielowymiarowego operatorowego problemu momentów. Ustalmy liczbę całkowitą $d\geqslant 1$ oraz przyjmijmy $\langle n\rangle=(|n_1|,\dots,|n_d|)$ dla $\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}^d$. Oznaczmy przez Ω_d rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru $\{1,\dots,d\}$. Mając dane $\omega\in\Omega_d$, niech $\widetilde{\omega}=\{1,\dots,d\}\setminus\omega$ oraz

$$\mathbb{Z}^d_\omega=\{\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{Z}^d: n_j\geqslant 0 \text{ dla wszystkich } j\in\omega \text{ oraz } n_j<0 \text{ dla wszystkich } j\in\widetilde{\omega}\}.$$

Mając dany przemienny d-układ $\boldsymbol{S}=(S_1,\dots,S_d)\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})^d$, definiujemy

$$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}_\omega=\prod_{j\in\omega}S_j^{n_j},\quad \omega\in\Omega_d,\ \boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d_+\qquad\Big(\prod_{j\in\varnothing}S_j^{n_j}:=I\Big).$$

Ponieważ $\boldsymbol{S}^*:=(S_1^*,\dots,S_d^*)$ jest przemiennym d-układem, następująca definicja jest poprawna

$$\boldsymbol{S}^{*\boldsymbol{n}}_\omega=(\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}_\omega)^*=(\boldsymbol{S}^*)^{\boldsymbol{n}}_\omega,\quad \omega\in\Omega_d,\ \boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d_+.$$

d-ciąg $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}\subseteq\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ nazywamy *dodatnio określonym*, jeśli jest dodatnio określony (jako funkcja $\boldsymbol{n}$) względem $*$-półgrupy $(\mathbb{Z}^d,+,\boldsymbol{n}^*=-\boldsymbol{n})$, to znaczy

$$\sum_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d}\langle\Phi_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}h_{\boldsymbol{n}},h_{\boldsymbol{m}}\rangle\geqslant 0 \quad\text{dla wszystkich } \{h_{\boldsymbol{m}}\}_{\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^d}\subseteq\mathcal{H} \text{ o skończonym nośniku.}$$

Podamy teraz charakteryzację ograniczonych d-układów subnormalnych.

TWIERDZENIE 42. [**17**, Theorem 3.1] *Jeśli $\boldsymbol{S}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H})^d$ jest przemiennym d-układem, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *$\boldsymbol{S}$ jest subnormalnym d-układem,*

(ii) *istnieje przestrzeń Hilberta $\mathcal{L}\supseteq\mathcal{H}$ oraz przemienny d-układ $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{B}(\mathcal{L})^d$ operatorów unitarnych taki, że*

$$\boldsymbol{S}^{*\boldsymbol{n}}_\omega\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}_{\widetilde{\omega}}=\boldsymbol{S}^{*\boldsymbol{n}}_{\widetilde{\omega}}P_{\mathcal{H}}\boldsymbol{U}^{*\boldsymbol{n}}_{\widetilde{\omega}}\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{n}}_\omega|_{\mathcal{H}}\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}_\omega,\quad \boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^d_+,\ \omega\in\Omega_d,$$

gdzie $P_{\mathcal{H}}$ jest projekcją ortogonalną z $\mathcal{L}$ na $\mathcal{H}$,

[5] Można przyjąć, że τ jest równoważna mierze Lebesguea na $[0,\infty)$.

(iii) *istnieje rodzina* $\{A_{\omega,n} : \omega \in \Omega_d,\ n \in \mathbb{Z}_+^d\} \subseteq B(\mathcal{H})$ *taka, że*

$$S_\omega^{*n} S_{\tilde{\omega}}^n = S_{\tilde{\omega}}^{*n} A_{\omega,n} S_\omega^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+^d,\ \omega \in \Omega_d,$$

oraz d-ciąg $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ *zdefiniowany wzorem*

$$\Phi_n = A_{\omega,\langle n\rangle}, \quad n \in \mathbb{Z}_\omega^d,\ \omega \in \Omega_d,$$

jest dodatnio określony.

