dr hab. Mariusz Skałba, prof.UW
Wydział Matematyki
Uniwersytet Warszawski
e-mail: skalba@mimuw.edu.pl

Warszawa, 27.09.2016r.

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgr Macieja Gawrona

Pan mgr Maciej Gawron przedstawił rozprawę doktorską pod tytułem

Wartości czwórmianów oraz arytmetyczne własności ciągów regularnych.

Praca ta składa się z czterech rozdziałów z których pierwszy poświęcony jest równaniom diofantycznym, a pozostałe arytmetyczno-kombinatorycznym własnościom pewnych ciągów.

Głównym wynikiem rozdziału 1 jest interesujące twierdzenie 1.9, które opisuje wszystkie możliwe dekompozycje czwórmianów nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0. Stosując ten wynik oraz klasyczne twierdzenie Siegela i metodę Bilu-Tichy'ego z 2000 roku autor dowodzi (twierdzenie 1.13), że jeśli f, g są dwoma czwórmianami stopni co najmniej 9 to przy bardzo słabych i naturalnych założeniach równanie $f(x) = g(y)$ ma co najwyżej skończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y. Wcześniejsze wyniki tego typu uzyskane przez Kreso i Tichy'ego wymagały restrykcyjnych założeń. Drugi wynik dotyczący skończoności liczby rozwiązań (twierdzenie 1.15) ma jeszcze ogólniejszy charakter.Tym razem f jest wielomianem składającym się z $l+1$ jednomianów, a g trójmianem. Teza o skończoności liczby rozwiązań obwarowana jest jednak pewnymi założeniami dotyczącymi stopni wielomianów f, g i liczby jednomianów w f. Te założenia to: $\deg g > 2l(l-1)$ oraz $\deg f > 2l$. Autor pokazuje na przykładzie, że w ogólności te założenia są konieczne. Wynik ten ulepsza istotnie pewną pracę Kreso, gdzie podano błędny dowód podobnego rezultatu. Przejawiająca się tutaj skrupulatność doktoranta zasługuje na uznanie. Natomiast dowód głównego wyniku tego rozdziału (twierdzenia 1.9) jest zapisany wg. mnie zbyt lakonicznie. Są miejsca, gdzie sprawdzenie, że pewne wyrazy nie skasują się i wynikowa liczba jednomianów będzie większa niż 4, jest po części pozostawione czytelnikowi pracy - w rozprawie doktorskiej objaśnienia wszystkich szczegółów powinny być normą.

W rozdziale 2 pan Gawron zajmuje się uogólnionym ciągiem Sterna.Dla $k \geq 2$ określamy $s_k(n)$ jako liczbę przedstawień liczby naturalnej n w postaci

$$n = d_0 + kd_1 + \ldots + k^l d_l \text{ gdzie } d_i \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Twierdzenie 2.6 podaje wzór asymptotyczny na $s_k(n)$; dokładniej

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{s_k(n)}{n^{\log_k \varphi}} = \frac{\varphi^{\log_k(k^2-1)}}{\sqrt{5}}.$$

gdzie $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ to złota liczba. Jest to bardzo piękny wzór i nawet dla $k = 2$ (klasyczny ciąg Sterna) uzyskanie dokładnej asymptotyki było otwartym problemem przez szereg lat. W roku 2014 autorzy Coons i Tyler opublikowali dowód dla $k = 2$. Dowód przedstawiony przez Gawrona jest całkowicie elementarny ale interesujący.

W rozdziale 3 autor zajmuje się własnościami wielomianów Sterna. Jest to ciąg wielomianów o współczynnikach całkowitych nieujemnych określony prostym wzorem rekurencyjnym rozróżniającym przypadki: n parzyste - n nieparzyste (str. 40). Ciąg ten był badany między innymi przez Schinzla i Ulasa. Najciekawszym wynikiem tego rozdziału jest dowód hipotezy Ulasa, że jedynymi wymiernymi pierwiastkami wielomianów Sterna mogą być liczby: $0, -1, -1/2, -1/3$. Ponadto doktorant udowodnił, że każda z wymienionych liczb jest pierwiastkiem nieskończenie wielu wielomianów Sterna.

W ostatnim rozdziale swojej rozprawy doktorskiej autor zajmuje się ciągami związanymi z klasycznym ciągiem Thuego-Morse'a t_n określonym jako reszta mod 2 z liczby $s_2(n)$ jedynek w zapisie dwójkowym liczby n. Zajmuje się najpierw współczynnikami (c_n) formalnej odwrotności szeregu tworzącego ciąg Thue-Morse'a. Korzystając z twierdzenia Christola dowodzi najpierw, że ciąg (c_n) jest 4-automatyczny. Potem pokazuje, że ciąg charakterystyczny jedynek w tym ciągu jest 2-regularny, a ciąg charakterystyczny zer nie jest k-regularny dla żadnego k. Dowody tych faktów korzystają z teorii ciągów automatycznych. Natomiast mnie najbardziej podoba się twierdzenie 4.18 dotyczące splotu ciągu Thuego-Morse'a ze sobą:

$$t_2(n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^{s_2(i)+s_2(n-i)}.$$

Rzeczone twierdzenie mówi, że każda liczba całkowita $\neq 0$ występuje w ciągu $t_2(n)$ nieskończenie wiele razy. Dowód oparty jest na niedawnej metodzie efektywnego wypisywania liczb wymiernych Calkina i Wilfa. Zadziwiające jest to, że metodę tę dało się tutaj zaadaptować. Ten główny wynik dotyczący ciągu $t_2(n)$ uzupełniają dwa twierdzenia: tw. 4.19 o logarytmicznej wypukłości oraz tw. 4.20 o tym, że trzy kolejne wyrazy tego ciągu nie mogą być tego samego znaku.

Podsumowując: uważam, że wyniki przedstawione przez pana mgr Macieja Gawrona są interesujące i zasługują na uznanie. Przy czym rozdział 1 ma charakter bardziej teorioliczbowy, natomiast pozostałe rozdziały dotyczące ciągów regularnych mają charakter bardziej kombinatoryczny. Metody zastosowane do dowodów twierdzeń mają podstawowy charakter, ale autor posługuje się nimi niezwykle biegle.

Pan mgr Maciej Gawron jest autorem (lub współautorem) prac, które ukazały się w bardzo dobrych czasopismach miedzynarodowych: Discrete Mathematics oraz Publicationes Mathematicae Debrecen a dwie kolejne prace są złożone do publikacji. Ponadto działa aktywnie na niwie popularyzacji matematyki - między innymi jest członkiem Komitetu Okręgowego Olimpiady Matematycznej w Krakowie.

Niniejsza praca pana Gawrona, przedstawiona jako rozprawa doktorska, niewątpliwie spełnia wszystkie kryteria zwyczajowe i formalne przewidziane dla dysertacji doktorskich w polskim prawie. Dlatego wnioskuję z pełnym przekonaniem o dopuszczenie pana mgr Macieja Gawrona do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

dr hab. Mariusz Skałba, prof. UW

Mariusz Skałba