Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Macieja Gawrona *Wartości czwórmianów oraz arytmetyczne własności ciągów regularnych*

Rozprawa składa się ze wstępu, spisu oznaczeń i konwencji, z czterech rozdziałów:

1. *Równania o rozdzielonych zmiennych*,
2. *Uogólniony ciąg Sterna*,
3. *Wielomiany Sterna*,
4. *Własności ciągów związanych z ciągiem Prouheta–Thuego–Morse'a*,

i ze spisu literatury. Pierwszy rozdział jest całkowicie odrębny, trzy pozostałe są ze sobą luźno powiązane, wprawdzie wszystkie dotyczą ciągów regularnych (patrz niżej definicję ciągu regularnego), ale nie wszystkich ciągów regularnych, i z tego powodu brakuje mi w tytule rozprawy słowa *pewnych*.

Główne twierdzenie rozdziału 1 (Twierdzenie 1.13(A)) daje kompletny opis wszystkich par (f, g), dla których równanie $f(x) = g(y)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań całkowitych, gdzie f i g są czwórmianami o współczynnikach całkowitych spełniającymi pewne dodatkowe założenia.

Przy pomocy twierdzenia Bilu–Tichy'ego z 2000 r., które już stało się klasyczne, autor sprowadza problem do zagadnienia dekompozycji czwórmianów nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0, które jest rozwiązane w Twierdzeniu 1.9. Dowód tego twierdzenia, zajmujący 8 stron i oparty na 4 lematach, jest, moim zdaniem, najwartościowszą częścią rozprawy. Nie widzę, gdzie w dowodzie wykorzystuje się istotnie założenie algebraicznej domkniętości, i sądzę, że twierdzenie prawdziwe jest bez tego założenia. Przy okazji twierdzenia 1.13(B), którego nie przytaczam, autor prostuje błędne twierdzenie Kreso, związane z tym tematem.

Rozdział 2 poświęcony jest badaniu uogólnionych ciągów Sterna określonych w sposób następujący:

Dla $k \geq 2$ hiper-k-arną reprezentacją liczby naturalnej n nazywamy zapis $n = d_0 + kd_1 + \ldots + k^l d_l$, gdzie $d_i \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Ciągiem k-Sterna nazywamy $\{s_k(x)\}$, gdzie $s_k(0) = 0$ i dla $n \geq 1$, $s_k(n)$ jest liczbą hiper-k-arnych reprezentacji liczby $n - 1$. Dla $k = 2$ otrzymujemy ciąg określony przez Sterna w 1858 r.

Głównym twierdzeniem tego rozdziału jest Twierdzenie 2.6:

Niech $k \geq 2$ liczba naturalna, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wówczas

$$\limsup \frac{s_k(n)}{n^{\log_k \varphi}} = \frac{\varphi^{\log_k(k^2-1)}}{\sqrt{5}}.$$

Szczególny przypadek tego wzoru dla $k = 2$ został opublikowany w 2014 r. przez Coonsa i Tylera.

Rozdział 3 poświęcony jest badaniu wielomianów Sterna zdefiniowanych przez Klavžara, Milutinovića i Petra (2007) jak następuje: $B_0(t) = 0$, $B_1(t) = 1$, $B_{2n}(t) = tB_n(t)$, $B_{2n+1}(t) = B_n(t) + B_{n+1}(t)$. $B_n(1)$ jest oryginalnym ciągiem liczbowym Sterna. Autor dowodzi dwóch przypuszczeń M. Ulasa na temat wielomianów Sterna i bada postawiony przez niego problem dotyczący zwrotnych elementów tego ciągu wielomianów (w rozprawie elementy zwrotne nazywają się *symetryczne*). Autor dowodzi przez pomysłową konstrukcję, że liczba $f(x)$ liczb naturalnych $\leq x$ takich, że $B_n(t)$ jest zwrotne, spełnia dla $x > 1$ nierówność $f(x) > c(\log x)^{3/2}$, gdzie c jest stałą dodatnią, i stawia przypuszczenie, że $f(x) = O((\log x)^k)$ przy pewnym k. Również recenzent zajmował się tym tematem w pracy *Reciprocal Stern polynomials*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 63 (2015), 141–147, której nie ma w spisie literatury zamieszczonym w rozprawie. Jednakże przypuszczenie $f(x) = O((\log x)^k)$, które uważa za prawdopodobne, nie jest w tej pracy nawet sformułowane.