Następujący wynik implikuje charakteryzacje subnormalności podane w szczególnych przypadkach przez Trenta [**35**] oraz Găvruţă i Suciu [**11**].

WNIOSEK 43. [**15**, Corollary 3.2] *Jeśli* $S \in B(\mathcal{H})^d$ *jest przemiennym d-układem, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) S *jest subnormalnym d-układem,*

(ii) *istnieje przestrzeń Hilberta* $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{H}$ *oraz przemienny d-układ* $U \in B(\mathcal{L})^d$ *unitarnych operatorów taki, że*

$$S_\sigma^{*n} S_{\tilde{\sigma}}^n = S_{\tilde{\sigma}}^{*n} P_{\mathcal{H}} U_{\tilde{\sigma}}^{*n} U_\sigma^n|_{\mathcal{H}} S_\sigma^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+^d,\ \sigma \in \Sigma_d,$$

gdzie $P_{\mathcal{H}}$ *jest projekcją ortogonalną z* $\mathcal{L}$ *na* $\mathcal{H}$,

(iii) *istnieje rodzina* $\{A_{\sigma,n} : \sigma \in \Sigma_d,\ n \in \mathbb{Z}_+^d\} \subseteq B(\mathcal{H})$ *taka, że*

$$S_\sigma^{*n} S_{\tilde{\sigma}}^n = S_{\tilde{\sigma}}^{*n} A_{\sigma,n} S_\sigma^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+^d,\ \sigma \in \Sigma_d,$$

oraz d-ciąg $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}^d} \subseteq B(\mathcal{H})$ *zdefiniowany wzorem*

$$\Phi_n = \begin{cases} A_{\sigma,\langle n\rangle} & n \in \mathbb{Z}_\sigma^d,\ \sigma \in \Sigma_d, \\ A_{\sigma,\langle n\rangle}^* & n \in \mathbb{Z}_{\tilde{\sigma}}^d,\ \sigma \in \Sigma_d, \end{cases}$$

jest dodatnio określony.

W pracy [**17**] jest rozważany między innymi wektorowy i operatorowy problem momentów. Wektorowy problem momentów polega na stwierdzeniu kiedy dla danego d-ciągu $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^d}$ wektorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, istnieje subnormalny d-układ $S = (S_1, \dots, S_d)$ złożony z ograniczonych operatorów na $\mathcal{H}$ taki, że

$$h_n = S^n h_0, \quad n \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{49}$$

gdzie $\mathbb{Z}_+^d = \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (d-razy) oraz $S^n = S_1^{n_1} \cdots S_d^{n_d}$ dla $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$. Zamieniając $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^d}$ na a d-ciąg $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^d}$ operatorów na $\mathcal{H}$ otrzymujemy definicję operatorowego problemu momentów:

$$A_n = S^n A_0, \quad n \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{50}$$

W pracy [**17**] podajemy rozwiązania powyższego problemu w przypadku operatorów ograniczonych jak i nieograniczonych (zobacz [**17**, Theorems 5.5, 5.6, 6.1, 6.4 oraz 6.6]). W [**17**, Section 8] rozważamy operatorowy problem momentów (50) w przypadku specyficznych klas zmiennych S, to znaczy dla normalnych, samosprzężonych, unitarnych i izometrycznych.

Niech X będzie niepustym zbiorem. Oznaczmy przez $\mathbb{Z}[X]$ addytywną grupę wszystkich funkcji $x : X \to \mathbb{Z}$ ze skończonym nośnikiem $\{\xi \in X : x(\xi) \neq 0\}$ wyposażoną w punktowo zdefiniowaną operację grupową. Zdefiniujmy

$$\mathbb{Z}[X]_+ = \{x \in \mathbb{Z}[X];\ x(\xi) \geqslant 0 \text{ dla wszystkich } \xi \in X\},$$

$$\mathbb{Z}[X]_\pm = \mathbb{Z}[X]_+ \cup (-\mathbb{Z}[X]_+), \quad \mathbb{Z}[X]_\pm^{\complement} = \mathbb{Z}[X] \setminus \mathbb{Z}[X]_\pm.$$

