Anna Pelczar-Barwacz

# AUTOREFERAT

Wydział Matematyki i Informatyki

Uniwersytet Jagielloński

IMIĘ I NAZWISKO: Anna Pelczar-Barwacz

DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE:

Stopień magistra matematyki (ukończona specjalność - matematyka teoretyczna), Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński, 1996.

Stopień doktora nauk matematycznych, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński, 2000.

Tytuł rozprawy doktorskiej, napisanej pod kierunkiem dr hab. Edwarda Tutaja, prof. UJ: "O dychotomii Gowersa".

HISTORIA ZATRUDNIENIA:

- październik 2000 - wrzesień 2003: asystent, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński,
- wrzesień 2001 - marzec 2002: postdoctoral fellowship, Equipe d'Analyse Fonctionnelle, Uniwersytet Paris 6,
- od października 2003 do chwili obecnej: adiunkt, Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński.

OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE W ROZUMIENIU ART 16 UST 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI

Cykl publikacji pod tytułem

# O typach minimalności i operatorach ściśle singularnych w przestrzeniach Banacha

składający się z następujących prac (w porządku chronologicznym):


[A1] A. Pelczar, *Subsymmetric sequences and minimal spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 3, 765–771.

[A2] V. Ferenczi, A. Pelczar, C. Rosendal, *On a question of Haskell P. Rosenthal concerning a characterization of $c_0$ and $\ell_p$*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), 396–406.

[A3] A. Manoussakis, A. Pelczar, *Quasiminimality of mixed Tsirelson spaces*, Math. Nachr. 284 (2011), 1924–1947.

[A4] D. Kutzarova, A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *Isomorphisms and strictly singular operators in mixed Tsirelson spaces*, J. Math. Anal. Appl. 388 (2012), 1040–1060.

[A5] A. Pelczar-Barwacz, *Strictly singular operators in asymptotic $\ell_p$ Banach spaces*, w druku, Illinois J. Math. (2013), arXiv:1109.5874.

OMÓWIENIE PRZEDSTAWIONEGO CYKLU PRAC:

# 1 Wprowadzenie

Jednym z ważniejszych problemów dotyczących geometrii przestrzeni Banacha jest pytanie o jej regularność, precyzyjniej: o to, czy każda przestrzeń Banacha zawiera strukturę "regularną" - np. podprzestrzeń z bazą, podprzestrzeń izomorficzną z jedną z klasycznych przestrzeni ciągowych $\ell_p$ lub $c_0$ lub podprzestrzeń z bazą bezwarunkową. Ściśle związane z tymi problemami jest pytanie o strukturę i bogactwo rodziny operatorów ograniczonych na przestrzeni Banacha i jej podprzestrzeniach. O ile odpowiedź na pierwsze z wymienionych wyżej pytań jest - na mocy klasycznego twierdzenia Mazura - pozytywna, to seria konstrukcji zapoczątkowanych przez B.Tsirelsona [65] zapewniła przykłady przestrzeni o strukturze dalekiej od oczekiwanej regularności. Intensywne badania od 1991 roku nad nową klasą "egzotycznych" przestrzeni i metodami ich kostrukcji przynoszą odpowiedzi na długo otwarte pytania dotyczące również tak regularnych przestrzeni, jak przestrzeń Hilberta $\ell_2$.

Jednym z przełomowych kroków była konstrukcja przestrzeni Banacha nie zawierającej bezwarunkowego ciągu bazowego autorstwa W.T.Gowersa i B.Maurey'a [42], wprowadzająca nową - obecnie już klasyczną - technikę. Jak zaobserwował W.Johnson, przestrzeń Gowersa-Maurey'a posiada znacznie silniejszą własność - jest *dziedzicznie nierozkładalna*. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha jest *rozkładalna*, jeśli jest sumą prostą dwóch swoich domkniętych nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni. Przestrzeń Banacha bez rozkładalnych podprzestrzeni nazywamy *dziedzicznie nierozkładalną* (typu HI - *hereditarily indecomposable*). Uzyskanie własności HI "przy okazji" konstrukcji przestrzeni bez ciągu bezwarunkowego zainspirowało słynną dychotomię Gowersa [40], który wykazał, dzięki kapitalnemu wykorzystaniu technik teorii Ramsey'a, że dowolna przestrzeń Banacha zawiera bezwarunkowy ciąg bazowy lub podprzestrzeń typu HI i zainicjował program "luźnej" klasyfikacji przestrzeni Banacha - z dokładnością do przejścia do podprzestrzeni - opisany w pracy [41].

Celem programu Gowersa jest identyfikacja klas nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha, które są

- *dziedziczne*, tzn. jeśli przestrzeń należy do danej klasy, to wszystkie jej domknięte nieskończenie wymiarowe podprzestrzenie również,

- *nieuniknione*, tzn. każda przestrzeń Banacha zawiera nieskończenie wymiarową podprzestrzeń z jednej z tych klas,

- "definiowalne" w języku rodzin operatorów ograniczonych w przestrzeni.

Oczywiście celem jest wskazanie klas nie tylko rozłącznych, ale także definiowanych przez własności możliwie odległe od siebie. Klasy operatorów interesujące z punktu widzenia tak pojętej klasyfikacji to nietrywialne projekcje ograniczone (o jądrze i obrazie wymiaru nieskończonego), izomorfizmy (przy pomocy których definiowane są różne typy minimalności przestrzeni) i ograniczone niezwarte operatory ściśle singularne. Przypomnijmy, że operator jest *ściśle singularny*, jeśli żadna jego restrykcja do nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni nie jest izomorfizmem na obraz.

Program rozwijany jest dwutorowo: z jednej strony rozpoznawane są kolejne klasy, a więc dowodzone odpowiednie dychotomie, z drugiej - konstruowane są przykłady przestrzeni w proponowanych klasach. Najbardziej regularnymi przestrzeniami, o bogatej rodzinie operatorów ograniczonych, są oczywiście przestrzeni ciągowe $\ell_p$ lub $c_0$, scharakteryzowane dzięki twierdzeniu Zippina jako "blokowo jednorodne" przestrzenie. Na drugim końcu listy znajdują się przestrzenie typu HI różnej maści, o bardzo ubogiej rodzinie operatorów ograniczonych. Przypomnijmy, że przestrzeń Gowersa-Maurey'a $X_{GM}$ ma "mało operatorów", tzn. dowolny ograniczony operator na $X_{GM}$ jest postaci $\lambda Id + S$, gdzie $S$ jest ściśle singularny. Własność tę lub jej bliską wersję posiadają wszystkie przestrzenie typu HI [42, 29]. Konstrukcja Gowersa-Maurey'a otwarła drogę do odpowiedzi na pytanie J.Lindenstraussa [50] o istnienie przestrzeni, która ma "bardzo mało operatorów", tzn. na której dowolny operator ograniczony jest zwartą perturbacją wielokrotności identyczności ("scalar-plus-compact problem"). Problem ten został rozwiązany ostatnio przez S.Argyrosa i R.Haydona, którzy skonstruowali przestrzeń typu HI, która ma "bardzo mało operatorów" i jest predualną do $\ell_1$ [14]. Jednakże refleksywna oraz dziedziczna wersja problemu "scalar-plus-compact", w duchu programu Gowersa, pozostaje otwarta, wymagając wprowadzenia nowych narzędzi.

Wyniki z omawianego cyklu prac [A1, A2, A3, A4, A5] dotyczą programu klasyfikacji Gowersa rozwijając techniki umożliwiające zarówno identityfikację nowych klas, jak i badanie przykładów "egzotycznych" przestrzeni pod względem bogactwa rodzin izomorfizmów (w języku typów minimalności) i operatorów ściśle singularnych. Stan badań w tym zakresie omówiony jest poniżej, a w kolejnych rozdziałach przedstawione są bardziej szczegółowo wyniki z omawianego cyklu prac.

Głównym narzędziem przy rozpoznawaniu klas w ramach programu Gowersa jest odpowiednia adaptacja technik teorii Ramseya do sytuacji przestrzeni Banacha, zaproponowana przez W.T.Gowersa w dowodzie jego dychotomii [40], rozszerzona w pracach [41, 54, A1, 63, 30, 3]. Należy zauważyć, że choć dychotomie dotyczą własności dalekich od regularności, teoria ta dostarcza również istotne wyniki o zachowaniu przestrzeni "regularnych"; dychotomia Gowersa wraz z rezultatem R.Komorowskiego i N.Tomczak-Jaegermann [45] pokazała, że $\ell_2$ jest jedyną przestrzenią izomorficzną z dowolną swoją domkniętą podprzestrzenią nieskończenie wymiarową (rozwiązanie "problemu przestrzeni jednorodnej" S.Banacha).

Dychotomia Gowersa [40] przyniosła pierwsze dwie klasy: przestrzenie z bazą bezwarunkową i przestrzenie typu HI, definiowalne w języku nietrywialnych projekcji ograniczonych. Dalsza klasyfikacja w ramach programu Gowersa, rozwijana obecnie intensywnie, dotyczy rodziny izomorfizmów wewnątrz przestrzeni. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha jest *minimalna* jeśli zanurza się izomorficznie w dowolną swoją domkniętą podprzestrzeń nieskończenie wymiarową. Przestrzeń Banacha $X$ nazywamy *quasi-minimalną*, jeśli dowolne jej dwie nieskończenie wymiarowe podprzestrzenie zawierają dalsze izomorficzne nieskończenie wymiarowe podprzestrzenie. Przedmiotem badań w ramach programu Gowersa w zakresie przestrzeni quasi-minimalnych jest identyfikacja typów minimalności, określających, jakie pary podprzestrzeni w całej przestrzeni mogą być izomorficzne. W oczywisty sposób podprzestrzenie, które leżą "blisko" siebie wewnątrz całej przestrzeni, będą izomorficzne, stąd każda przestrzeń typu HI jest quasi-minimalna. Analiza różnych sposobów wyboru par podprzestrzeni "oddalonych" od siebie i izomorficznych prowadzi do wprowadzenia różnych typów minimalności przestrzeni Banacha.

W celu sformułowania następnych własności przypomnijmy standardowe definicje. W przestrzeni Banacha z bazą $(e_i)$ *nośnikiem* dowolnego wektora $x = \sum_i x_i e_i$ nazywamy zbiór $\operatorname{supp} x = \{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$, *zakresem* $x$ - najmniejszy przedział w $\mathbb{N}$ zawierający $\operatorname{supp} x$. Ciąg $(x_n) \subset X$ spełniający $\max\operatorname{supp} x_n < \min\operatorname{supp} x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *ciągiem bloków*, domkniętą podprzestrzeń rozpiętą przez nieskończony ciąg bloków $(x_n)$ nazywamy *podprzestrzenią blokową*. Ciąg bazowy $(x_n)$ *$C$-dominuje* ciąg bazowy $(y_n)$ (odp. jest *$C$-równoważny* ciągowi $(y_n)$), jeśli odwzorowanie $x_n \mapsto y_n$, $n \in \mathbb{N}$, można rozszerzyć na $\overline{\operatorname{lin}}(x_n)$ do operatora ograniczonego $T$ o normie $\|T\| \leq C$ (odp. izomorfizmu $T$ na obraz z $\|T\|, \|T^{-1}\| \leq C$).

W.T.Gowers w kolejnej dychotomii [41] skontrastował - w przestrzeni Banacha z bazą - quasi-minimalność z brakiem izomorfizmów pomiędzy podprzestrzeniami blokowymi o rozłącznych nośnikach. Kolejny krok zrobiony został w pracy [A1], poświęconej relacji pomiędzy istnieniem ciągami subsymetrycznymi w przestrzeni oraz minimalnością przestrzeni. Podejście zaprezentowane w pracy [A1] zostało zastosowane w pracy V.Ferenczi'ego i C.Rosendala [30], którzy przeciwstawili różnym typom minimalności odpowiednie typy "ciasności" przestrzeni, której nie będziemy tutaj definiować explicite. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha $X$ z bazą jest *ciągowo minimalna* [30], jeśli dowolna jej podprzestrzeń blokowa zawiera ciąg bloków $(x_n)$ taki, że każda podprzestrzeń blokowa $X$ zawiera ciąg bloków równoważny pewnemu podciągowi $(x_n)$. Poniżej przypominamy najważniejsze klasy według klasyfikacji Ferenczi'ego-Rosendala w ramach programu Gowersa.

**Twierdzenie 1.** *[30] Niech $X$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Wtedy $X$ zawiera domkniętą nieskończenie wymiarową podprzestrzeń $Y$ z bazą o jednej z następujących własności:*

*(1) $Y$ jest przestrzenią typu HI oraz dowolne dwa ciągi bloków w $Y$ o parami rozłącznych zakresach rozpinają nieporównywalne przestrzenie (tzn. żadna z nich nie zanurza się w drugą),*

*(2) $Y$ jest ciągowo minimalną przestrzenią typu HI,*

*(3) $Y$ ma bazę bezwarunkową oraz dowolne dwa ciągi bloków w $Y$ o parami rozłącznych nośnikach rozpinają nieizomorficzne przestrzenie,*

*(4) $Y$ ma bazę bezwarunkową, jest quasi-minimalna, ale dowolne dwa ciągi bloków w $Y$ o parami rozłącznych zakresach rozpinają nieporównywalne przestrzenie,*

*(5) $Y$ ma bazę bezwarunkową, jest ciągowo minimalna i "ciasna" (w szczególności bez minimalnych podprzestrzeni),*

*(6) $Y$ ma bazę bezwarunkową i jest minimalna.*

W dalszym rozwoju programu Gowersa w ujęciu Ferenczi'ego-Rosendala [30] wykorzystywana jest struktura asymptotyczna przestrzeni Banacha [70, 63], ściśle związana z typami minimalności, cf. [27, 30] oraz lokalna minimalność przestrzeni.

