prof. dr hab. Oleksandr Gomilko
Wydział Matematyki
i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18
87-100 Toruń

Toruń, 2 listopada 2016

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego dra Michała Wojtylaka

Na dorobek naukowy dra Michała Wojtylaka, w chwili obecnej, składa się 15 opublikowanych artykułów naukowych. Wszystkie prace zostały opublikowane w czasopismach matematycznych rangi międzynarodowej.

W niniejszej recenzji skoncentruję się na ocenie dorobku naukowego uzyskanego przez Kandydata po doktoracie, który składa się z 7 prac tworzących rozprawę habilitacyjną oraz 5 prac poza rozprawą.

W pracach Kandydata rozwinięto techniki badania wartości własnych operatorów liniowych w (skończone lub nieskończenie wymiarowych) przestrzeni Hilberta, polegające na znajdowaniu zer funkcji Weyla. Dobre wiadomo, że analiza widma operatora liniowego wykorzystywana jest w wielu dziedzinach matematyki, na przykład w fizyce matematycznej, analizie numerycznej, teorii równań różniczkowych. Zatem teoria perturbacji operatorów liniowych jest dzisiaj częścią matematyki o ogromnym znaczeniu teoretycznym i praktycznym.

W pracy [W3] (numeracja prac jest zaczerpnięta z Autoreferatu) Kandydat bada wartości własne macierzy $C(\tau) := A + \tau B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gdzie $\tau \in \mathbb{C}$ jest parametrem, a $B = uv^*$ jest perturbacja rzędu pierwszego. Wiadomo że wartości własne macierzy $C(\tau)$, które nie są wartościami własnymi A, są rozwiązaniami równania $Q(z) = -1/\tau$, gdzie Q jest funkcją Weyla

$$Q(z) :=< (A - z)^{-1}u, v >, \qquad z \notin \sigma(A).$$

W Tw. 5.1 pokazano, że dla dla generycznych $u, v \in \mathrm{C}^n$ oraz wszystkich $\tau \in \mathbb{C}$ algebraiczna krotność wartości własnych $C(\tau)$, które nie są wartościami własnymi A, jest nie większa dwójki. Z drugiej strony, odnotowano że taki wynik nie zachodzi w ogólnym przypadku.

Niech V' będziw zbiorem par $(u, v) \in \mathbb{C}^{2n}$ dla których istnieje $\tau \in \mathbb{C}$ takie, że $C(\tau)$ ma potrójną wartość własna, która nie należy do $\sigma(A)$. Wówczas, Z Tw. 5.1 wynika, że V' zawiera się w pewnym podzbiorze algebraicznym $\mathbb{C}^{2n}$. Przy dowodzie wykorzystuje się metody rezultantu macierzowego Sylvestera oraz formy kanonicznej Brunowskiego dla (A, u, v^T). Drugi ważny wynik artykułu, mianowicie Tw. 6.2, dotyczy przypadku $\tau \in \mathbb{R}$. W tej sytuacji, udowodniono, że zbiór V wszystkich par (u, v), dla których istnieje

$\tau \in$ R takie, że $C(\tau)$ ma podwójna wartość własną poza $\sigma(A)$, jest zbiorem domkniętym o zerowej z $4n$-wymiarową mierze Lebesgue'a. W szczególności, V ma puste wnętrze. Ten fakt wyjaśnia dlaczego w obliczeniach numerycznych krzywe $\lambda_j(C(\tau)) \notin \sigma(A)$, $j = 1, \ldots, n$, zakreślone przez wartości własne $C(\tau)$, $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$, nie przecinają się.

W pracy [W6] rozpatruje się regularny pęk liniowy macierzowy $P(\lambda) = A + \lambda E$, gdzie $A, E \in \mathbb{C}^{n \times n}$, oraz jego perturbacji. Rozważony problem polega na minimalizacji normy macierzy $uv*$ rzędu jeden takiej, że pęk $D(\lambda) = A + uv^* + \lambda E$, $u, v \in$ C^n jest osobliwy (tzn. że $\det D(\lambda) \equiv 0$). Ten problem jest związany z analizą numeryczną i modelowaniem matematycznym. Stosowanie metody funkcji Weyla prowadzi do uzyskania podstawowego rezultatu (Tw. 4), który, w szczególności, mówi że zakładając regularność pęku $A + \lambda E$, pęk $A + \tau_0 uv^* + \lambda E$ jest osobliwy dla pewnego $\tau_0 \in \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy gdy funkcja Weyla $v^*(A + \lambda E)^{-1} u \equiv \text{const} \neq 0$ oraz wtedy i tylko wtedy gdy wielomian $p(\lambda, \tau) = det(A + \tau uv^* + \lambda E)$ ma postać $p(\lambda, \tau) = (1 + \zeta\tau) det(A + \lambda E)$ dla pewnego $0 \neq \zeta \in$ C.