Jeśli Y jest podzbiorem X, wtedy możemy myśleć o $\mathbb{Z}[Y]$ jako o podzbiorze $\mathbb{Z}[X]$. Operatorowy problem momentów rozważany w [**20**] polega na stwierdzeniu, czy dla danej rodziny operatorów $\{A_x\}_{x\in\mathbb{Z}[X]_+} \subset L(\mathcal{D}, \mathcal{H})$, istnieje rodzina $T\{T_\xi\}_{\xi\in X} \subset B(\mathcal{H})$ składająca się z przemiennych kontrakcji posiadających unitarną dylatację i taka, że

$$A_x = T^x A_0, \quad x \in \mathbb{Z}[X]_+. \tag{51}$$

Główny rezultat pracy [**20**] rozwiązuje tak rozumiany problem momentów dla rodziny $\{A_x\}_{x\in\mathbb{Z}[X]_+}$ dowolnej mocy dopuszczających rozwiązanie T posiadające unitarną dylatację.

TWIERDZENIE 44. [**20**, Theorem 8] *Przypuśćmy, że mamy daną rodzinę* $\{A_x\}_{x\in\mathbb{Z}[X]_+} \subset L(\mathcal{D}, \mathcal{H})$. *Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje rodzina* $\boldsymbol{T} = \{T_\xi\}_{\xi \in X} \subset B(\mathcal{H})$ *przemiennych kontrakcji posiadających unitarną dylatację i taka, że zachodzi* (51);

(ii) *dla wszystkich liczb całkowitych* $m, n \geqslant 1$, *dla wszystkich odwzorowań* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}^n[\mathbb{Z}[X]_+]$ *takich, że*

$$\sum_{\substack{x,y \in \mathbb{Z}[X]_+ \\ x-y=u}} \langle \lambda_k(x), \lambda_l(y) \rangle = 0, \quad u \in \mathbb{Z}[X]_\pm^{\complement},\ k,l = 1,\ldots,m, \tag{52}$$

oraz dla wszystkich odwzorowań $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{D}[\mathbb{Z}[X]_+]$, *następująca nierówność zachodzi*

$$\sum_{k,l=1}^{m} \sum_{x,y,s,t \in \mathbb{Z}[X]_+} \langle A_{(x-y)^+ + s} h_k(s), A_{(x-y)^- + t} h_l(t) \rangle \langle \lambda_k(x), \lambda_l(y) \rangle \geqslant 0;$$

(ii′) *dla wszystkich liczb całkowitych* $m, n \geqslant 1$, *dla wszystkich odwzorowań* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}^n[\mathbb{Z}[X]_+]$ *spełniających* (52) *oraz dla wszystkich odwzorowań* $h_1, \ldots, h_m \in \mathcal{D}[\mathbb{Z}[X]_+]$, *zachodzi następująca nierówność*

$$\sum_{k,l=1}^{m} \sum_{\substack{x,y \in \mathbb{Z}[X]_+ \\ x-y \in \mathbb{Z}[X]_\pm}} \sum_{s,t \in \mathbb{Z}[X]_+} \langle A_{(x-y)^+ + s} h_k(s), A_{(x-y)^- + t} h_l(t) \rangle \langle \lambda_k(x), \lambda_l(y) \rangle \geqslant 0;$$

(iii) *dla wszystkich liczb całkowitych* $n \geqslant 1$ *oraz dla wszystkich odwzorowań* $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{D}[\mathbb{Z}[X]_+^2]$ *takich, że*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{x,y \in \mathbb{Z}[X]_+ \\ x-y=u}} \sum_{s,t \in \mathbb{Z}[X]_+} (A_s h_j(x,s)) \otimes (A_t h_j(y,t)) = 0, \quad u \in \mathbb{Z}[X]_\pm^{\complement}, \tag{53}$$

zachodzi następująca nierówność

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{x,y,s,t \in \mathbb{Z}[X]_+} \langle A_{(x-y)^+ + s} h_j(x,s), A_{(x-y)^- + t} h_j(y,t) \rangle \geqslant 0;$$