Główna myśl dowodu jednej z hipotez M. Ulasa opiera się na pojęciu ciągów k-automatycznych, co stanowi jeden ze związków rozdziału 3 z rozdziałem 4. Rozdział 4 poświęcony jest badaniu ciągów związanych z ciągiem Prouheta–Thuego–Morse'a, którego n-ty wyraz jest najmniejszą resztą mod 2 sumy cyfr dwójkowych $s_2(n)$ liczby n. Znajduje się tutaj następująca definicja ciągu regularnego, pochodząca od J.-P. Allouche'a (1992): *Niech* (u_k) *będzie ciągiem o wartościach w pewnym pierścieniu* R. *Jeżeli podmoduł pierścienia* $R^{\mathbb{N}}$ *generowany przez zbiór ciągów* $\{u_{k^n a+b}\}$ $(a \in \mathbb{N},\ 0 < b \le k^n)$ *jest skończenie generowany, to ciąg* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest* k*-regularny.*

Rozdział 4 dotyczy ciągów c_n i $t_2(n)$, określonych przez równania:

$$\text{w } \mathbb{F}_2(x): \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_2(n)x^n, \quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad F(G(x)) = x,$$

$$\text{w } \mathbb{C}(x): \qquad F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{s_2(n)} x^n, \quad F_1(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} t_2(n)x^n.$$

Wśród 8 twierdzeń tego rozdziału nie widzę twierdzenia głównego, natomiast twierdzenie 4.6 jest błędne, zamiast $4^m - 1$ powinno w nim być $4^m + 5$. Ten sam błąd rachunkowy występuje również w dowodzie. Prócz tego rozprawa zawiera kilkadziesiąt omyłek, nie tylko drukarskich, których listę podaję poniżej. Te omyłki utrudniają, ale nie uniemożliwiają, czytanie rozprawy. Wnoszę o jej przyjęcie, zaznaczając, że część z jej wyników już jest opublikowana przez autora.

Lista dostrzeżonych omyłek

str.	wiersz	
6	-8	oznaczenie $F \circ G$ stosowane jest na str. 44 do operatorów
	-6	zamiast *różnych* ma być *parami względnie pierwszych*
7	-1	w przytoczonym sensie oznaczenie Ω stosowane jest w informatyce, w teorii liczb, której dotyczy rozprawa, $f = \Omega(g)$ oznacza, że $f \neq o(g)$.
8	9	zamiast *całkowitych* ma być *o ograniczonych mianownikach*
9	6	zamiast *2012* ma być *2011*
12	-7	brak na końcu $\le \deg a + \deg(bc) - 1$
13	-10	brak źródła lematu 1.8
14	12	zamiast *pewnej liczby wymiernej* c ma być *pewnego* $c \in K$
26	2	zamiast *wyrazy* ma być *współczynniki*
27	7	zamiast *wyrazów* ma być *współczynników*
29	2	zamiast kd_l ma być kd_1
31	10	zamiast $=$ ma być $\equiv$
32	-11	zamiast *może się* ma być *możemy*
40	-3	zamiast *nieskończony* ma być *nieskończony rosnący*
42	4	zamiast $B_n(0) = n$ ma być $B_n(0) \equiv n$ zamiast $B_n(-1) \equiv (n+1) \pmod 3 - 1$ ma być $B_n(-1) \equiv n + 1 - 1 \pmod 3$
	$-13/-12$	zamiast $=$ ma być $\equiv$

44	-7 i -2	brak określenia krawędzi i ścieżek automatu. Wiadomo, czym są te pojęcia w przypadku grafu, ale graf został wprowadzony później, na str. 45
45	-1	zamiast $\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ma być $(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$
54	$5/6$	zamiast $t_n \equiv s_2(n) \pmod 2$ ma być $t_n = 2\{s_2(n)/2\}$, gdzie $\{x\}$ jest częścią ułamkową liczby rzeczywistej x
	-4	zamiast *będziem* ma być *będzie*
55	2 i 11	brak określenia *enumeracji* (*Słownik polskich wyrazów technicznych, Dział* 11. *Matematyka*, Warszawa 1936, nie zna takiego pojęcia)
	5–8	brak dowodu podanych tu wzorów rekurencyjnych
56	$-11, -12$	zamiast $=$ ma być $\equiv$, lub $\pmod 2$ jest niepotrzebne
57	1	zamiast 4 ma być 2
60	7	brak warunku $l \in \mathbb{N}$ i uwagi, że l spełniające ten warunek może być dowolne
62	7	brak dowodu, że ciąg $\left(\frac{b_{u_n}}{u_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący
	-8	zamiast $\left(\frac{d_{4n}+1}{4} - n\right) \pmod 2$ ma być $2\left\{\frac{d_{4n}+1}{8} - \frac{n}{2}\right\}$
63	$-16, -12, -5$	zamiast $\not=$ ma być $\not\equiv$
65	-8	brak określenia użytego tu oznaczenia ν_2
	-6	cytowane twierdzenie Weyla [49] zostało wcześniej opublikowane przez Bohla (J. reine angew. Math. 135 (1909), 189–283)
74	[19]	brak: *Corrigendum and Addendum*, Acta Arith. 99 (2001), 409–410

Andrzej Schinzel