Ponieważ program Gowersa klasyfikuje przestrzenie Banacha z dokładnością do podprzestrzeni, oczywistym obiektem badań są przestrzenie nie zawierające $\ell_p$ lub $c_0$. Jedyne znane przykłady tego typu to mieszane przestrzenie Tsirelsona i przestrzenie budowanych na ich bazie, w szczególności przestrzeni typu HI. Listę przykładów z tej klasy zaczyna przestrzeń Tsirelsona [65, 34], dualna pierwszej znanej przestrzeni nie zawierającej $\ell_p$ lub $c_0$, następnie pojawiła się przestrzeń Tzafriri'ego rozwiązująca hipotezę tzw. "równych typów" [69]. Kolejny przykład to przestrzeń Schlumprechta [61], pierwsza znana dowolnie wykrzywialna przestrzeń, wykorzystana przy dowodzie dowolnej wykrzywialności $\ell_2$ (rozwiązania "distortion problem") w pracy [57]. Konstrukcja Gowersa-Maurey'a [42], bazująca na przestrzeni Schlumprechta, przyniosła nową metodę. S.Argyros i I.Deliyanni zaadaptowali ją w sytuacji przestrzeni $\ell_1$-asymptotycznych [11], a więc przestrzeni o bardzo regularnej lokalnej strukturze inicjując "równoległą" klasę przestrzeni, i, wraz ze współautorami, zaprezentowali systematyczne podejście do teorii konstrukcji przestrzeni łączących w swojej strukturze skrajnie różne własności, cf. [13, 15, 18, 9, P7]. Zostały też skonstruowane przestrzenie $\ell_p$-asymptotyczne, $1 < p < \infty$, typu HI [2, 26]. Niewątpliwie najwyższym osiągnięciem tej teorii obecnie jest wspomniana wcześniej przestrzeń Argyrosa-Haydona, posiadająca "bardzo mało operatorów" [14].

Do tej pory określono typy minimalności tylko poszczególnych przykładów "egzotycznych" przestrzeni. V.Ferenczi i C.Rosendal [31] pokazali, że przestrzeń skonstruowana w pracy [37], rozwiązująca "problem hiperpłaszczyzn" Banacha jest klasy (3), natomiast przestrzeń typu HI z bazą asymptotycznie bezwarunkową z [38] jest klasy (1). Zaskakującym przykładem klasy (2) okazała się pewna wersja oryginalnej przestrzeni Gowersa-Maurey'a, jak pokazali niedawno V.Ferenczi i T.Schlumprecht [32]. Pierwszy znany przykład przestrzeni klasy (4) skonstruowali niedawno S.Argyros, A.Manoussakis i autorka [P9]. Klasa (5) zawiera oryginalną przestrzeń Tsirelsona [25], jak również jej konweksyfikacje; sztandarowymi przykładami klasy (6) są przestrzenie $\ell_p$, $1 \leq p < \infty$, i $c_0$, jak również dualna do przestrzeni Tsirelsona oraz przestrzeń Schlumprechta. Bardziej systematyczne podejście do badania struktury mieszanych przestrzeni Tsirelsona oraz przestrzeni konstruowanych na ich bazie, w tym typów minimalności, zostało przedstawione w pracach [51, 46, A3, A4, A5]. W szczególności wprowadzone w pracach [A4, A5] narzędzia pozwalają na głębsze zrozumienie podobieństw pomiędzy budową przestrzeni typu Gowersa-Maurey'a a typu Argyrosa-Deliyanni oraz pozwalają na pełniejszy opis struktury lokalnej i asymptotycznej ogólnych przestrzeni Banacha, cf. [A5].

Podobieństwa struktur przestrzeni typu Gowersa-Maurey'a oraz Argyrosa-Deliyanni, o których mowa powyżej, opierają się na lokalnej reprezentacji w tych przestrzeniach przestrzeni $\ell_p$ lub (konweksyfikowanej) przestrzeni Tsirelsona [34], przestrzeni o bardzo podobnej strukturze. Przestrzeń Tsirelsona i jej konweksyfikacje cechuje silna wersja ciągowej minimalności, w której każdy znormalizowany ciąg bloków zawiera podciąg (zamiast ciągu bloków) równoważny pewnemu podciągowi bazy. Przestrzenie o tej własności tworzą *Klasę I (Schlumprechta)* [62], badaną w pracy [30, 60]. Pytanie H.Rosenthala, czy silniejsza własność, w której każdy znormalizowany ciąg bloków zawiera podciąg równoważny bazie, charakteryzuje tylko klasyczne przestrzenie $\ell_p$ lub $c_0$, rozważane jest w pracy [A2].

Przestrzenie z Klasy I Schlumprechta, jak przestrzeń Tsirelsona i jej konweksyfikacje (klasa (5)) w szczególności nie dopuszczają ograniczonych niezwartych operatorów ściśle singularnych na podprzestrzeniach, podobnie jak w przypadku $\ell_p$ lub $c_0$ (klasa (6)), i przeciwnie, niż jest to w przypadku przestrzeni Schlumprechta (klasa (6)). Ta obserwacja wskazuje na potrzebę włączenia do programu Gowersa rodziny nietrywialnych operatorów ściśle singularnych w podprzestrzeniach. T.Schlumprecht w pracy [62] zasugerował dychotomię między Klasą I a Klasą II, zawierającą przestrzenie dopuszczające nietrywialny operator ściśle singularny w każdej podprzestrzeni nieskończenie wymiarowej. Dokładniej przestrzeń Banacha z bazą jest w *Klasie II (Schlumprechta)*, jeśli dowolny ciąg bloków posiada dalsze znormalizowane ciągi bloków $(x_n)$ i $(y_n)$ takie, że odwzorowanie $x_n \mapsto y_n$ rozszerza się do ograniczonego operatora ściśle singularnego pomiędzy $\overline{\text{lin}}(x_n)$ i $\overline{\text{lin}}(y_n)$. Ponieważ dziedziczna, podobnie jak refleksywna, wersja problemu "scalar-plus-compact" jest nadal otwarta, warunki gwarantujące istnienie nietrywialnych operatorów ściśle singularnych w przestrzeni są bardzo cenne. Głównym narzędziem konstrukcji takich operatorów jest różnego typu zachowanie "modeli rozciągniętych" [39, 36, 62, 5, 6, 19] lub asymptotyczne zachowanie ciagów bazowych względem kanonicznej bazy $\ell_1$ [62]. Praca [A5], dzięki wykorzystaniu metod rozwiniętych przy badaniu mieszanych przestrzeni Tsirelsona w pracy [A4], przedstawia ogólne warunki istnienia nietrywialnych operatorów ściśle singularnych w języku asymptotycznego zachowania wyższego rzędu ciągów bazowych, o zastosowaniu m.in. w klasie przestrzeni $\ell_p$-asymptotycznych. Ogólne podejście zaprezentowane w pracy [A5] znalazło swoje zastosowanie w konstrukcji nietrywialnych operatorów ściśle singularnych na przestrzeniach HI typu Argyrosa-Deliyanni w pracy [P8].

# 2 Typy silnej minimalności

W tym rozdziale omówione zostaną ogólne wyniki z prac [A1, A2] dotyczące wzmocnionych własności minimalności.

Rozważać tutaj będziemy typy minimalności formułowane w języku równoważności ciągów bloków. Mówimy, że przestrzeń Banacha $X$ z bazą jest *blokowo minimalna*, jeśli dowolny ciąg bloków $X$ zawiera dalszy ciąg bloków równoważny bazie. Przestrzeń Schlumprechta [8] jest przykładem przestrzeni blokowo minimalnej nie zawierającej kopii $\ell_p$ lub $c_0$. Z drugiej strony dowolna blokowo jednorodna przestrzeń Banacha z bazą (w której dowolny znormalizowany ciąg bloków równoważny jest bazie) jest izomorficzna z $\ell_p$, $1 \le p < \infty$, lub $c_0$, na mocy twierdzenia Zippina.

Analogiczne pojęcia sformułowane w języku podciągów, zamiast ciągu bloków, danego ciągu bazowego okazują się równoważne. W tym ujęciu zamiast przestrzeni blokowo jednorodnej rozważamy *ciąg subsymetryczny*, tzn. równoważny wszystkim swoim podciągom. Z twierdzenia Ramsey'a wynika, że jeśli dowolny podciąg ustalonego ciągu bazowego $(e_i)$ zawiera podciąg równoważny $(e_i)$, to $(e_i)$ ma podciąg subsymetryczny. Ponownie kanoniczna baza przestrzeni Schlumprechta [61] jest przykładem ciągu subsymetrycznego, którego domknięte rozpięcie liniowe nie zawiera $\ell_p$ ani $c_0$.

Badanie pośrednich własności między blokową jednorodnością i blokową minimalnością, wiążacych obydwa typy "podbaz" danego ciągu bazowego, tzn. podciągi i ciągi bloków, inspiruje interesujące problemy typu Ramsey'a związane z klasyfikacyjnym programem Gowersa.

Praca [A1] przedstawia następujący rezultat, osiągnięty dzięki istotnemu poszerzeniu techniki zastosowanej w pracy [P3]. Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha $X$ jest *(blokowo) nasycona* przestrzeniami/ciągami bazowymi typu (P), jeśli każda (blokowa) domknięta nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń $X$ zawiera dalszą (blokową) podprzestrzeń/ciąg typu (P).

**Twierdzenie 2.** *[A1, Cor. 3.5] Przestrzeń Banacha nasycona subsymetrycznymi ciągami bazowymi zawiera podprzestrzeń (blokowo) minimalną.*

Przypomnijmy, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa; przykładem przestrzeni minimalnej bez ciągów subsymetrycznych jest przestrzeń dualna to przestrzeni Tsirelsona [24]. Rezultat powyższy pozwolił na pierwsze rozszerzenie klasyfikacji Gowersa w zakresie przestrzeni quasi-minimalnych. Zaprezentowana w pracy technika posłużyła jako baza poszerzenia programu klasyfikacyjnego Gowersa przez V.Ferenczi'ego i C.Rosendala w pracy [30] w języku bogactwa rodziny izomorfizmów w przestrzeni.

Kombinatoryczny dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje następujący lemat "stabilizacyjny", dowodzony za pomocą standardowej metody przekątniowej, cf. [66, 54, P3, 33]. Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z bazą $(e_i)$. Rozważamy liniową przestrzeń $\mathcal{Q}$ rozpiętą przez $(e_i)$ nad $\mathbb{Q}$. Mając dany ciąg bazowy $(e_i)$ przez $bb(e_i)$ (odp. $bb_{\mathbb{Q}}(e_i)$) oznaczamy rodzinę wszystkich nieskończonych znormalizowanych ciągów bloków $(e_i)$ w $X$

(odp. w $\mathcal{Q}$). Mając dane dwa ciągi bloków $Z, W \in bb_{\mathbb{Q}}(e_i)$ piszemy $Z \preceq W$ jeśli poza skończoną liczbą wektorów, $Z$ jest ciągiem bloków $W$.

**Lemat 3** (Lemat stabilizacyjny). *[P3][A1, Lem. 2.1] Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z bazą $(e_i)$. Rozważamy przeliczalny zbiór $A$ i odwzorowanie monotoniczne*

$$\tau : (bb_{\mathbb{Q}}(e_i), \preceq) \to (2^A, \subset).$$

*Wtedy istnieje ciąg $W_0 \in bb_{\mathbb{Q}}(e_i)$ spełniający $\tau(W) = \tau(W_0)$ dla dowolnego ciągu bloków $W \in bb_{\mathbb{Q}}(e_i)$ ciągu $W_0$.*

W dowodzie głównego twierdzenia [A1], dzięki metodzie przekątniowej i odpowiedniej aproksymacji, przechodzimy najpierw do sytuacji, w której możemy zastosować powyższy lemat - do podprzestrzeni blokowej w $\mathcal{Q}$ nasyconej subsymetrycznymi ciągami bloków w $\mathcal{Q}$ z pewną uniwersalną stałą równoważności $C \geq 1$.

Kluczowa część dowodu opiera się na równoczesnej stabilizacji, zapewnionej przez lemat stabilizacyjny, dwóch odwzorowań $\tau, \rho$ zdefiniowanych na $bb_{\mathcal{Q}}(e_i)$ o wartościach w $2^A$, gdzie $A$ jest rodziną par skończonych znormalizowanych ciągów bloków w $\mathcal{Q}$, przy czym $\tau$ jest rosnące, a $\rho$ - malejące względem $\preceq$ i inkluzji. Mówiąc w sposób bardzo uproszczony, para (x, y) skończonych ciągów bloków w $\mathcal{Q}$ należy do $\tau(W)$, dla $W \in \mathcal{Q}$, jeśli może być "dobrze" przedłużona w parę $C$-równoważnych nieskończonych ciągów bloków wewnątrz $W$, natomiast para (x, y) należy do $\rho(W)$ jeśli może być "dobrze" przedłużona w parę $C$-równoważnych nieskończonych ciągów bloków, z tym, że pierwszy z nich jest równy $W$ z dokładnością do skończonej liczby wektorów. Użyta tutaj relacja inkluzji lub równości z dokładnością do skończonej liczby wektorów wymaga bardzo delikatnej definicji "dobrego" przedłużania, wykorzystującej drzewka skończonych ciągów bloków.