(iii′) *dla wszystkich liczb całkowitych* $n \geqslant 1$ *oraz dla wszystkich odwzorowań* $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{D}[\mathbb{Z}[X]_+^2]$ *spełniających* (53), *zachodzi następująca nierówność*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{x,y \in \mathbb{Z}[X]_+ \\ x-y \in \mathbb{Z}[X]_\pm}} \sum_{s,t \in \mathbb{Z}[X]_+} \langle A_{(x-y)^+ + s} h_j(x,s), A_{(x-y)^- + t} h_j(y,t) \rangle \geqslant 0.$$

Główny rezultat pracy [**21**] rozwiązuje problem momentów (51) dla rodziny $\{A_x\}_{x \in \mathbb{Z}[X]_+}$ dowolnej mocy dopuszczającej rozwiązanie $\boldsymbol{T}$ posiadające regularną unitarną dylatację.

TWIERDZENIE 45. [**19**, Theorem 4] *Załóżmy, że mamy daną rodzinę* $\{A_m^x\}_{\substack{x \in X \\ m \in \mathbb{Z}[\Omega]_+}} \subset \boldsymbol{L}(\mathcal{D}, \mathcal{H})$. *Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje rodzina* $\boldsymbol{T} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subset B(\mathcal{H})$ *przemiennych kontrakcji posiadająca regularną unitarną dylatację i taka, że zachodzi warunek* (51);

(ii) *dla każdego odwzorowania* $h \in \mathcal{D}[\mathbb{Z}[\Omega]_+ \times \mathbb{Z}[\Omega]_+ \times X]$ *zachodzi następująca nierówność,*

$$\sum_{x,y \in X} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z}[\Omega]_+ \\ s,t \in \mathbb{Z}[\Omega]_+}} \langle A^x_{(m-n)^+ + s} h(m,s,x), A^y_{(m-n)^- + t} h(n,t,y) \rangle \geqslant 0;$$

(iii) *dla wszystkich* $h \in \mathcal{D}[\mathbb{Z}[\Omega]_+ \times X]$ *oraz dla każdego skończonego podzbioru* u *zbioru* Ω *zachodzi następująca nierówność*

$$\sum_{v \subseteq u} (-1)^{|v|} \Big\| \sum_{\substack{x \in X \\ m \in \mathbb{Z}[\Omega]_+}} A^x_{e_v + m} h(m,x) \Big\|^2 \geqslant 0.$$

W pracy [**21**] rozwiązujemy podobny operatorowy problem momentów w klasie operatorów związanych z operatorami całkowicie hiperekspansywnymi (cf. [**21**, Theorem 2]).

Praca [**22**] dotyczy problemu uzupełnień dla całkowicie hiperekspansywnych przesunięć ważonych. Pierwsze podejście do tego problemu pojawiło się w kontekście subnormalności. Przypomnijmy, że subnormalny problem uzupełnień polega na znalezieniu warunków koniecznych i dostatecznych na to aby dany skończony ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $\boldsymbol{\beta}\colon \beta_0,\ldots,\beta_m$ był pierwszymi $m+1$-szymi wagami pewnego subnormalnego przesunięcia ważonego. Całkowicie hiperekspansywny problem uzupełnień polega na znalezieniu warunków koniecznych i dostatecznych na to, aby dany skończony ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $\boldsymbol{\alpha}\colon \alpha_0,\ldots,\alpha_m$ był pierwszymi $m+1$-szymi wagami pewnego całkowicie hiperekspansywnego przesunięcia ważonego.