Na podstawie Tw. 4 uzyskany jest szereg twierdzeń o wyznaczeniu odległości rzędu jeden pęku regularnego od singularności. Najpierw, w języku hermitowskej formy kanonicznej $A + \lambda E$, podana jest charakteryzacja pęków hermitowskich, dla których singularyzacja hermitowska $A + uu^* + \lambda E$ est możliwa (w przypadku niehermitowskim taka charakteryzacja jet bardzo prosta: macierz E ma być nieodwracalna). W Tw. 23, podany jest jawny wzór na hermitowską odległość od singularności w przypadku hermitowskiego pęku mającego jedynie proste wartości własne. Otrzymane są łatwe do sprawdzenia oszacowania minimalnej normy Frobeniusa macierzy uv^*, która syngularyzuje regularny pęk $A + \lambda E$ (Tw. 13, Tw. 32). W rozdziale 7 podany jest algorytm na znalezienie pęku osobliwego bliskiego danemu pękowi regularnemu, oraz rozważane są ilustracje numeryczne.

W pracy [W7], na przestrzeni l^2, rozważano operator $H = [-1] \oplus I$ oraz H-samosprężony operator

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & -b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \\ & b_1 & a_2 & b_2 & \\ & & b_2 & a_3 & \ldots \\ & & & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

gdzie $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$ należą do podzbioru ograniczonego $\mathbb{R}$. Niech A_n oznacza skończoną podmacierz A wymiaru $n+1$. Macierzy A i A_n posiadają dokładnie jedną wartość własną niedodatniego typu λ i λ_n odpowiednio. Wykazano (Wn. 3.5), że $\lim_{n \to \infty} \lambda_m = \lambda$. Kluczową ideą dowodu jest asymptotyczna relacja pomiędzy funkcjami Weyla

$$m(z) = - < e_0, (A - z)^{-1} e_0 > \qquad \text{i} \qquad m_n(z) = - < e_0, (A_n - z)^{-1} e_0 >,$$

gdzie e_0 oznacza pierwszy wektor bazy kanonicznej l^2. Co więcej w Tw. 4.3 w przypadku prostej wartości własnej λ udowodniono, że tempo zbieżności λ_n do λ jest wykładnicze oraz pokazano, że na wielkość wykładnika ma wpływ odległość λ od widma części symetrycznej macierzy A.

Funkcja $Q(z)$ jest uogólnioną funkcją Nevanlinny klasy N_1, jeśli jest meromorficzna w $\mathrm{C} \setminus \mathrm{R}$, $Q(\overline{z}) = \overline{Q(z)}$ oraz jądro $(Q(z) - \overline{Q(w)})/(z - w)$ ma jeden niedodatni pierwiastek. Każda funkcja klasy N_1 posiada dokładnie jedno uogólnione zero niedodatniego tupu w półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ oraz dla $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funkcja

$$Q_\tau(z) := \frac{Q(z) - \tau}{1 + \tau Q(z)}, \tag{1}$$

jest klasy N_1. To powoduje, że funkcja $\alpha(\tau)$, która przypisuje $\tau \in \mathbb{R}$ jedyne zero niedodatniego typu funkcji $Q_\tau(z)$, jest dobrze zdefiniowana. W artykułach [W1, W5] badano własności funkcji $\alpha(\tau)$. W szczególności, pokazano [W1, Tw. 3.3], że funkcja $\alpha(\tau)$ jest różniczkowalna, gdy $\operatorname{Im} \alpha(\tau) > 0$, a w [W5, Tw. 3.3] udowodniono, że $\tau \to \alpha(\tau)$ jest ciągła oraz zbiór $\{\alpha(\tau) : \tau \in \mathrm{R} \cup \{\infty\}\}$ na sferze Riemanna stanowi krzywą, która jest homeomorficzna okręgu. Związki pomiędzy teorią funkcji holomorphicznych a teoria perturbacji pozwalają sformułować wyniki prac [W1, W5] w języku teorii operatorów, tak jak to zaprezentowano w Autoreferacie. Mianowicie, na podstawie rezultatów artykułów [W1,W5] oraz pracy V. Derkach, S. Hassi and H.S.V. de Snoo, Operator models associated with Kac subclasses of generalized Nevanlinna functions, Methods of Functional Analysis and Topology, 5 (1999), 65-87, badana jest parametryczna teoria perturbacji dla H-samosprzężonych operatorów w przestrzeni Pontryagina Π_1. Rozważane H-samosprzężone perturbacje rzędu jeden H-samosprzężonego operatora A