Pokazujemy następnie, że każdy subsymetryczny ciąg bloków ciągu $W_0$ stabilizującego obydwa odwzorowania rozpina przestrzeń blokowo minimalną. Dowód tej obserwacji oparty jest na naprzemiennym wykorzystaniu stabilizacji $\tau$ i $\rho$ na $W_0$. Dokładniej mówiąc, mając dany bazowy ciąg subsymetryczny $(x_n)$ bloków $W_0$ oraz dowolną podprzestrzeń blokową $Y$ w rozpięciu liniowym $W_0$ definiujemy indukcyjnie: podciąg $(x_{k_n})$ oraz ciąg bloków $(y_n) \subset Y$ takie, że $((x_{k_1}, \dots, x_{k_{n+1}}), (y_1, \dots, y_n)) \in \tau(W_0)$ oraz $((x_{k_1}, \dots, x_{k_n}), (y_1, \dots, y_n)) \in \rho(W_0)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Praca [A2] poświęcona jest następującemu problemowi postawionemu przez H.P.Rosenthala, dotyczącemu innej pośredniej własności pomiędzy blokową minimalnością i blokową jednorodnością:

**Problem.** *Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą $(e_i)$ o tej własności, że dowolny jej znormalizowany ciąg bloków zawiera podciąg równoważny $(e_i)$. Czy baza $(e_i)$ jest równoważna kanonicznej bazie $\ell_p$ lub $c_0$?*

Bazę spełniającą powyższy warunek nazywamy bazą Rosenthala. Problem Rosenthala jest blisko związany z pytaniem S.A.Argyrosa dotyczącym modeli rozciągniętych: czy jeśli wszystkie modele rozciągnięte w przestrzeni Banacha są równoważne, to są równoważne kanonicznej bazie $c_0$ lub $\ell_p$? Przypomnijmy, że ciąg bazowy $(x_n)$ generuje jako *model rozciągnięty* pewien subsymetryczny ciąg bazowy $(\bar{x}_n)$, jeśli dla dowolnych liczb $(a_i)_{i=1}^k$, $k \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\lim_{n_1 \to \infty} \lim_{n_2 \to \infty} \dots \lim_{n_k \to \infty} \|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\| = \|\sum_{i=1}^{k} a_i \bar{x}_i\| .$$

Na mocy twierdzenia Ramsey'a dowolny znormalizowany ciąg bazowy zawiera podciąg generujący pewien model rozciągnięty [22]

W pracy [A2] przedstawione są częściowe odpowiedzi na pytanie Rosenthala, wykorzystujące twierdzenie Krivine'a przypomniane niżej. Mówimy, że ciąg bloków $(x_n)$ ciągu bazowego $(e_i)$ ma *jednakowy rozkład*, jeśli dla pewnych liczb $a_1, \dots, a_k$ i $m_{1,1} < m_{1,2} < \dots < m_{1,k} < m_{2,1} < m_{2,2} < \dots$ mamy $x_n = a_1 e_{m_{n,1}} + \dots + a_k e_{m_{n,k}}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Będziemy stosować twierdzenie Krivine'a w wersji Lemberga [47]:

**Twierdzenie 4** (Twierdzenie Krivine'a [47]). *Dla dowolnego ciągu bazowego $(e_i)$ znajdziemy liczbę $1 \le p \le \infty$ taką, że dla dowolnych $k \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg bloków $(x_i^k)_i$ o jednakowym rozkładzie oraz następującej własności: dla dowolnych $i_1 < \dots < i_k$ ciąg $(x_{i_1}^k, \dots, x_{i_k}^k)$ jest $(1+\varepsilon)$-równoważny kanonicznej bazie $\ell_p^k$.*

Zbiór liczb $p$ spełniających tezę twierdzenia Krivine'a nazywamy *zbiorem Krivine'a* ciągu $(e_i)$.

Dowodzimy najpierw, że odpowiedź jest pozytywna przy założeniu jednostajnej równoważności we własności Rosenthala.

**Twierdzenie 5.** *[A2, Thm 1] Niech $(e_i)$ będzie znormalizowanym ciągiem bazowym o następującej własności: każdy jego znormalizowany ciąg bloków o jednakowym rozkładzie zawiera podciąg $C$-równoważny $(e_i)$, z pewną uniwersalną stałą $C \ge 1$. Wtedy $(e_i)$ jest równoważny kanonicznej bazie $c_0$ lub $\ell_p$, $1 \le p < \infty$.*

Metoda dowodu zainspirowana jest rezultatami G.Androulakisa, E.Odella, T.Schlumprechta i N.Tomczak-Jaegermann [5] odnośnie pytania S.A.Argyrosa. Rozszerzając technikę otrzymujemy także następującą obserwację.

**Stwierdzenie 6.** *[A2, Prop. 7] Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z bazą Rosenthala $(e_i)$. Jeśli $X^*$ ma również bazę Rosenthala, to $(e_i)$ jest równoważna kanonicznej bazie $c_0$ lub $\ell_p$, $1 \le p < \infty$.*

Kolejny wynik zapewnia pozytywną odpowiedź na pytanie Rosenthala przy założeniu istnienia ciągłej selekcji podciągów równoważnych bazie we własności Rosenthala w nasłabszym układzie topologii. Niech $bb(e_i)_D$ oznacza $bb(e_i)$ z produktową topologią dyskretną, a $bb(e_i)_E$ oznacza $bb(e_i)$ z *topologią Ellentucka-Gowersa* [41], w której bazowe zbiory otwarte są postaci $[x_1, \ldots, x_k, W]$, gdzie $(x_1, \ldots, x_k)$ jest znormalizowanym ciągiem bloków, $k \in \mathbb{N}$, $W \in bb(e_i)$, oraz

$$[x_1, \ldots, x_k, W] = \{(x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots) : x_k < y_1 \text{ i } (y_i) \in bb(e_i) \text{ jest ciągiem bloków } W\}$$

**Stwierdzenie 7.** *[A2, Prop. 8] Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z bazą Rosenthala $(e_i)$. Załóżmy, że istnieje ciągłe odwzorowanie $\phi : bb(e_i)_E \to bb(e_i)_D$ przypisujące dowolnemu ciągowi $Z \in bb(e_i)$ podciąg $Z$ dominujący $(e_i)$. Wtedy $(e_i)$ jest równoważna kanonicznej bazie $c_0$ lub $\ell_p$, $1 \le p < \infty$.*

Jak w poprzednich przypadkach odpowiednia przestrzeń $\ell_p$ lub $c_0$ jest dobrana dzięki twierdzeniu Krivine'a.

Podkreślmy tutaj istotne różnice w zachowaniu własności Rosenthala i blokowej minimalności. Dodatkowe założenia, które użyliśmy wyżej, jak jednostajna równoważność lub ciągłość selekcji ciągów równoważnych we własności Rosenthala, są spełnione automatycznie w sytuacji, gdy rozważamy wybór ciągów bloków zamiast podciągów. Istotnie, dzięki metodzie przekątniowej, dowolna blokowo minimalna przestrzeń Banacha z bazą zawiera ciąg bloków $(x_i)$, który rozpina podprzestrzeń blokowo nasyconą ciągami bloków jednostajnie równoważnymi $(x_i)$. W przypadku blokowej minimalności przestrzeni ciągłość odwzorowania wybierającego ciąg bloków (jednostajnie) równoważnych bazie wynika z twierdzenia Gowersa [41]. Zauważmy ponadto, że znane dotychczas konstrukcje przestrzeni Banacha w oparciu o mieszane przestrzenie Tsirelsona także dopuszczają ciągłość w wyborze ciągów bloków o żądanych własnościach; odpowiednie średnie używane do budowy wektorów o zadanych własnościach na każdym kroku mogą być wybierane z dowolnej podprzestrzeni blokowej. Wyniki prezentowane w pracy [A2] wskazują na to, że zbudowanie nietrywialnej bazy Rosenthala wymaga całkowicie nowego narzędzia, które w szczególności uniemożliwi ciągłość wyboru ciągów równoważnych.

# 3 Przykłady - mieszane przestrzenie Tsirelsona i przestrzenie $\ell_p$-asymptotyczne

W rozdziale tym omawiamy systematyczne podejście z prac [A3, A4, A5] do badania własności podstawowych przestrzeni w klasie przestrzeni nie zawierających $\ell_p$ ani $c_0$, mianowicie mieszanych przestrzeni Tsirelsona i ich modyfikowanych wersji w zakresie ustalania typów minimalności oraz badania istnienia nietrywialnych operatorów ściśle singularnych. Wyniki dotyczące ostatniego problemu, dzięki wprowadzonej metodzie, obejmują również znacznie szerszą klasę przestrzeni $\ell_p$-asymptotycznych, w tym przestrzeni typu HI budowanych na bazie mieszanych przestrzeni Tsirelsona.

## 3.1 Podstawowe definicje

Rodzina $\mathcal{M}$ skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ jest *regularna*, jeśli jest *dziedziczna*, tzn. dla dowolnych $G \subset F$, $F \in \mathcal{M}$ także $G \in \mathcal{M}$, *rozciągnięta*, tzn. dla dowolnych $n_1 < \cdots < n_k$ i $m_1 < \cdots < m_k$ spełniających $n_i \leq m_i$, $i = 1, \ldots, k$, jeśli $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{M}$ to także $(m_1, \ldots, m_k) \in \mathcal{M}$, oraz *zwarta* w topologii produktowej $2^{\mathbb{N}}$.

Niech $\mathcal{M}$ będzie zwartą rodziną skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ z topologią produktową $2^{\mathbb{N}}$. Dla dowolnej liczby porządkowej $\alpha$ kładziemy $\mathcal{M}^{\alpha+1} = \{F \in \mathcal{M} : F\text{-punkt skupienia } \mathcal{M}^{\alpha}\}$ i dla dowolnej liczby porządkowej granicznej $\alpha$ kładziemy $\mathcal{M}^{\alpha} = \bigcap_{\beta<\alpha} \mathcal{M}^{\beta}$. Indeks Cantora-Bendixsona $\mathcal{M}$, oznaczany przez $CB(\mathcal{M})$, definiujemy jako najmniejszą liczbę porządkową $\alpha$, dla której zachodzi $\mathcal{M}^{\alpha} = \emptyset$.

Będziemy pracować z dwoma typami rodzin regularnych: "małymi" rodzinami $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i "dużymi" rodzinami $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$. Niech

$$\mathcal{A}_n = \{F \subset \mathbb{N} : \#F \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

*Rodziny Schreiera* $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, wprowadzone w pracy [1], są definiowane indukcyjnie:

$$\mathcal{S}_0 = \{\{k\} : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{S}_{\alpha+1} = \{F_1 \cup \cdots \cup F_k : \ k \leq F_1 < \cdots < F_k, \ F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{S}_\alpha\}, \quad \alpha < \omega_1 .$$

Jeśli $\alpha < \omega_1$ jest liczbą porządkową graniczną, wybieramy $\alpha_n \nearrow \alpha$ i kładziemy

$$\mathcal{S}_\alpha = \{F : \ F \in \mathcal{S}_{\alpha_n} \text{ oraz } n \leq F \text{ dla pewnej liczby } n \in \mathbb{N}\}$$

Jest dobrze znanym fakt, że rodziny $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ są regularne, $CB(\mathcal{A}_n) = n+1$ oraz $CB(\mathcal{S}_\alpha) = \omega^\alpha + 1$ [1]. Rodziny Schreiera mogą być traktowane jako modelowe rodziny o odpowiednim indeksie Cantora-Bendixsona, dzięki dychotomii [35] oraz własnościom przedstawionym w pracy [59].

Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z bazą. Mając daną rodzinę $\mathcal{M}$ skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ mówimy, że ciąg wektorów $(x_1, \ldots, x_k)$ w $X$ jest *$\mathcal{M}$-dopuszczalny* (odp. *$\mathcal{M}$-dozwolony*), jeśli $(\min \operatorname{supp} x_i)_{i=1}^k \in \mathcal{M}$ oraz $(x_1, \ldots, x_k)$ jest ciągiem bloków (odp. wektorów o skończonych nośnikach parami rozłącznych). Dla $0 < \theta < 1$ *$\theta$-średnią* wektorów $x_1, \ldots, x_k$ nazywamy wektor postaci $\theta(x_1 + \cdots + x_k)$.

**Definicja.** Ustalmy rodziny $(\mathcal{M}_n) = (\mathcal{A}_{k_n})$ lub $(\mathcal{S}_{k_n})$ oraz $(\theta_n) \subset (0,1)$. Niech $K \subset c_{00}$ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym $(\pm e_n^*)$ i zamkniętym ze względu na operację brania $\theta_n$-średniej na $\mathcal{M}_n$-dopuszczalnych ciągach wektorów, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Definiujemy normę na $c_{00}$ wzorem $\|\cdot\| = \sup\{f(\cdot) : f \in K\}$. *Mieszana przestrzeń Tsirelsona* $T[(\mathcal{M}_n, \theta_n)_n]$ to uzupełnienie przestrzeni $(c_{00}, \|\cdot\|)$.

*Modyfikowaną mieszaną przestrzeń Tsirelsona* $T_M[(\mathcal{M}_n, \theta_n)_n]$ definiujemy analogicznie, zastępując ciągi dopuszczalne dozwolonymi.

Kładąc $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}$ i $\theta_n = \theta$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy klasyczną *przestrzeń typu Tsirelsona* $T[\mathcal{M}, \theta]$.

Przestrzenie zdefiniowane powyżej mają bardzo regularne własności: łatwo widać, że kanoniczna baza $(e_n)$ jest 1-bezwarunkowa w przestrzeni $T[(\mathcal{M}_n, \theta_n)_n]$ i jej modyfikowanej wersji. Dowolna przestrzeń $T[(\mathcal{S}_{k_n}, \theta_n)_n]$ jest refleksywna; podobnie $T[(\mathcal{A}_{k_n}, \theta_n)_n]$, o ile $\theta_n > \frac{1}{k_n}$ dla przynajmniej jednej liczby $n \in \mathbb{N}$ [11].

Konstrukcja tutaj opisana pozwala również na budowę klasycznych przestrzeni ciągowych: przestrzeń typu Tsirelsona $T[\mathcal{A}_n, \theta]$ jest izomorficzna z $c_0$ lub $\ell_p$, w zależności od relacji pomiędzy $\theta$ i $n$, , [20, 10]. Klasyczna przestrzeń Tsirelsona w ujęciu [34] to $T[\mathcal{S}_1, \frac{1}{2}]$. Przestrzeń Tzafriri'ego to wariant konstrukcji $T[(\mathcal{A}_n, \frac{c}{\sqrt{n}})_n]$ dla $0 < c < 1$, słynna przestrzeń Schlumprechta, która była bazą do konstrukcji przestrzeni Gowersa-Maurey'a, dana jest formułą $S = [(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\log_2(n+1)})_n]$.

Modyfikowane przestrzenie typu Tsirelsona są izomorficzne ze swoimi niemodyfikowanymi wersjami [25, 52], podczas gdy sytuacja jest całkowicie odmienna w przypadku przestrzeni mieszanych [49].

Proste rozumowanie pozwala na pracę z kanonicznymi postaciami mieszanych przestrzeni Tsirelsona opisanymi w uwadze poniżej.

**Uwaga.** [4, A3] Każda mieszana przestrzeń Tsirelsona definiowana przez rodziny $(\mathcal{A}_n)$ ma kanoniczną postać $T[(\mathcal{A}_n, \frac{c_n}{n^{1/q}})_n]$, dla pewnych $1 < q \leq \infty$ i $(c_n) \subset (0,1]$ o regularnych własnościach (używamy tutaj konwencji $\frac{1}{\infty} = 0$). Natomiast dowolna przestrzeń definiowana przez rodziny Schreiera $(\mathcal{S}_n)$ ma kanoniczną postać $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$, dla pewnych $\theta \in (0,1]$ i $(c_n) \subset (0,1]$ o regularnych własnościach. Obserwacje te są prawdziwe także w sytuacji przestrzeni modyfikowanych.