Ogólne rozwiązanie całkowicie hiperekspansywnego problemu uzupełnień dane w [**22**] jest sformułowane w terminach nieujemności skalarnej macierzy Hankela (zobacz [**22**, Theorems 4.7 oraz 4.8]). W [**22**, Section 5] podajemy bezpośrednie rozwiązanie całkowicie hiperekspansywnego problemu uzupełnień dla $m \leqslant 5$ (zobacz Proposition 5.1 ($m=1$), Proposition 5.2 ($m=2$), Proposition 5.5 ($m=3$), Theorem 5.14 ($m=4$) oraz Theorem 5.21 ($m=5$)). W [**22**, Section 6] pokazujemy, że rezultaty dotyczące całkowicie hiperekspansywnego problemu uzupełnień mogą być użyte do rozwiązania kontrakcyjnego subnormalnego problemu momentów (zobacz [**22**, Proposition 6.2]). W [**22**, Theorem 6.3] formułujemy bezpośrednie rozwiązanie ostatnio wspomnianego problemu dla pięciu wag. To w szczególności pozwala nam zapisać bezpośrednie rozwiązanie subnormalnego problemu momentów dla pięciu wag:

TWIERDZENIE 46. [**22**, Theorem 6.5] *Ciąg $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_n\}_{n=0}^4$ różnych dodatnich liczb rzeczywistych ma subnormalne uzupełnienie wtedy i tylko wtedy, gdy następujące wymagania są spełnione:*

(i) $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2$;

(ii) *zachodzi jeden z dwóch następujących rozłącznych warunków:*

(ii-a) $\eta_1 > 0$ *oraz* $\eta_4 \geqslant 0$,

(ii-b) $\eta_1 = \eta_4 = 0$,

gdzie

$$\begin{cases} \eta_1 = 2\beta_0^2\beta_1^2\beta_2^2 - \beta_0^2\beta_1^4 - \beta_0^2\beta_2^2\beta_3^2 + \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 - \beta_1^2\beta_2^4, \\ \eta_4 = 2\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 - \beta_1^2\beta_2^4 - \beta_1^2\beta_3^2\beta_4^2 + \beta_2^2\beta_3^2\beta_4^2 - \beta_2^2\beta_3^4. \end{cases} \tag{54}$$

Dodajmy także, że rozwiązanie subnormalnego problemu uzupełnień dla pięciu wagpodane w [**31**, strona 45] jest złe (zobacz [**22**, Example 6.10]).

W pracy [**25**] wykazujemy, że w większości przypadków normalne rozszerzenie niezerowego subnormalnego przesunięcia ważonego na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z niezerowymi wagami nie może być modelowane jako przesunięcie ważone na drzewie skierowanym $\hat{\mathscr{T}}$ (nie wymagamy aby $\mathscr{T}$ skierowanym poddrzewem drzewa $\hat{\mathscr{T}}$). Jedynymi wyjątkowymi przypadkami w których drzewo skierowane $\mathscr{T}$ jest izomorficzne albo z $\mathbb{Z}$ lub z $\mathbb{Z}_+$ (zobacz [**25**, Theorem 6.2]).

Używając nowe kryterium na subnormalność nieograniczonych operatorów wprowadzone w [**6**], pokazane zostało w [**3**], że subnormalność zostaje zachowana poprzez następującą procedurę słabego typu:

TWIERDZENIE 47. [**3**, Theorem 3.1.1] *Niech $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ będzie rodziną operatorów subnormalnych w zespolonej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oraz niech S będzie gęsto określonym operatorem w $\mathcal{H}$. Załóżmy, że istnieje podzbiór $\mathcal{X}$ zbioru $\mathcal{H}$ taki, że*

(i) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}^\infty(S) \cap \bigcap_{\omega\in\Omega} \mathcal{D}^\infty(S_\omega)$,

(ii) $\mathcal{F} := \text{LIN} \bigcup_{n=0}^\infty S^n(\mathcal{X})$ *jest rdzeniem* S,

(iii) $\langle S^m x, S^n y\rangle = \lim_{\omega\in\Omega} \langle S_\omega^m x, S_\omega^n y\rangle$ *dla wszystkich* $x, y \in \mathcal{X}$ *oraz* $m, n \in \mathbb{Z}_+$.

Wtedy S jest operatorem subnormalnym.

Powyższa procedura pozwala nam wykonać aproksymacyjny proces związany z nieograniczonymi przesunięciami na drzewach skierowanych. W ten sposób otrzymujemy następujący wynik.

TWIERDZENIE 48. [**3**, Theorem 5.1.1] *Niech $S_{\boldsymbol\lambda}$ będzie przesunięciem ważonym na drzewie skierowanym $\mathscr{T}$ z wagami $\boldsymbol\lambda = \{\lambda_v\}_{v\in V^\circ}$ takimi, że $\mathscr{E}_V \subseteq \mathcal{D}^\infty(S_{\boldsymbol\lambda})$. Załóżmy, że istnieje system borelowskich miar probabilistycznych $\{\mu_v\}_{v\in V}$ na $\mathbb{R}_+$ oraz system nieujemnych liczb rzeczywistych $\{\varepsilon_v\}_{v\in V}$ spełniający*

$$\mu_u(\sigma) = \sum_{v\in\mathsf{Chi}(u)} |\lambda_v|^2 \int_\sigma \frac{1}{s}\,\mathrm{d}\mu_v(s) + \varepsilon_u\delta_0(\sigma), \quad \sigma\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+),\ u\in V. \tag{55}$$

Wtedy operator $S_{\boldsymbol\lambda}$ jest subnormalny.

Głównym celem pracy [**4**] jest zastosowanie nowych kryteriów wprowadzonych w [**3**, Theorem 5.1.1] w kontekście bezlistnych drzew skierowanych $\mathscr{T}_{\eta,\kappa}$ z jednym wierzchołkiem rozgałęziającym (zobacz [**4**, Theorems 4.1 oraz 4.3]).

Jak pokazano w [**26**, Theorem 4.2], istnieją hiponormalne przesunięcia ważone na drzewach skierowanych z niezerowymi wagami, których kwadrat posiada trywialną dziedzinę. Co więcej, jak wykazano w [**26**, Theorem 3.1] jedynymi drzewami skierowanymi które dopuszczają gęsto określone przesunięcia ważone z niezerowymi wagami których kwadrat posiada trywialną dziedzinę są te przeliczalne i nieskończone drzewa skierowane, których każdy wierzchołek posiada przeliczalną i nieskończoną ilość dzieci.

Problem kiedy C^∞-wektory operatora kompozycji tworzą gęsty podzbiór wyjściowej przestrzeni L^2 oraz zagadnienia pokrewne rozważane są w [**5**, Sections 4 oraz 6]. W [**5**, Section 3], podajemy pewne niezbędne fakty niezbędne do dalszych rozważań o operatorach kompozycji. Pewne poglądowe przykłady zostały zebrane w [**5**, Section 5]. W [**5**, Section 7], rozważamy problem iniektywności operatorów kompozycji.

Mając daną $\mathscr{A}$-mierzalną funkcję $u\colon X \to \mathbb{C}$, oznaczmy przez M_u operator mnożenia przez u w $L^2(\mu)$ zdefiniowany wzorem

$$\mathscr{D}(M_u) = \{f \in L^2(\mu) \colon u \cdot f \in L^2(\mu)\},$$
$$M_u f = u \cdot f, \quad f \in \mathscr{D}(M_u).$$

Operator M_u jest operatorem normalnym. Rozkład polarny operatora kompozycji C_ϕ może być opisany w następujący sposób.

PROPOZYCJA 49. [**5**, Proposition 8.1] *Przypuśćmy, że operator kompozycji C_ϕ jest gęsto określony oraz $C_\phi = U|C_\phi|$ jest jego rozkładem polarnym. Wtedy*

(i) $|C_\phi| = M_{\mathsf{h}_\phi^{1/2}}$,

(ii) *przestrzeń początkowa operatora U jest równa*

$$\overline{\mathscr{R}(|C_\phi|)} = \{\mathsf{h}_\phi^{1/2} f \colon f \in L^2(\mathsf{h}_\phi \mathrm{d}\mu)\}, \tag{56}$$

(iii) *przestrzeń końcowa operatora U jest dana wzorem*

$$\overline{\mathscr{R}(C_\phi)} = \{f \circ \phi \colon f \in L^2(\mathsf{h}_\phi \mathrm{d}\mu)\}, \tag{57}$$