W przypadku przestrzeni definiowanych przez rodziny Schreiera będziemy również rozważać ich $p$-konweksyfikacje, $1 \leq p < \infty$, oznaczane przez $T^{(p)}[(\mathcal{S}_n, \theta_n)_n]$. Przestrzenie te tworzą klasę "modelowych" przestrzeni $\ell_p$-asymptotycznych.

**Definicja.** Przestrzeń Banacha $X$ z bazą $(e_n)$ jest *$\ell_p^\alpha$-asymptotyczna* (odp. *silnie $\ell_p^\alpha$-asymptotyczna*), dla $1 \leq p \leq \infty$ oraz $\alpha < \omega_1$, jeśli każdy znormalizowany $\mathcal{S}_\alpha$-dopuszczalny (odp. $\mathcal{S}_\alpha$-dozwolony) ciąg $(x_1, \ldots, x_k)$ w $X$ jest $C$-równoważny kanonicznej bazie $\ell_p^k$, dla pewnej uniwersalnej stałej $C \geq 1$, [55, 59]. W przypadku $\alpha = 1$ dla uproszczenia będziemy mówić o przestrzeniach $\ell_p$-asymptotycznych.

## 3.2 Narzędzia

Podstawowymi elementami konstrukcji ciagów bazowych o zadanych własnościach w mieszanych przestrzeniach Tsirelsona oraz przestrzeniach budowanych na ich bazie są różnego typu średnie skończonych ciągów bazowych. Warsztat rozwinięty przy okazji konstrukcji tych średnich okazuje się użyteczny też w sytuacji ogólnych przestrzeni $\ell_p$-asymptotycznych.

Szacowanie normy wektorów w mieszanych przestrzeniach Tsirelsona, ich modyfikowanych wersji oraz przestrzeni zbudowanych na ich bazie wykorzystuje postać funkcjonałów ze zbioru normującego. Dowolny funkcjonał ze zbioru normującego powstaje w wyniku skończonej liczby operacji brania odpowiednich średnich, których historia jest opisana w tzw. analizie drzewkowej funkcjonału. W praktyce szacowanie normy kombinacji liniowej pewnego ciągu wektorów $x_1 < \cdots < x_k$ sprowadza się do umiejętności szacowania $\|E_1 x_i\| + \cdots + \|E_n x_i\|$ dla dowolnego $i = 1, \ldots, k$, gdzie $E_1 x_i, \ldots, E_n x_i$ jest podziałem wektora $x_i$ na ciąg bloków lub wektorów o nośnikach parami rozłącznych. Jest to możliwe, jeśli $(x_i)$ jest ciągiem specjalnych średnich opisanych niżej, o odpowiednio szybko rosnącej długości. Ciągi specjalnych średnich są wykorzystywane zarówno do budowy par ciągów zarówno równoważnych, jak i rozpinających dziedzinę i obraz nietrywialnych operatorów ściśle singularnych.

Zacznijmy od prostszej sytuacji mieszanych przestrzeni Tsirelsona definiowanych przez "małe" rodziny $(\mathcal{A}_n)$. Kluczowym narzędziem jest tutaj następująca obserwacja, zapewniająca istnienie w dowolnej podprzestrzeni blokowej ciągów bazowych o dowolnej długości równoważnych kanonicznej bazie skończenie wymiarowej przestrzeni $\ell_p$, dla stosownego $1 \le p < \infty$.

**Twierdzenie 8.** *[A3, Thm 2.9] Niech $X$ będzie mieszaną przestrzenią Tsirelsona o kanonicznej postaci $T[(\mathcal{A}_n, \frac{c_n}{n^{1/q}})_n]$. Wtedy zbiór Krivine'a dowolnej podprzestrzeni blokowej $X$ zawiera $p$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Następujący oczywisty fakt jest bazą dla wykorzystania powyższego twierdzenia: jeśli $x$ jest $\ell_p$-*średnią*, czyli jest postaci $\|x_1 + \cdots + x_M\|^{-1}(x_1 + \cdots + x_M)$ dla pewnego znormalizowanego ciągu $(x_1, \ldots, x_M)$ $C$-równoważnego bazie kanonicznej $\ell_p^M$, to dla pewnej stałej $D = D(C)$ oraz dowolnych $1 \le j \le M$ zachodzi

$$j^{1/q}D \ge \sup\left\{\sum_i \|E_i x\| : \ (E_i)_{i=1}^j, \ E_1 < \cdots < E_j\right\} \ge j^{1/q}/D\,.$$

W sytuacji mieszanych przestrzeni Tsirelsona definiowanych przez rodziny Schreiera $(\mathcal{S}_n)$, a więc w szczególności przestrzeni $\ell_1$-asymptotycznych, gdzie twierdzenie Krivine'a nie wnosi nowej informacji, potrzebne jest wprowadzenie nowych narzędzi, użytecznych w znacznie ogólniejszej sytuacji.

Dla dowolnej $\ell_p$-asymptotycznej przestrzeni Banacha $X$, dla $1 \le p < \infty$, wprowadzamy najpierw parametry mierzące asymptotyczność $X$ wyższego rzędu: definiujemy dolną stałą asymptotyczną $\theta_n(X) \in (0, 1]$, dla $n \in \mathbb{N}$, jako największą stałą taką, że dla dowolnego $\mathcal{S}_n$-dopuszczalnego ciągu bloków $n \le x_1 < \cdots < x_k \in X$ mamy $\|x_1 + \cdots + x_k\|^p \ge \theta_n(X)(\|x_1\|^p + \cdots + \|x_k\|^p)$ (dla $p = 1$ cf. [59]). W szczególności w przypadku mieszanej przestrzeni Tsirelsona o kanonicznej postaci $T^{(p)}[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ mamy $\theta_n(X) = c_n\theta^n$, $n \in \mathbb{N}$.

W pracy [A5] udowodnione jest następujące twierdzenie, uogólniające wynik z [A4] i znane w szczególnym przypadku mieszanych przestrzeni Tsirelsona o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{S}_n, c_n)_n]$, a więc dla $\theta = 1$ oraz $p = 1$, zatem gdy $T^{(p)}[\mathcal{S}_1, \theta] = \ell_1$ [13].

**Twierdzenie 9.** *[A4, Lem. 2.14][A5, Thm 2.2] Niech $X$ będzie $\ell_p$-asymptotyczną przestrzenią Banacha, $1 \le p < \infty$, z dolnymi stałymi asymptotycznymi $(\theta_n(X))_n$. Niech $\theta = \lim_n(\theta_n(X))^{1/n}$. Wtedy dla każdych $M \in \mathbb{N}$ i $\delta > 0$ istnieje znormalizowany ciąg bloków $(x_i) \subset X$ spełniający dla dowolnego zbioru $G \in \mathcal{S}_M$ i liczb $(a_i)_{i\in G}$ następujące szacowanie*

$$\|\sum_{i\in G} a_i x_i\| \ge \frac{1}{2}(1-\delta)\|\sum_{i\in G} a_i e_{\min \operatorname{supp} x_i}\|_{T^{(p)}[\mathcal{S}_1,\theta]}\,.$$

*Ponadto $(x_i)$ może być tak wybrany, aby $(\operatorname{supp} x_i)_i \subset \mathcal{S}_r$ dla pewnej liczby $r \in \mathbb{N}$.*

Wynik ten warto rozważać w kontekście twierdzenia Krivine'a w wersji Lemberga (Twierdzenie 4). Zastępujemy tutaj klasyczne przestrzenie $\ell_p$ przez $T^{(p)}[\mathcal{S}_1, \theta]$ i zwiększamy dopuszczalność skończonych ciągów bloków jednostajnie "reprezentujących" (dokładniej: dominujących) kanoniczną bazę pewnej przestrzeni $T^{(p)}[\mathcal{S}_1, \theta]$ z poziomu rodziny $\mathcal{A}_n$ na $\mathcal{S}_n$, gwarantując, zamiast jednakowego rozkładu, jednostajną dopuszczalność nośników elementów "reprezentującego" ciągu. Twierdzenie jest prawdziwe w wersji ogólnej dla przestrzeni $\ell_p^\alpha$-asymptotycznych, $\alpha < \omega_1$, i stosownej przestrzeni $T^{(p)}[\mathcal{S}_\alpha, \theta]$, przy użyciu rodzin $(\mathcal{S}_{\alpha n})$ zamiast $(\mathcal{S}_n)$ w definicji stałych asymptotycznych [A5, Rem. 2.5].

W sytuacji mieszanych przestrzeni Tsirelsona $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ można wskazać ciągi bloków o jeszcze bardziej regularnych własnościach. Specjalne iterowane średnie w tym przypadku wykorzystane były już w pracy [4] w dowodzie dowolnej wykrzywialności przestrzeni w przypadku $c_n \to 0$. Badanie innych własności mieszanych przestrzeni Tsirelsona oraz zachowania ich modyfikowanych wersji oparte było do tej pory na lokalnej lub asymptotycznej reprezentacji $\ell_1$ w przestrzeni, wymagającej istotnych założeń o ciągu $(\theta_n)$, zazwyczaj $\theta = 1$, cf. [11, 12, 13, 48, 46]. Ogólny przypadek wymagał w pracy [A3, A4] poszerzenia warsztatu dla opisania struktury lokalnej i asymptotycznej za pomocą przestrzeni innych niż $\ell_1$.

Podstawowe średnie specjalnego typu w przestrzeniach $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ i w ich modyfikowanych wersjach scharakteryzowane są przez następującą własność (odpowiednik własności $\ell_p$-średnich wspomnianej wyżej): *M-specjalna średnia* $x$ o normie 1, gdzie $M \in \mathbb{N}$, spełnia dla dowolnej liczby $0 \leq j \leq M$ warunek

$$\theta^{-j} D \geq \sup\left\{ \sum_i \|E_i x\| : \ (E_i)_i - \mathcal{S}_j - \text{dopuszczalny (odp. } -\text{dozwolony)} \right\} \geq \theta^{-j}/D$$

gdzie $D$ zależy tylko od parametrów $\theta, \theta_1$. Jeśli ciąg $(c_n)$ jest malejący, to dowolna przestrzeń blokowa przestrzeni $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ i $T_M[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ zawiera specjalne średnie o dowolnej długości [A3, Cor. 4.10], [A4, Prop. 2.11].

Specjalne średnie opisane powyżej wystarczają do badania własności mieszanych przestrzeni Tsirelsona [A3], natomiast sytuacja modyfikowana wymaga bardziej delikatnych narzędzi. Wynika to z konieczności szacowania norm podziału wektora na ciąg wektorów o nośnikach parami rozłącznych zamiast na ciąg bloków, jak to jest w sytuacji niemodyfikowanej. Aby pokonać tę trudność wprowadzamy średnie Tsirelsona [A4, Def. 2.15], opisujące lokalną reprezentację przestrzeni Tsirelsona $T[\mathcal{S}_1, \theta]$ w rozważanej przestrzeni (odpowiednik reprezentacji $\ell_p$ w przestrzeniach definiowanych przez rodziny $\mathcal{A}_n$). Istnienie średnich Tsirelsona w dowolnej podprzestrzeni blokowej gwarantowane jest przez dolne szacowanie typu Tsirelsona w Twierdzeniu 9 oraz definicję samej przestrzeni. Dysponując również górnym szacowaniem typu Tsirelsona [A4, Lem. 2.10] normy wykorzystujemy kanoniczną bazę przestrzeni Tsirelsona $T[\mathcal{S}_1, \theta]$ jako pośredni ciąg bazowy w porównaniu odpowiednio dobieranych ciągów bazowych $(x_n)$, $(y_n)$ w modyfikowanej mieszanej przestrzeni Tsirelsona. W zależności od doboru ciągów $(x_n)$ i $(y_n)$, dzięki "przejściu" przez przestrzeń $T[\mathcal{S}_1, \theta]$, dowodzimy równoważności $(x_n)$ i $(y_n)$, lub ścisłej singularności operatora transportującego dowolny $x_n$ w $y_n$ [A4].

Narzędzia opisane wyżej pokazują strukturalne analogie między budową mieszanych przestrzeni Tsirelsona definiowanych przez "małe" rodziny $(\mathcal{A}_n)$ i "duże" rodziny $(\mathcal{S}_n)$.

## 3.3 Mieszane przestrzenie Tsirelsona

Dotychczas znane rezultaty o typach minimalności dotyczą wybranych przykładów lub specjalnych klas mieszanych przestrzeni Tsirelsona. Słynna przestrzeń Schlumprechta $S$ jest blokowo minimalna [8]. Wynik ten jest też prawdziwy dla klasy superrefleksywnych przestrzeni zbudowanych na bazie $S$ w pracy [23] i dla pewnej klasy przestrzeni o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{A}_n, \frac{c_n}{n^{1/q}})_n]$ z $q = \infty$ [51]. Z drugiej strony przestrzeń Tzafriri'ego nie jest minimalna [44]. Związek pomiędzy wersją ciągowej minimalności oraz lokalną i asymptotyczną reprezentacją $\ell_1$ w przestrzeniach $T[(\mathcal{S}_n, \theta_n)_n]$ i ich częściowo modyfikowanych wersjach przy dodatkowych założeniach dotyczących ciągu $(\theta_n)$ był badany w pracy [48, 46], w szczególności dla $\theta = 1$ przestrzenie te są ciągowo minimalne.

Prace [A3, A4] zawierają przedstawione poniżej ogólne wyniki.

**Twierdzenie 10.** *[A3, Thm 3.1, Remark 3.4] Dowolna mieszana przestrzeń Tsirelsona $T[(\mathcal{A}_n, \theta_n)_n]$ jest ciągowo minimalna.*

Dowód opiera się na porównaniu ciągów średnich długich ciągów $\ell_p$-średnich dla odpowiedniego parametru $p$. Więcej informacji o możliwości dychotomii pomiędzy Klasami I i II Schlumprechta w klasie przestrzeni definiowanych przez rodziny $(\mathcal{A}_n)$ zakodowanych jest w zachowaniu ciągu $(c_n)$.