(iv) *częściowa izometria U dana jest wzorem*

$$Ug = \frac{g \circ \phi}{(\mathsf{h}_\phi \circ \phi)^{1/2}}, \quad g \in L^2(\mu), \tag{58}$$

(v) *sprzężenie U^* operatora U jest dane wzorem*

$$U^* g = \mathsf{h}_\phi^{1/2} \cdot V^{-1} P g, \quad g \in L^2(\mu),$$

gdzie $V\colon L^2(\mathsf{h}_\phi \mathrm{d}\mu) \to \overline{\mathscr{R}(C_\phi)}$ jest unitarnym operatorem zdefiniowanym przez $Vf = f \circ \phi$ dla $f \in L^2(\mathsf{h}_\phi \mathrm{d}\mu)$ oraz P jest projekcją ortogonalną z $L^2(\mu)$ na $\overline{\mathscr{R}(C_\phi)}$.

W [**5**, Sections 9 oraz 10], podajemy charakteryzacje normalnych, quasinormalnych i formalnie normalnych operatorów kompozycji.

Następujące twierdzenie charakteryzuje operatory kompozycji które generują ciągi momentów Stieltjesa.

TWIERDZENIE 50. [**5**, Theorem 11.4] *Jeśli ϕ jest niesingularną transformacją X, wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) *C_ϕ generuje ciągi momentów Stieltjesa,*

(ii) *$\{\mathsf{h}_{\phi^n}(x)\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla μ-p.w. $x \in X$,*

(iii) *$\mathscr{D}(C_\phi^k) = L^2(\mu)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, oraz $\{\mu(\phi^{-n}(\varDelta))\}_{n=0}^\infty$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla wszystkich $\varDelta \in \mathscr{A}$ takich, że $\mu(\phi^{-k}(\varDelta)) < \infty$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}_+$,*

(iv) *$\mathsf{h}_{\phi^n} < \infty$ p.w. $[\mu]$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $L(p) \geqslant 0$ p.w. $[\mu]$ o ile $p(t) \geqslant 0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie $L\colon \mathbb{C}[t] \to \mathcal{M}$ jest liniowym odwzorowaniem zdeterminowanym poprzez*[6]

$$L(t^n) = \mathsf{h}_{\phi^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+;$$

gdzie $\mathbb{C}[t]$ oznacza zbiór wszystkich zespolonych wielomianów jednej zmiennej rzeczywistej t oraz $\mathcal{M}$ jest zbiorem wszystkich $\mathscr{A}$-mierzalnych zespolonych funkcji na X.

Ponadto, jeśli zachodzi (i)*, to $C_\phi^n = C_{\phi^n}$ oraz $\mathcal{D}^\infty(C_\phi)$ jest rdzeniem C_ϕ^n dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}_+$.*

---

[6] Aby uczynić definicję L poprawną modyfikujemy h_{ϕ^n} tak aby $0 \leqslant \mathsf{h}_{\phi^n}(x) < \infty$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{Z}_+$.

Literatura

[1] A. Athavale, On completely hyperexpansive operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 3745-3752.

[2] C. Berg, J. P. R. Christensen, P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, Springer, Berlin, 1984.

[3] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, *Unbounded subnormal weighted shifts on directed trees*, J. Math. Anal. Appl. (2012), doi:10.1016/j.jmaa.2012.04.074.

[4] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Unbounded subnormal weighted shifts on directed trees. II, submitted, arXiv:1202.6550.

[5] P. Budzyński, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, On unbounded composition operators in L^2-spaces, submitted, arXiv:1202.6543.

[6] D. Cichoń, J. Stochel, F. H. Szafraniec, Extending positive definiteness, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), 545-577.

[7] R. E. Curto, Quadratically hyponormal weighted shifts, *Integral Equations Operator Theory* **13** (1990), 49-66.

[8] R. E. Curto, L. A. Fialkow, Recursiveness, positivity, and truncated moment problems, *Houston J. Math.* **17** (1991), 603-635.