**Twierdzenie 11.** *[A3, Prop. 2.10] [A4, Thm 3.4] Niech $X$ będzie mieszaną przestrzenią Tsirelsona o kanonicznej postaci $T[(\mathcal{A}_n, \frac{c_n}{n^{1/q}})_n]$. Niech $p \in [1, \infty)$ spełnia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wtedy*

1. *jeśli $\inf_n c_n > 0$, to $X$ jest nasycona przestrzeniami $\ell_p$-asymptotycznymi Klasy I Schlumprechta,*

2. *jeśli $c_n \to 0$, to $X$ jest Klasy II Schlumprechta.*

Zauważmy, że przypadek 1. wyżej nie redukuje się do przestrzeni $\ell_p$, ponieważ, przy notacji z twierdzenia, $X$ nie zawiera $\ell_p$, o ile $\sup_n c_n < 1$ [A3, Prop. 2.13]. Analogiczne wyniki można osiągnąć w przestrzeniach definiowanych przez rodziny Schreiera.

**Twierdzenie 12.** *[A3, Thm 4.11, Remark 4.14], [A4, Thm 2.20] Dowolna mieszana przestrzeń Tsirelsona o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ oraz jej modyfikowana wersja, z ciągiem $(c_n)$ malejącym, jest ciągowo minimalna.*

Twierdzenie powyższe uogólnia rezultat z [46] dla $\theta = 1$. Modyfikowane mieszane przestrzenie Tsirelsona definiowane przez rodziny Schreiera jako refleksywne oraz silnie $\ell_1$-asymptotyczne nie zawierają minimalnej podprzestrzeni na podstawie [30]. Zatem twierdzenie powyżej zapewnia dalsze przykłady w klasie (5), które, w odróżnieniu od oryginalnej przestrzeni Tsirelsona, dopuszczają nietrywialne operatory ściśle singularne na mocy następującego wyniku.

**Twierdzenie 13.** *[A5, Cor. 4.4, Lem. 3.5] Dowolna mieszana przestrzeń Tsirelsona o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ oraz jej modyfikowana wersja, z ciągiem $(c_n)$ zbieżnym do zera, dopuszcza ograniczony niezwarty ściśle singularny operator na podprzestrzeni.*

W pracy [A3] przedstawiamy również kryterium dotyczące przestrzeni dualnych.

**Twierdzenie 14.** *[A3, Thm 5.1] Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z bazą ściągającą $(e_i)$. Niech $(x_n) \subset X$ i $(x_n^*) \subset X^*$ będą ciągami bloków spełniającymi następujące warunki:*

1. *$x_n^*(x_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$,*

2. *$(x_n)$ jest równoważny pewnemu podciągowi $(e_{k_n})$ bazy,*

3. *odwzorowanie $P : X \ni x \mapsto \sum_n x_n^*(x)x_n \in \overline{lin}(x_n)$ jest ograniczoną projekcją.*

*Wtedy $(x_n^*)$ jest równoważny podciągowi $(e_{k_n}^*)$.*

**Wniosek 15.** *[A3, Cor. 5.2] Dualna przestrzeń przestrzeni Schlumprechta $S$ jest minimalna. Dualna przestrzeń dowolnej mieszanej przestrzeni Tsirelsona o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ dla $\theta = 1$ jest ciągowo minimalna.*

Jakkolwiek powyższy wynik jest sformułowany dla przestrzeni Schlumprechta, to samo rozumowanie pracuje w przypadku dowolnej przestrzeni o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{A}, \frac{c_n}{n^{1/q}})_n]$ z $q = \infty$. Druga część twierdzenia w kontekście technik dostępnych także w sytuacji modyfikowanych przestrzeni sugeruje przestrzenie $T_M[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ dla $\theta = 1$ jako kandydatów do podklasy klasy (5) w klasyfikacji Ferenczi'ego-Rosendala [30], dokładniej klasy silnie $\ell_\infty$-asymptotycznych ciągowo minimalnych przestrzeni bez podprzestrzeni minimalnych.

## 3.4 Operatory ściśle singularne w przestrzeniach $\ell_p$-asymptotycznych

Jak było to wspomniane wcześniej, dokładny sposób wykorzystania operatorów ściśle singularnych w programie klasyfikacyjnym Gowersa, i związana z tym blisko dziedziczna wersja problemu "scalar-plus-compact", dotycząca operatorów na nieskończenie wymiarowych podprzestrzeniach danej przestrzeni pozostają otwartymi pytaniami. Konstrukcja nietrywialnych ściśle singularnych operatorów w przestrzeni Banacha $X$ jest oparta najczęściej na różnego typu zachowaniach modeli rozciągniętych w $X$ względem kanonicznej bazy $(e_n)$ przestrzeni $\ell_p$: z jednej strony lokalnej reprezentacji $(e_n)$ w $X$ zapewnionej przez twierdzenie Krivine'a (Tw. 4), z drugiej "silnej" dominacji modelu rozciągniętego pewnego ciągu bazowego w $X$ przez $(e_n)$ [5, 6]. T.Schlumprecht wprowadził również relację silnej dominacji pomiędzy modelami rozciągniętymi, pozwalającą na konstrukcję operatora bez użycia "zewnętrznego" ciągu pomocniczego [62], jak również wykorzystał różnego typu zachowanie asymptotyczne wyższego rzędu ciągów bazowych względem kanonicznej bazy $\ell_1$ [62]. W przypadku przestrzeni Schlumprechta oraz wybranych przykładów przestrzeni tyou HI zostały skonstruowane nietrywialne operatory ściśle singularne na całej przestrzeni [7, 36, 19]; ich konstrukcja opiera się na bardzo precyzyjnym doborze parametrów definiujących przestrzeń, który zapewnia kontrolę nad pewnym modelem rozciągliwym przestrzeni dualnej.

W pracy [A5] przedstawione jest ogólne kryterium zapewniające istnienie nietrywialnego operatora ściśle singularnego w przestrzeni Banacha w języku asymptotycznego zachowania wyższego rzędu ciągów bazowych względem pomocniczego ciągu bazowego o pewnych regularnych cechach, którego typowym przykładem jest zarówno kanoniczna baza $\ell_p$, jak i przestrzeni Tsirelsona $T[\mathcal{S}_1, \theta]$ lub jej konweksyfikacji. Ceną za dopuszczenie szerszej rodziny ciągów pomocniczych jest założenie częściowej bezwarunkowości ciągów bazowych w rozważanych przestrzeniach. Zastosowania obejmują mieszane przestrzenie Tsirelsona i ich konweksyfikacje, jak również szeroką klasę $\ell_p$-asymptotycznych przestrzeni, w szczególności przestrzeni typu HI.

Będziemy używać pojęcia częściowej bezwarunkowości [28] i częściowej równoważności ciągów bazowych. Mając daną rodzinę $\mathcal{M}$ skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ mówimy, że ciąg bazowy $(x_i)$ jest *$\mathcal{M}$-bezwarunkowy*, jeśli $\|\sum_{i\in F} a_i e_i\| \leq C\|\sum_i a_i e_i\|$ dla dowolnych $(a_i) \in c_{00}$, $F \in \mathcal{M}$ i pewnej uniwersalnej stałej $C \geq 1$. Mówimy także, że ciągi bazowe $(x_i)$ i $(y_i)$ są $\mathcal{M}$-równoważne, jeśli $(x_i)_{i\in F}$ i $(y_i)_{i\in F}$ są $C$-równoważne dla dowolnego $F \in \mathcal{M}$ i pewnej uniwersalnej stałej $C \geq 1$. W języku wprowadzonym wcześniej ciąg bazowy $(x_i)$ generuje model rozciągnięty $(e_i)$, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ taka, że ciągi $(e_i)_{i>n}$ i $(x_i)_{i>n}$ są $\mathcal{S}_1$-równoważne ze stałą $(1+\varepsilon)$.

W celu kontrukcji nietrywialnego ściśle singularnego operatora w podprzestrzeni wprowadzona jest i badana w pracy [A5] relacja $\alpha$-silnej dominacji pomiędzy ciągami bazowymi, gdzie $\alpha < \omega_1$. Podamy tutaj jej charakteryzację, użyteczną w zastosowaniach.

**Lemat 16.** *[A5, Lem. 3.6] Rozważamy dwa znormalizowane ciągi bazowe $(x_i)$, $(y_i)$, gdzie $(y_i)$ jest bezwarunkowy oraz $\overline{lin}(y_i)$ nie zawiera jednostajnie $c_0^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, z dokładnością do brania podciągów $(x_i)$ i $(y_i)$, $\alpha$-silna dominacja $(x_i)$ przez $(y_i)$ jest równoważna warunkowi*

($\blacktriangle$) *dla pewnych regularnych rodzin $(\mathcal{M}_n)$ skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ spełniających $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $CB(\mathcal{M}_n) \nearrow \omega^\alpha$, zachodzi*

$$\|\sum_i a_i x_i\| \leq \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4^n} \max_{n\leq F\in\mathcal{M}_n} \|\sum_{i\in F} a_i y_i\| \quad \textit{dla dowolnego } (a_i) \in c_{00}\,.$$

Pojęcie to rozszerza pojęcie silnej dominacji użyte w konstrukcji nietrywialnych ściśle singularnych operatorów w pracy [62, 6], wykorzystując m.in. rodziny Schreiera $(\mathcal{S}_\alpha)$ zamiast rodziny $(\mathcal{A}_n)$, co wymaga użycia dodatkowej techniki w prowadzonych rozumowaniach. Typowe przykłady opisuje następna obserwacja.

**Lemat 17.** *[A5, Lem. 3.4, Lem. 3.5]*

1. *Niech $(x_i)$ będzie znormalizowanym $\mathcal{S}_\alpha$-bezwarunkowym ciągiem bazowym, dla granicznej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$. Wtedy $(x_i)$ zawiera podciąg $\mathcal{S}_\alpha$-równoważny kanonicznej bazie $\ell_1$ lub podciąg $\alpha$-silnie dominowany przez kanoniczną bazę $\ell_1$.*

*2. Niech $X = T^{(p)}[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ będzie p-konweksyfikacją mieszanej przestrzeni Tsirelsona z ciągiem $(c_n)$ zbieżnym do zera. Wtedy kanoniczna baza $X$ jest $\omega$-silnie dominowana przez kanoniczną bazę $T^{(p)}[\mathcal{S}_1, \theta]$.*

Następne twierdzenie jest bazą do dalszych zastosowań.

**Twierdzenie 18.** *[A5, Thm 4.2] Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z $\mathcal{S}_\alpha$-bezwarunkową bazą, dla granicznej liczby porządkowej $\alpha < \omega_1$. Niech $E$ będzie przestrzenią Banacha z bazą bezwarunkową $(e_i)$ dominowaną przez wszystkie swoje podciągi, nie zawierająca jednostajnie $c_0^n$, $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że*

*(i) $X$ ma znormalizowany ciąg bloków $(x_i)$ $\alpha$-silnie dominowany przez $(e_i)$,*

*(ii) dla dowolnej liczby porządkowej $\beta < \alpha$ istnieje znormalizowany ciąg bloków $(x_i^\beta)_i$ spełniający $(\operatorname{supp} x_i^\beta)_i \subset \mathcal{S}_{r_\beta}$, dla pewnej liczby $r_\beta \in \mathbb{N}$, taki, że $(x_i^\beta)_{i\in F}$ $C$-dominuje $(e_i)_{i\in F}$ dla dowolnego $F \in \mathcal{S}_\beta$, gdzie $C \geq 1$ jest pewną stałą uniwersalną.*

*Wtedy $X$ dopuszcza ograniczony ściśle singularny niezwarty operator na podprzestrzeni.*

Odpowiednikiem tego twierdzenia w sytuacji rodzin $(\mathcal{A}_n)$ są wyniki [6, Thm 3.8] oraz [5, Thm 5.1], w których do konstrukcji nietrywialnych operatorów niezwartych wykorzystano różne zachowania modeli rozciągniętych względem bazy kanonicznej $\ell_p$. Tutaj wykorzystujemy ciągi bloków o zachowaniu asymptotycznym dowolnie wysokiego rzędu, dopuszczamy szeroką rodzinę pomocniczych ciągów bazowych $(e_i)$ o regularnych własnościach w miejsce kanonicznej bazy $\ell_p$. Dodatkowo pokazujemy również ścisłą singularność konstruowanego operatora. Wynik ten jest także propozycją poszerzenia rezultatu [62, Thm 1.4] (który również dotyczy zachowania asymptotycznego wysokiego rzędu) w kierunku zastąpienia w roli ciągu pomocniczego kanonicznej bazy $\ell_1$ przez inny "regularny" ciąg bazowy. Kosztem jest dodatkowe założenie częściowej bezwarunkowości, w poprzednich przypadkach otrzymywane "automatycznie" [56] lub niepotrzebne dzięki użyciu kanonicznej bazy $\ell_1$ [56, 16].

Dowód na początku wykorzystuje schemat konstrukcji znany w sytuacji rodzin $(\mathcal{A}_n)$, cf. [5]; budujemy ciąg bloków $(y_i)$ z ciągów $(x_i^\beta)$ i dowodzimy $\alpha$-silnej dominacji $(x_i)_{i\in J}$ przez $(y_i)_{i\in J}$ przy użyciu pomocniczego ciągu $(e_i)$. Jednakże, ponieważ nie możemy zagwarantować nawet $\mathcal{S}_\alpha$-bezwarunkowości $(y_i)$, pokazujemy ścisłą singularność operatora transportującego $(y_i)_{i\in J}$ na $(x_i)_{i\in J}$ "ręcznie", wykorzystując $\mathcal{S}_\alpha$-bezwarunkowość bazy w $X$ i jednostajną dopuszczalność nośników każdego ciągu bloków $(x_i^\beta)_i$ w warunku $(ii)$.

Typowe zastosowanie powyższego rezultatu dotyczy przestrzeni $\ell_p$-asymptotycznych. Warunek $(ii)$ w Twierdzeniu 18 dla $\ell_p$-asymptotycznej przestrzeni $X$ oraz przestrzeni $E = T^{(p)}[\mathcal{S}_1, \theta]$, ze stosownie dobraną liczbą $\theta$, jest zapewniony przez Twierdzenie 9. Otrzymujemy następujący wniosek, rozszerzający Twierdzenie 13.

**Wniosek 19.** *[A5, Cor. 4.4] Niech $X$ będzie $\ell_p$-asymptotyczną przestrzenią Banacha, $1 \leq p < \infty$, z dolnymi stałymi asymptotycznymi $(\theta_n(X))_n$ i $\mathcal{S}_\omega$-bezwarunkową bazą.*

*Załóżmy, że $X$ zawiera znormalizowany ciąg bazowy $(x_i)$ $\omega$-silnie dominowany przez kanoniczną bazę $T^{(p)}[\mathcal{S}_1, \theta]$, gdzie $\theta = \lim_n(\theta_n(X))^{1/n}$.*

*Wtedy $X$ dopuszcza ograniczony ściśle singularny niezwarty operator na podprzestrzeni.*

Modelową przestrzenią $X$ dla sytuacji opisanej wyżej jest przestrzeń $T^{(p)}[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ spełniająca $c_n \to 0$. Jednakże, ponieważ warunki $(i)$ i $(ii)$ głównego twierdzenia są niezmiennicze ze względu na $\mathcal{S}_\omega$-równoważność (z dokładnością do brania podciągów), Twierdzenie 18 implikuje następujący wynik.

**Wniosek 20.** *[A5, Cor. 4.5] Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z $\mathcal{S}_\omega$-bezwarunkową bazą $(e_i)$. Załóżmy, że baza $(e_i)$ jest $\mathcal{S}_\omega$-równoważna kanonicznej bazie p-konweksyfikacji mieszanej przestrzeni Tsirelsona $T^{(p)}[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$, $1 \leq p < \infty$, z ciągiem $(c_n)$ zbieżnym do zera.*

*Wtedy $X$ dopuszcza ograniczony ściśle singularny niezwarty operator na podprzestrzeni.*

Zastosowania powyższego wyniku obejmują szeroką klasę przestrzeni Banacha zdefiniowanych na bazie mieszanych przestrzeni Tsirelsona [A5, Cor. 4.7]. Zbiory normujące dla tych przestrzeni dla pewnych par $(\mathcal{S}_n, \theta_n)$ są zamknięte ze względu na operacje brania średnich na wszystkich dopuszczalnych ciągach, dla innych par $(\mathcal{S}_n, \theta_n)$ są zamknięte ze względu na operacje brania średnich tylko na specjalnych dopuszczalnych ciągach, wyróżnionych za pomocą pewnej funkcji kodującej (cf. [9]). Odpowiednie założenia o funkcji kodującej pozwalają na otrzymanie przestrzeni o żądanych własnościach, w tym również przestrzeni dziedzicznie nierozkładalnych.

W szczególności powyższy wynik zapewnia nietrywialne operatory ściśle singularne na podprzestrzeniach $\ell_2$-asymptotycznej przestrzeni Banacha $X_{AB}$ typu HI skonstruowanej w pracy [2] i $\ell_p$-asymptotycznych przestrzeni Banacha $X_{(p)}$ typu HI, $1 < p < \infty$, skonstruowanych w pracy [26], zgodnie z [A5, Cor. 4.9]. Porównując w klasie tych przestrzeni opisane wyżej podejście z metodą [7, 36, 19] otrzymujemy operatory tylko na podprzestrzeni rozważanej przestrzeni, zamiast na całej przestrzeni, jednakże przy znacznie słabszych, standardowych, ograniczeniach na parametry definiujące rozważaną przestrzeń. Szerszy zakres stosowania metody [A5] obejmujący zarówno przestrzenie typu HI, jak i te z bazą bezwarunkową, wynika również z faktu, że ścisła singularność, podobnie jak ograniczoność, konstruowanego operatora opiera się na bezwarunkowej strukturze mieszanej przestrzeni Tsirelsona asymptotycznie reprezentowanej w rozważanej przestrzeni, podczas gdy ścisła singularność operatorów budowanych w pracy [36, 19] wynika z własności dziedzicznej nierozkładalności rozważanej przestrzeni.

# 4 Pozostałe prace naukowe

### Prace opublikowane

[P1] A. Pelczar, *Remarks on continuity of multifunctions*, Univ. Iagel. Acta Math. No. 37 (1999), 263–273.

[P2] A. Pelczar, *On a certain property of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Univ. Iagel. Acta Math. No. 38 (2000), 283–288.

[P3] A. Pelczar, *Remarks on Gowers' dichotomy*, Recent progress in functional analysis (Valencia, 2000), 201–213, North-Holland Math. Stud., 189, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[P4] A. Pelczar, *Some version of Gowers' dichotomy for Banach spaces*, Univ. Iagel. Acta Math. 41 (2003), 235-243.

[P5] A. Pelczar, *Stabilization of Tsirelson-type norms on $\ell_p$ spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 1365-1375.

[P6] A. Pelczar, *Note on distortion and Bourgain $\ell_1$-index*, Studia Math. 190 (2009), 147-161.

[P7] S.A. Argyros, A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *On the hereditary proximity to $\ell_1$*, J. Funct. Anal. 261 (2011), 1145-1203.

[P8] A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *Strictly singular non-compact operators on a class of HI space*, Bull. London Math. Soc. (2012), doi:10.1112/blms/bds111.

### Prace przyjęte do druku

[P9] S.A. Argyros, A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *Quasi-minimality and tightness by range in spaces with unconditional basis*, w druku, Israel J. Math., arXiv:1206.0651.

Prace [P2]-[P9] poświęcone są zastosowaniom technik kombinatorycznych w przestrzeniach Banacha i konstrukcjom norm typu Tsirelsona; w szczególności dotyczą wariantów dychotomii Gowersa i geometrycznej charakteryzacji dziedzicznej nierozkładalności [P2, P3, P4], konstrukcji i badania własności przestrzeni budowanych na bazie mieszanych przestrzeni Tsirelsona [P7, P8, P9] i zastosowań norm typu Tsirelsona [P5, P6]. Praca [P1] poświęcona jest różnym typom ciągłości odwzorowań wielowartościowych. Najważniejsze wyniki z powyższych prac omówione są poniżej.

## 4.1 Multifunkcje

Praca [P1] poświęcona jest relacjom pomiędzy różnymi typami ciągłości multifunkcji (odwzorowań wielowartościowych). Przypomnijmy, że multifunkcja $F$ określona na przestrzeni topologicznej $X$ o wartościach w rodzinie podzbiorów przestrzeni topologicznej $Y$ jest *półciągła z góry* w $x_0 \in X$, jeśli dla dowolnego otoczenia $U$ zbioru $F(x_0)$ istnieje otoczenie $V$ punktu $x_0$ takie, że dla dowolnego punktu $x \in V$ mamy $F(x) \subset U$. Multifunkcja $F$ jest *półciągła z dołu* w $x_0 \in X$, jeśli dla dowolnego $y \in F(x_0)$ i jego otoczenia $U$ istnieje otoczenie $V$ punktu $x_0$ takie, że dla dowolnego $x \in V$ mamy $F(x) \cap U \neq \emptyset$. Multifunkcja $F$ jest ciągła w $x_0$, jeśli jest półciągła z dołu i z góry w $x_0$. Głównym wynikiem pracy [P1] jest następujące

**Twierdzenie 21.** *[P1, Cor. 4.2] Niech $X$ będzie przestrzenią topologiczną, $Y$ - rzeczywistą przestrzenią lokalnie wypukłą, $F$ multifunkcją określoną na $X$ o wartościach w rodzinie ograniczonych, domkniętych i wypukłych podzbiorów $Y$. Ustalmy $x_0 \in X$ i załóżmy, że $F(x_0)$ jest zbiorem słabo zwartym.*

*Wtedy multifunkcja $F$ jest ciągła w $x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego funkcjonału $f \in Y^*$ funkcja $X \ni x \mapsto \sup\{f(y) : \ y \in F(x)\} \in \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0$.*

## 4.2 Dychotomia Gowersa

Prace [P2, P3, P4] poświęcone są różnym aspektom dychotomii Gowersa, geometrycznej i topologicznej charakteryzacji dziedzicznej nierozkładalności i zastosowań techniki stabilizacji. Podstawowym narzędziem jest tutaj Lemat 3, wykorzystany w szczególności w pracy [P3] w alternatywnym dowodzie dychotomii Gowersa dotyczącej gry o zbiory skończonych ciągów bloków [40]. Gra Gowersa toczy się w przestrzeni Banacha $X$ z bazą dla ustalonego zbioru $\sigma$ skończonych ciągów bloków z kuli jednostkowej $X$. Ruchy wykonuje na przemian dwóch graczy: S i P, z których S wybiera podprzestrzenie blokowe, a P wskazuje wektory o skończonym nośniku z podprzestrzeni wybranej w poprzednim ruchu przez gracza S. Gracz P wygrywa, jeśli w pewnym momencie wyprodukuje ciąg bloków ze zbioru $\sigma$. Dychotomia Gowersa [40] orzeka, że dla dowolnego zbioru $\sigma$ istnieje podprzestrzeń blokowa $Y$ taka, że albo gracz P ma strategię wygrywającą dla dowolnie małej "otoczki" zbioru $\sigma$ w $Y$, albo $Y$ nie zawiera żadnego ciągu bloków z $\sigma$. Dychotomia ta w wersji dla zbiorów ciągów nieskończonych o odpowiednich własnościach topologicznych w topologii produktowej $X^{\mathbb{N}}$ implikuje w szczególności dychotomię Gowersa o ciągach bezwarunkowych i przestrzeniach dziedzicznie nierozkładalnych, o której mowa była w rozdziale 1.

Technika stabilizacji zaprezentowana przy dowodzie dychotomii Gowersa w pracy [P3] pozwala także na dowód dychotomii dotyczących ciągów o własnościach bliskich bezwarunkowości. W szczególności rozważamy własność UL* [68]; ciąg bazowy $(x_i)$ jest *typu UL**, jeśli dla dowolnego skończonego zestawu liczb $(a_i)$ zachodzi $\|\sum_i a_i x_i\| \leq C\|\sum_i |a_i| x_i\|$ dla pewnej stałej uniwersalnej $C \geq 1$. W dychotomii dotyczącej ciagów tego typu zamiast podprzestrzeni rozważamy stożki.

**Twierdzenie 22.** *[P3, Thm 5.3] Każda przestrzeń Banacha zawiera ciąg bazowy typu UL* lub nieskończenie wymiarowy stożek $Y$ taki, że dla dowolnych stożków nieskończenie wymiarowych $K, H \subset Y$ zachodzi* $\inf\{\|x+y\| :\ x \in K,\ y \in H,\ \|x\| = \|y\| = 1\} = 0$.

Przykładem ciągu typu UL* jest baza Schaudera w przestrzeni funkcji ciągłych $\mathcal{C}[0,1]$, natomiast przestrzeń Gowersa-Maurey'a [42] spełnia drugi z warunków powyższej dychotomii. Analogiczna dychotomia dla ciągów innego typu implikuje, że każda przestrzeń typu HI zawiera stożek, którego dowolne dwa nietrywialne podstożki są dowolnie "blisko" siebie, tzn. $\inf\{\|x-y\| :\ x \in K,\ y \in H,\ \|x\| = \|y\| = 1\} = 0$ [P3, Cor. 5.6].

Prace [P2, P3, P4] prezentują również warunki charakteryzujące dziedziczną nierozkładalność i zawieranie ciągów bezwarunkowych w języku geometrii podzbiorów wypukłych przestrzeni Banacha, pozwalające na głębsze zrozumienie struktury przestrzeni typu HI. Przykładowe wyniki prezentujemy poniżej.

**Twierdzenie 23.** *[P2, Thm 2.1] [P3, Prop. 4.10] Dla przestrzeni Banacha $X$ następujące warunki są równoważne:*

*1. $X$ jest dziedzicznie nierozkładalna,*

*2. przecięcie dowolnych dwóch nieograniczonych wypukłych podzbiorów $X$, nie zawierających żadnej prostej, jest zbiorem nieograniczonym.*

*3. dla dowolnej równoważnej normy $\|\cdot\|$ na $X$ oraz dowolnej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni $Y \subset X$ zbiór*

$$W_Y = \bigcap \{f^{-1}[-1,1] : \ f \in X^*, \ \|f\| = 1, \ f(x) = 1, \ \textit{dla pewnego } x \in Y \ \textit{o normie } 1\}$$

*jest prawie ograniczony, tzn. ograniczony po przecięciu z pewną podprzestrzenią skończonego kowymiaru.*

W kracie norm na ustalonej przestrzeni wektorowej nieskończonego wymiaru $X$, z porządkiem $\|\cdot\|_1 \preceq \|\cdot\|_2 \Leftrightarrow (\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$ dla pewnej stałej $c > 0)$ twierdzenie to charakteryzuje normy dziedzicznie nierozkładalne jako elementy "nierozkładalne" (element kraty jest nierozkładalny, jeśli nie jest maksimum dwóch elementów od siebie mniejszych).

Dla przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i topologii wektorowej $T$ na $X$ słabszej niż topologia normy $T_{\|\cdot\|}$ rozważamy topologię $T^\bullet = (T \times T_{\|\cdot\|}) \cap (T_{\|\cdot\|} \times T)$ na produkcie $X \times X$ [67]. Otoczenia $(0,0)$ w tej topologii generowane są przez gracza S w pewnej modyfikacji gry Gowersa [P4]. Powyższe twierdzenie implikuje następującą charakteryzację własności HI [P4, Prop. 4.4]: przestrzeń Banacha $X$ jest dziedzicznie nierozkładalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $r > 0$ zachodzi $(0,0) \in \overline{S_r}^{T_E^\bullet}$, gdzie $T_E$ jest topologią wszystkich otwartych, nieograniczonych i wypukłych zbiorów, które nie zawierają żadnej prostej, a $S_r = \{(x,y) \in X \times X : \|x\| = \|y\| = 1, \ \|x - y\| \leq r\}$. W tym języku można też scharakteryzować przestrzenie zawierające ciąg bezwarunkowy.