[9] R. E. Curto, W. Y. Lee, k-hyponormality of finite rank perturbations of unilateral weighted shifts, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 4719-4737.

[10] T. Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor & Francis, Ltd., London, 2001.

[11] P. Găvruţă and N. Suciu, A characterization of subnormal pair, *Proceedings of 16Sh OT Conference*, THETA 1997, 149-157.

[12] T. Hoover, I. B. Jung, A. Lambert, Moment sequences and backward extensions of subnormal weighted shifts, *J. Austral. Math. Soc.* **73** (2002), 27-36.

[13] Z. J. Jabłoński, J. Stochel, *Unbounded 2-hyperexpansive operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **44** (2001), 613-629.

[14] Z. J. Jabłoński, *Complete hyperexpansivity, subnormality and inverted boundedness conditions*, Integral Equations Operator Theory **44** (2002), 316-336.

[15] Z. J. Jabłoński, *Hyperexpansive composition operators*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **135** (2003), 513-526.

[16] Z. J. Jabłoński, *Hyperexpansive operator valued unilateral weighted shifts*, Glasgow Math. J. **46** (2004), 405-416.

[17] Z. J. Jabłoński, J. Stochel, *Subnormality and operator multidimensional moment problems*, J. London Math. Soc. **71** (2005), 438-466.

[18] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, *Backward Extensions of Hyperexpansive Operators*, Studia Mathematica **173** (2006), 223-257.

[19] Z. J. Jabłoński, *Moment problem with contractive solutions - the regular case*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2811-2819.

[20] Z. J. Jabłoński, J. Stochel, F.H. Szafraniec, *Unitary propagation of operator data*, Proc. Edinb. Math. Soc. **50** (2007), 689-699.

[21] Z. J. Jabłoński *Moment theorem for completely hyperexpansive operators*, Acta Math. Hungar. **120** (2008), 21-28.

[22] Z. J. Jabłoński, I.B. Jung, A. Kwak, J. Stochel, *Hyperexpansive completion problem via alternating sequences; an application to subnormality*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 2497-2526.

[23] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, Weighted shifts on directed trees, *Mem. Amer. Math. Soc.* **216**, no. 1017, (2012), viii+107 pp.

[24] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, A non-hyponormal operator generating Stieltjes moment sequences, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 3946-3980.

[25] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, *Normal extensions escape from the class of weighted shifts on directed trees*, Complex Analysis and Operator Theory, posted on August 12, 2011, DOI: 10.1007/s11785-011-0177-7.

[26] Z. J. Jabłoński, I. B. Jung, J. Stochel, *A hyponormal weighted shift on a directed tree whose square has trivial domain*, submitted, arXiv:1104.5195.

[27] I. B. Jung, A. Lambert, J. Stochel, Backward extensions of subnormal operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132** (2004), 2291-2302.

[28] M. G. Kreĭn, A. A. Nudel′man, *The Markov moment problem and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Čebyšev and A. A. Markov and their further development*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 50, American Mathematical Society, Providence, R.I., **1977**.

[29] A. Lambert, Unitary equivalence and reducibility of invertibly weighted shifts, *Bull. Austral. Math. Soc.* **5** (1971), 157-173.

[30] A. Lambert, Subnormality and weighted shifts, *J. London Math. Soc.* **14** (1976), 476-480.

[31] X. Li, *Moment sequences and their applications*, Dissertation, Virginia Polytechnic Instiute and State University, **1994**.

[32] B. Simon, The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator, *Adv. Math.* **137** (1998), 82-203.

[33] J. Stochel, Decomposition and disintegration of positive definite kernels on convex $*$-semigroups, *Ann. Polon. Math.* **56** (1992), 243-294.

[34] J. Stochel and F. H. Szafraniec, On normal extensions of unbounded operators, II, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **53** (1989), 153-177.

[35] T. T. Trent, New conditions for subnormality, *Pacific J. Math.* **93** (1981), 459-464.

[36] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.

Zenon Jabłoński