**Twierdzenie 24.** *[67] [P4, Prop. 4.3, Thm 4.4] Przestrzeń Banacha $X$ zawiera nieskończony ciąg bezwarunkowy wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej topologii liniowej $T$ na $X$ słabszej od topologii normy oraz pewnej liczby $r > 0$ zachodzi $(0,0) \notin \overline{S_r}^{T^\bullet}$.*

## 4.3 Wykrzywialność przestrzeni a klasyczne przestrzenie ciągowe

Prace [P5, P6] dotyczą wykrzywialności (dystorsji) przestrzeni Banacha. Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest $\lambda$-*wykrzywialna*, $\lambda > 1$, jeśli istnieje norma równoważna $|\cdot|$ na $X$ taka, że dla każdej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni $Y \subset X$ zachodzi

$$\sup\left\{\frac{|x|}{|y|} : \ x, y \in Y, \ \|x\| = \|y\| = 1\right\} \geq \lambda$$

Przestrzeń Banacha jest *dowolnie wykrzywialna*, jeśli jest $\lambda$-wykrzywialna dla dowolnej liczby $\lambda > 1$. Pierwszą znaną przestrzenią dowolnie wykrzywialną jest słynna przestrzeń

Schlumprechta $T[(\mathcal{A}_n, \frac{1}{\log_2(n+1)})_n]$ [61]. Dzięki transferowi systemów wektorów z przestrzeni Schlumprechta do $\ell_2$ E.Odell i T.Schlumprecht rozwiązali "distortion problem" pokazując, że przestrzeń Hilberta $\ell_2$ jest dowolnie wykrzywialna [57]. Pytanie o dowód dowolnej wykrzywialności przestrzeni $\ell_2$ przy użyciu jej wewnętrzej struktury pozostaje otwarte. W tym kontekście naturalne jest pytanie, czy normy typu Tsirelsona przestrzeni $T[\mathcal{A}_n, \frac{1}{n^{1/2}}]$ lub ich modyfikowanych wersji, izomorficznych z $\ell_2$, dowolnie wykrzywiają przestrzeń Hilberta. Praca [P5] przynosi negatywną odpowiedź na to pytanie.

Dla dowolnych $1 < p, q < \infty$ spełniających $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$ przez $|\cdot|_{p,n}$ (odp. $\|\cdot\|_{p,n}$) oznaczamy normę przestrzeni typu Tsirelsona $T[\mathcal{A}_n, \frac{1}{n^{1/q}}]$ (odp. jej modyfikowanej wersji $T_M[\mathcal{A}_n, \frac{1}{n^{1/q}}]$) izomorficznej z $\ell_p$ [20, 10].

**Twierdzenie 25.** *[P5, Thm 4.1] Ustalmy $1 < p < \infty$ oraz $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ dowolna nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń $\ell_p$ zawiera nieskończenie wymiarową podprzestrzeń $Y$ taką, że*

$$\sup_{x,y\in Y}\left\{\frac{|x|_{p,n}}{|y|_{p,n}} : \|x\| = \|y\| = 1\right\} < 2+\varepsilon, \quad \sup_{x,y\in Y}\left\{\frac{\|x\|_{p,n}}{\|y\|_{p,n}} : \|x\| = \|y\| = 1\right\} < 1+\varepsilon$$

Przestrzenie $\ell_1$ i $c_0$ nie są wykrzywialne, natomiast otwartym problemem jest istnienie przestrzeni $\lambda$-wykrzywialnej dla pewnej liczby $\lambda > 1$, lecz nie dowolnie wykrzywialnej ("bounded distortion problem"). Obecnie wiadomo, że przestrzeń bez dowolnie wykrzywialnej podprzestrzeni zawiera $\ell_p$-asymptotyczną podprzestrzeń z bazą bezwarunkową, $1 \leq p \leq \infty$, zawierającą jednostajnie $\ell_1^n$, $n \in \mathbb{N}$ [64, 55, 53]. Pierwszy przykład dowolnie wykrzywialnej $\ell_1$-asymptotycznej przestrzeni to mieszana przestrzeń Tsirelsona definiowana przy pomocy rodzin Schreiera wprowadzona przez S.A.Argyrosa i I.Deliyanni [11]. Intensywne studium nad wykrzywialnością przestrzeni $\ell_1$-asymptotycznych wyższego rzędu zostało przedstawione w pracy [59].

W pracy [P6] pokazujemy, że w przestrzeni bez dowolnie wykrzywialnej podprzestrzeni lokalna (mierzona indeksem Bourgaina) i asymptotyczna "odległość" od przestrzeni $\ell_p$ muszą się pokrywać, uogólniając wynik [55].

W celu sformułowania wyniku wspomnianego wyżej przypomnijmy potrzebne definicje. *Drzewkiem* na zbiorze $X$ nazywamy zbiór $\mathcal{T} \subset \bigcup_{n=1}^\infty X^n$ taki, że $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{T}$ jeśli $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \in \mathcal{T}$, $k \in \mathbb{N}$. Dla drzewka $\mathcal{T}$ na $X$ kładziemy $D(\mathcal{T}) = \{(x_1, \ldots, x_k) : (x_1, \ldots, x_k, x) \in \mathcal{T}$ dla pewnego $x \in X\}$. i indukcyjnie definiujemy drzewka $D^\alpha(\mathcal{T})$ dla liczb porządkowych $\alpha$; $D^0(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$, $D^{\alpha+1}(\mathcal{T}) = D(D^\alpha(\mathcal{T}))$ oraz $D^\alpha(\mathcal{T}) = \bigcap_{\xi<\alpha} D^\xi(\mathcal{T})$ dla dowolnej granicznej liczby porządkowej $\alpha$. Kładziemy $o(\mathcal{T}) = \inf\{\alpha : D^\alpha(\mathcal{T}) = \emptyset\}$.

Dla przestrzeni Banacha $X$ i liczby $C \geq 1$ przez $\mathcal{T}_C(X)$ oznaczamy drzewko skończonych znormalizowanych ciągów bazowych w $X$ $C$-równoważnych kanonicznej bazie $\ell_1$. *Indeksem Bourgaina* $X$ nazywamy $I(X) = \sup\{o(\mathcal{T}_C(X)) : C \geq 1\}$ [21]. Dla ośrodkowych przestrzeni nie zawierających $\ell_1$ indeks ten jest postaci $\omega^\alpha$, $\alpha < \omega_1$ [43].

Łatwo sprawdzić, że indeks Bourgaina przestrzeni $\ell_1^\alpha$-asymptotycznej jest większy niż $\omega^\alpha$. Zależność tę można odwrócić w przestrzeni ograniczenie wykrzywialnej na mocy głównego rezultatu pracy [P6].

**Twierdzenie 26.** *[P6, Thm 2.1] Niech $X$ będzie przestrzenią Banacha z bazą. Ustalmy $\alpha < \omega_1$ i załóżmy, że $I(Y) > \omega^\alpha$ dla dowolnej podprzestrzeni blokowej $Y \subset X$. Wtedy $X$ zawiera podprzestrzeń dowolnie wykrzywialną lub podprzestrzeń $\ell_1^\alpha$-asymptotyczną.*

Wynik ten pozostaje prawdziwy, jeśli zamiast $\ell_1$ rozważymy przestrzenie $c_0$ lub $\ell_p$, $1 < p < \infty$, przy odpowiedniej modyfikacji definicji indeksu Bourgaina [P6, Thm 3.1, Rem. 3.6]. Indukcyjny dowód opiera się na stabilizacji norm opisujących strukturę asymptotyczną przestrzeni, uogólniających postać kanonicznych norm równoważnych na mieszanych przestrzeniach Tsirelsona, oraz dychotomii I.Gasparisa [35].

W ogólnym przypadku poziomy lokalnej i asymptotycznej reprezentacji $\ell_1$ w przestrzeni mogą być skrajnie różne, jak pokazuje główny wynik pracy [P7]. W pracy tej analizowane są relacje między różnymi typami lokalnej i asymptotycznej reprezentacji $\ell_1$ w przestrzeni Banacha, w tym definiowanymi przy pomocy modeli rozciągniętych wyższych rzędów i "strategicznych" indeksów wykrzystujących modyfikację gry Gowersa.

**Twierdzenie 27.** *[P7, Thm 13.8] Dla dowolnej liczby $\alpha < \omega_1$ istnieje ośrodkowa refleksywna przestrzeń $X_\alpha$ typu HI o następujących własnościach:*

*1. $I(Y) > \omega^\alpha$ dla dowolnej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni $Y \subset X_\alpha$,*

*2. $X_\alpha$ nie zawiera ciągu bazowego generującego kanoniczną bazę $\ell_1$ jako model rozciągnięty (w szczególności nie zawiera podprzestrzeni $\ell_1$-asymptotycznej).*

Analogiczne własności - względem przestrzeni $c_0$ - posiada również przestrzeń dualna do $X_\alpha$. Techniczna konstrukcja $X_\alpha$ opiera się na metodzie "atraktorów" konstrukcji przestrzeni na bazie mieszanych przestrzeni Tsirelsona, [9], która pozwala na przeniesienie własności podciągów bazy pewnej pomocniczej przestrzeni na ciągi bloków bazy przestrzeni docelowej. Zastosowane podejście przynosi także ogólną metodę konstrukcji przestrzeni Banacha nie dopuszczających $c_0$ lub $\ell_p$ jako modeli rozciągniętych [P7, Thm 11.3], rozszerzając rezultat E.Odella i T.Schlumprechta [58].

## 4.4 Typy minimalności i operatory ściśle singularne - kontynuacja

Prace [P8, P9] kontynuują badania z prac [A3, A4, A5].

Praca [P8] jest poświęcona konstrukcji nietrywialnych operatorów ściśle singularnych na przestrzeniach budowanych na bazie mieszanych przestrzeni Tsirelsona $T[(\mathcal{A}_n, \theta_n)_n]$ i $T[(\mathcal{S}_n, \theta_n)_n]$ w kontekście refleksywnej wersji problemu "scalar-plus-compact". Po konstrukcji Argyrosa-Haydona przestrzeni predualnej do $\ell_1$ rozwiązującej ten problem, uwaga została z powrotem skierowana na "klasyczne" refleksywne przestrzenie typu HI, niemniej dotychczas znane konstrukcje nietrywialnych operatorów ściśle singularnych na tych przestrzeniach wymagały restrykcyjnych warunków na parametry $(\theta_n)$, cf. [7, 36, 19]. W pracy [P8] zaprezentowana jest ogólna metoda dotycząca szerokiej klasy przestrzeni budowanych na bazie mieszanych przestrzeni Tsirelsona, przy założeniu ogólnych ograniczeń na parametry $(\theta_n)$. Metoda ta upraszcza dowód poprawności konstrukcji G.Androulakisa i T.Schlumprechta [7] i zapewnia pierwszą ogólną procedurę konstrukcji nietrywialnych operatorów ściśle singularnych na przestrzeniach definiowanych przez rodziny Schreiera dzięki użytemu pojęciu periodycznych iterowanych specjalnych średnich. Zaprezentowana technika ujawnia strukturalne podobieństwo pomiędzy budową przestrzeni definiowanych za pomocą "małych" rodzin $(\mathcal{A}_n)$ i "dużych" rodzin $(\mathcal{S}_n)$.

Opiszemy teraz klasę przestrzeni rozważaną w pracy [P8]. Niech $(\mathcal{F}_n) = (\mathcal{S}_n)$ lub $(\mathcal{A}_n)$. Ustalamy ciągi parametrów $(\theta_n)_n$ oraz $(\rho_l)_{l\in L}$ takie, że $\rho_l \searrow 0$ oraz $\rho_l \geq \theta_l$ dla wszystkich $l \in L$. Dla przestrzeni refleksywnej $X_D$ z bazą $(e_n)$ i zbiorem normującym $D$ (tzn. $\|x\| = \sup_{f\in D} f(x)$ dla dowolnego $x \in X$), rozważamy następujące warunki:

(D1) $D$ zawiera bazę $(e_n^*)$ i jest zamknięty ze względu na operację brania $\theta_n$-średniej na $\mathcal{M}_n$-dopuszczalnych ciągach wektorów, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$,

(D2) baza $(e_n)$ oraz kanoniczna baza mieszanej przestrzeni Tsirelsona $T[(\mathcal{F}_n, \theta_n)_n]$ są $\mathcal{F}$-równoważne, gdzie $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{F}_n : i_n \leq F,\ n \in \mathbb{N}\}$ dla pewnego ciągu $(i_n) \subset \mathbb{N}$,

(D3) dla dowolnych $f \in D$ oraz $l \in L$ zachodzi $\{n : |f(e_n)| \geq \rho_l\} \in \mathcal{F}_l$.

Dla przestrzeni wyżej opisanych prawdziwe są następujące wyniki.

**Twierdzenie 28.** *[P8, Thm 3.7] Rozważamy refleksywną przestrzeń $X_D$ spełniającą warunki (D1)-(D3) względem mieszanej przestrzeni Tsirelsona o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{A}_n, \frac{c_n}{n^{1/q}})_n]$ z $q = \infty$. Wtedy istnieje ograniczony ściśle singularny niezwarty operator na $X_D$.*

**Twierdzenie 29.** *[P8, Thm 3.5] Rozważamy refleksywną przestrzeń $X_D$ spełniającą warunki (D1)-(D3) względem mieszanej przestrzeni Tsirelsona o postaci kanonicznej $T[(\mathcal{S}_n, c_n\theta^n)_n]$ z parametrami spełniającymi warunek*

$$\inf_k \liminf_n \frac{c_{n+k}}{c_n}\theta^k > 0\,.$$

*Wtedy istnieje ograniczony ściśle singularny niezwarty operator na $X_D$.*

Powyższe założenia o parametrach są standardowe, spełniają je w szczególności przestrzenie dziedzicznie nierozkładalne typu Gowersa-Maurey'a [42] w przypadku rodzin $(\mathcal{A}_n)$ oraz typu Argyrosa-Deliyanni [11] w przypadku rodzin $(\mathcal{S}_n)$ (ogólniej - gdy $\theta = 1$ [59]). Wykorzystane narzędzia pokazują, że metoda jest możliwa do zastosowania także przy jeszcze słabszych założeniach o ciągu $(\theta_n)$. Konstruowany operator jest dany wzorem $T(\cdot) = \sum_n f_n(\cdot)e_{t_n}$ dla specjalnie dobranego ciągu funkcjonałów $(f_n)$, którego zachowanie imituje zachowanie bazy kanonicznej $c_0$. Podobnie jak w pracy [A5] własności operatora dowodzone są w oparciu o własności mieszanej przestrzeni Tsirelsona, asymptotycznie reprezentowanej w $X_D$ dzięki warunkowi (D2).

Praca [P9] kompletuje listę przykładów podstawowych klas (1)-(6) w klasyfikacji Ferenczi'ego-Rosendala w ramach programu Gowersa (Twierdzenie 1). Po zaskakującym wyniku V.Ferenczi'ego i T.Schlumprechta [32], którzy pokazali, że pewien wariant przestrzeni Gowersa-Maurey'a jest przestrzenią ciągowo minimalną (zatem klasy (2)) nie był znany jedynie przykład przestrzeni klasy (4).

**Twierdzenie 30.** *[P9, Thm 0.2] Istnieje refleksywna przestrzeń Banacha w klasie (4) Ferenczi'ego-Rosendala.*

Skonstruowana przestrzeń jest bezwarunkowym wariantem przestrzeni Gowersa [38] typu HI z asymptotycznie bezwarunkową bazą, posiadającej wszystkie własności charakteryzujące klasę (4) poza bazą bezwarunkową [31].

# Literatura


[1] D. Alspach, S.A. Argyros, *Complexity of weakly null sequences*, Diss. Math. 321 (1992), 1–44.

[2] G. Androulakis, K. Beanland, *A hereditarily indecomposable asymptotic $\ell_2$ Banach space*, Glasg. Math. J. 48 (2006), 503–532.

[3] G. Androulakis, N. Kalton, A. Tcaciuc, *On Banach spaces containing $\ell_p$ or $c_0$*, Houston J. Math. 37 (2011), no. 3, 859–866.

[4] G. Androulakis, E. Odell, *Distorting mixed Tsirelson spaces*, Israel J. Math. 109 (1999), 125–149.

[5] G. Androulakis, E. Odell, T. Schlumprecht, N. Tomczak-Jaegermann, *On the structure of the spreading models of a Banach space*, Canad. J. Math. 57 (2005), no. 4, 673–707.

[6] G. Androulakis, F. Sanacory, *An extension of Schreier unconditionality*, Positivity 12 (2008), no. 2, 313–340.

[7] G. Androulakis, T. Schlumprecht, *Strictly singular, non-compact operators exist on Gowers-Maurey space*, J. London Math. Soc (2), 64 (2001), 655–674.

[8] G. Androulakis, T. Schlumprecht, *The Banach space $S$ is complementably minimal and subsequentially prime*, Studia Math. 156 (2003), no. 3, 227–242.

[9] S.A. Argyros, A. D. Arvanitakis, A. Tolias, *Saturated extensions, the attractors method and Hereditarily James Tree Spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 337, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[10] S.A. Argyros, I. Deliyanni, *Banach Spaces of the type of Tsirelson*, arXiv:math.FA/9207206.

[11] S.A. Argyros, I. Deliyanni, *Examples of asymptotic $\ell_1$ Banach Spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 973–995.

[12] S.A. Argyros, I. Deliyanni, D. Kutzarova, A. Manoussakis, *Modified mixed Tsirelson spaces*, J. Funct. Anal. 159 (1998), 43–109.

[13] S.A. Argyros, I. Deliyanni, A. Manoussakis, *Distortion and spreading models in modified mixed Tsirelson spaces*, Studia Math. 157 (2003), no. 3, 199–236.

[14] S.A. Argyros, R. Haydon, *A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem*, Acta Math. 206 (2011), no. 1, 1–54.

[15] S.A. Argyros, A. Manoussakis, *A sequentially unconditional Banach space with few operators*. Proc. London Math. Soc. (3) 91 (2005), no. 3, 789–818.

[16] S.A. Argyros, S. Mercourakis, A. Tsarpalias, *Convex unconditionality and summability of weakly null sequences*, Israel J. Math. 107 (1998), 157–193.

[17] S.A. Argyros, S. Todorcevic, *Ramsey Methods in Analysis*, Advanced Course in Mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2005.

[18] S.A. Argyros, A. Tolias, *Methods in the theory of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 170 (2004), no. 806.

[19] K. Beanland, *Operators on asymptotic $\ell_p$ spaces which are not compact perturbations of a multiple of the identity*, Illinois J. Math. 52 (2009), no. 2, 515–532.

[20] S. Bellenot, *Tsirelson superspaces and $\ell_p$*, J. Funct. Anal. 69 (1986), 207–228.

[21] J. Bourgain, *On convergent sequences of continuous functions*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B 32 (1980), 235–249.

[22] A. Brunel, L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Theory 7 (1974), no. 4, 294–299.

[23] P. Casazza, N. Kalton, D. Kutzarova, M. Mastyło, *Complex interpolation and complementably minimal spaces*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 175, Dekker, New York, 1996, 135–143.

[24] P.Casazza, W.B.Johnson, L.Tzafriri, *On Tsirelson's space*, Israel J. Math. 47 (1984), 81–98.

[25] P. Casazza, E. Odell, *Tsirelson's space and minimal subspaces*, Texas functional analysis seminar 1982–1983 (Austin, Tex.), 61–72, Longhorn Notes, Univ. Texas Press, Austin.

[26] I. Deliyanni, A. Manoussakis, *Asymptotic $\ell_p$ hereditarily indecomposable Banach spaces*, Illinois J. Math. 51 (2007), 767–803.

[27] S. Dilworth, V. Ferenczi, D. Kutzarova, E. Odell, *On strongly asymptotic $\ell_p$ spaces and minimality*, J. Lond. Math. Soc. (2) 75 (2007), no. 2, 409–419.

[28] S. Dilworth, E. Odell, T. Schlumprecht, A. Zsák, *Partial unconditionality*, Houston J. Math. 35 (2009), no. 4, 1251–1311.

[29] V. Ferenczi, *Hereditarily finitely decomposable Banach spaces*, Studia Mathematica 123 (1997), no. 2, 135–149.

[30] V. Ferenczi, C. Rosendal, *Banach spaces without minimal subspaces (Part I)*, J. Funct. Anal. 257 (2009), no. 1, 149–193.

[31] V. Ferenczi, C. Rosendal, *Banach spaces without minimal subspaces - Examples (Part II)*, w druku, Annales de l'Institut Fourier.

[32] V. Ferenczi, T. Schlumprecht, *Subsequential minimality in Gowers and Maurey spaces*, arXiv:1112.2411.

[33] T. Figiel, R. Frankiewicz, R. Komorowski, C. Ryll-Nardzewski, *Selecting basic sequences in $\phi$-stable Banach spaces*, Studia Math. 159 (2003), no. 3, 499–515.

[34] T. Figiel, W. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no $\ell_p$*, Compositio Math. 29 (1974), 179–190.

[35] I. Gasparis, *A dichotomy theorem for subsets of the power set of the natural numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 3, 759–764.

[36] I. Gasparis, *Strictly singular non-compact operators on hereditarily indecomposable Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2002), no. 4, 1181–1189.

[37] W.T. Gowers, *A solution to Banach's hyperplane problem.* Bull. London Math. Soc. 26 (1994), no. 6, 523–530.

[38] W.T. Gowers, *A hereditarily indecomposable space with an asymptotic unconditional basis*, Geometric aspects of functional analysis, 112-120, Oper. Theory Adv. Appl., 77. Birkhaüser, Basel, 1995.

[39] W.T. Gowers, *A remark about the scalar-plus-compact problem*, Convex geometric analysis (Berkeley, CA, 1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 111–115.

[40] W.T. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Funct. Anal. 6 (1996), 1083–1093.

[41] W.T. Gowers, *An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies*, Annals of Mathematics 156 (2002), 797-833.

[42] W.T. Gowers, B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851–874.

[43] R. Judd, E. Odell, *Concerning Bourgain's $\ell_1$-index of a Banach space*, Israel J. Math. 108 (1998), 145–171.

[44] M. Junge, D. Kutzarova, E. Odell, *On asymptotically symmetrical Banach spaces*, Studia Math. 173 (2006), no. 3, 203–231.

[45] R. Komorowski, N. Tomczak-Jaegermann, *Banach spaces without local unconditional structure*, Israel J. Math. 89 (1995), no. 1- 3, 205–226. *Erratum to "Banach spaces without local unconditional structure"*, Israel J. Math. 105 (1998), 85–92.

[46] D. Kutzarova, D. Leung, A. Manoussakis, W.-K. Tang, *Minimality properties of Tsirelson type spaces*, Studia Math. 187 (2008), no. 3, 233–263.

[47] H. Lemberg, *Sur un théorème de J.-L. Krivine sur la finie représentation de $\ell_p$ dans un espace de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), no. 14, 669–670.

[48] D. Leung, W.-K. Tang, *$\ell_1$-spreading models in subspaces of mixed Tsirelson spaces*, Studia Math. 172 (2006), 47–128.

[49] D. Leung, W.-K. Tang, *More mixed Tsirelson spaces that are not isomorphic to their modified versions*, Illinois J. Math. 52 (2008), no. 1, 17–46.

[50] J. Lindenstrauss, *Some open problems in Banach space theory*, Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, 15 (1975-1976), Exposé 18.

[51] A.Manoussakis, *On the structure of a certain class of mixed Tsirelson spaces*, Positivity 5 (2001), no. 3, 193–238.

[52] A. Manoussakis, *A note on certain equivalent norms on Tsirelson's space*, Glasgow Math. J. 46 (2004), 379–390.

[53] B. Maurey, *A Remark about Distortion*, Operator Theory: Advances and Applications, 77 (1995), 131–147.

[54] B. Maurey, *A note on Gowers' dichotomy theorem*, Convex Geometric Analysis, 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 149–157.

[55] V. Milman, N. Tomczak-Jaegermann, *Asymptotic $\ell_p$ spaces and bounded distortion*, Banach spaces (ed. W. Johnson, B.-L. Lin), Comtemp. Math. 144 (1993), 173–195.

[56] E. Odell, *On Schreier unconditional sequences.* Banach spaces (Mérida, 1992), 197–201, Contemp. Math., 144, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[57] E. Odell, T. Schlumprecht, *The distortion problem.* Acta Math. 173 (1994), no. 2, 259–281.

[58] E. Odell, T. Schlumprecht, *On the richness of the set of p's in Krivine's theorem*, Geometric aspects of functional analysis (Israel, 1992–1994), 177–198, Oper. Theory Adv. Appl., 77, Birkhäuser, Basel, 1995.

[59] E. Odell, N. Tomczak-Jaegermann, R. Wagner, *Proximity to $\ell_1$ and Distortion in Asymptotic $\ell_1$ Spaces*, J. Funct. Anal. 150 (1997), 101–145.

[60] C. Rosendal, *Characterising subspaces of Banach spaces with a Schauder basis having the shift property*, arXiv:1106.0472.

[61] T. Schlumprecht, *An arbitrary distortable Banach space*, Israel J. Math. 76 (1991), 81–95.

[62] T. Schlumprecht, *How many operators exist on a Banach space?* Trends in Banach spaces and operator theory, 295–333, Contemp. Math., 321, Amer. Math. Soc., 2003.

[63] A. Tcaciuc, *On the existence of asymptotic-$\ell_p$ structures in Banach spaces*, Canad. Math. Bull. 50 (2007), no. 4, 619–631.

[64] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach spaces of type p have arbitrary distortable subspaces*, Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 6, 1074–1082.

[65] B.S. Tsirelson, *Not every Banach space contains $\ell_p$ or $c_0$*, Funct. Anal. Appl. 8 (1974), 138–141.

[66] E. Tutaj, *O pewnych warunkach wystarczających do istnienia w przestrzeni Banacha ciągu bazowego bezwarunkowego* Praca doktorska, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 1974.

[67] E. Tutaj, *Some geometries on the unit sphere in Banach Spaces*, I, II, Bull. Pol. Acad. Sci.: Math. 33 (1985), 35–43, 45–50.

[68] E.Tutaj, *Some observations concerning the classes of unconditional-like basic sequences*, Bull. Pol. Acad. Sci.: Math. 35 (1987), 35–42.

[69] L. Tzafriri, *On the type and cotype of Banach spaces*, Israel J. Math. 32 (1979), 3–38.

[70] R. Wagner, *Gowers' dichotomy for asymptotic structure*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 3089–3095.

**Prace z cyklu publikacji wskazanego jako główne osiągnięcie naukowe autorki**

[A1] A. Pelczar, *Subsymmetric sequences and minimal spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 3, 765–771.

[A2] V. Ferenczi, A. Pelczar, C. Rosendal *On a question of Haskell P. Rosenthal concerning a characterization of $c_0$ and $\ell_p$*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), 396–406.

[A3] A. Manoussakis, A. Pelczar, *Quasiminimality of mixed Tsirelson spaces*, Math. Nachr. 284 (2011), 1924–1947.

[A4] D. Kutzarova, A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *Isomorphisms and strictly singular operators in mixed Tsirelson spaces*, J. Math. Anal. Appl. 388 (2012), 1040–1060.

[A5] A. Pelczar-Barwacz, *Strictly singular operators in asymptotic $\ell_p$ Banach spaces*, w druku, Illinois J. Math. (2013), arXiv:1109.5874.

**Pozostałe prace naukowe autorki**

[P1] A. Pelczar, *Remarks on continuity of multifunctions*, Univ. Iagel. Acta Math. No. 37 (1999), 263–273.

[P2] A. Pelczar, *On a certain property of hereditarily indecomposable Banach spaces*, Univ. Iagel. Acta Math. No. 38 (2000), 283–288.

[P3] A. Pelczar, *Remarks on Gowers' dichotomy*, Recent progress in functional analysis (Valencia, 2000), 201–213, North-Holland Math. Stud., 189, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[P4] A. Pelczar, *Some version of Gowers' dichotomy for Banach spaces*, Univ. Iagel. Acta Math. 41 (2003), 235–243.

[P5] A. Pelczar, *Stabilization of Tsirelson-type norms on $\ell_p$ spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 1365–1375.

[P6] A. Pelczar, *Note on distortion and Bourgain $\ell_1$-index*, Studia Math. 190 (2009), 147–161.

[P7] S.A. Argyros, A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *On the hereditary proximity to $\ell_1$*, J. Funct. Anal. 261 (2011), 1145–1203.

[P8] A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *Strictly singular non-compact operators on a class of HI space*, Bull. London Math. Soc. (2012), doi: 10.1112/blms/bds111.

[P9] S.A. Argyros, A. Manoussakis, A. Pelczar-Barwacz, *Quasi-minimality and tightness by range in spaces with unconditional basis*, w druku, Israel J. Math., arXiv:1206.0651.



Anna Pelczar-Barwacz