$$S(\tau) := A + \tau < \cdot, Hu > u, \quad \tau \in \mathrm{R},$$

gdzie H jest ograniczonym odwracalnym samosprzężonym operatorem w przestrzeni Hilberta $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$ i takim, że przecięcie $\sigma(H)$ z $(-\infty, 0)$ zawiera dokładnie jedną prosta wartość własną. Zakładano również, że wektor u jest cyklicznym wektorem operatora A. We wspominanych pracach, przeprowadzona jest analiza własności wartości własnych niedodatniego typu $\beta(\tau)$ operatora $S(\tau)$ jako funkcji τ, gdzie jak zwykłe funkcja Weyla $1/Q(z) =< (A - z)^{-1} u, Hu > \in N_1$ dostarcza pełnej informacji o $\beta(\tau)$, przy tym $\beta(\tau)$ jest uogólnionym zerem niedodatniego typu funkcji $Q_\tau(z)$, zdefiniowanej jak powyżej. W szczególności, w przypadku istnienia holomorficznego rozszerzenia $Q(z)$ w sąsiedztwie $\beta = \beta(0)$ Tw. 4.5 z [W5] pozwala przeanalizować lokalne zachowanie $\beta(\tau)$ ($|\tau| < \epsilon$).

W pracy [W2] w kontekście dużych macierzy losowych badany jest problem parametrycznej zależności wartości własnej β_N niedodatniego typu H_N-samosprzężonej macierzy X_N

$$X_N = \begin{bmatrix} a_N & -b_N^* \\ b_N & C_N \end{bmatrix}, \quad H_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_N \end{bmatrix},$$

gdzie $a_N \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{C}^N$ i $C_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $C_N^* = C_N$. Macierz X_N jest macierzą losową i przy odpowiednich założeniach probabilistycznych pokazano (Tw 4.1), że, β_N zmierza względem prawdopodobieństwa do pewnego β_0 jak $N \to \infty$. W pracy [W4] rozważono macierz losową $X_N^{(d)} W_N$, gdzie $H_N^{(d)} = \operatorname{diag}\{d, 1, \ldots, 1\}$, $0 \neq d \in \mathbb{R}$, oraz W_N jest losową macierzą Wignera. Główny wynik pracy mówi, że szereg funkcji Weyla

$$Q_{(d)}^{(N)}(z) = -\frac{1}{d}\left(e_0^*\left(X_N^{(d)} - z\right)^{-1} e_0\right)^{-1}, \quad e_0 = \{1, 0, \ldots, 0\},$$

zmierzają probabilistyczne jak $N \to \infty$ do funkcji

$$Q_{(d)}(z) = \frac{(2-d)z + d\sqrt{z^2-4}}{2d}.$$

Artykuły [M1-M5] poświęcone są ogólnej teorii operatorów w przestrzeniach z nieokreślonym iloczynem skalarnym $< H\cdot, \cdot >$, gdzie H jest ograniczonym odwracalnym samospawalny operatorem w przestrzeni Hilberta $(\mathcal{H}, < \cdot, \cdot >)$. W szczególności artykuły [M1, M2, M3] zawierają dogłębne porównanie własności spektralnych operatorów $T^{[*]}T$ oraz $TT^{[*]}$, gdzie $T^{[*]} = H^{-1}T^*H$. W [M4] podana jest konstrukcja rodziny fundamentalnych symetrii przestrzeni Pontryagina Π_1, a w [W5] udowodniono ogólne kryterium na H-samosprzężoność nieograniczonego operatora.

W mojej opinii rezultaty przedstawione w autoreferacie ukazują Kandydata jako badacza o szerokich zainteresowaniach matematycznych oraz potrafiącego używać różnorodnych metod i narzędzi. Dr Michał Wojtylak porusza się swobodnie po wielu działach matematyki i potrafi umiejętnie łączyć i stosować różne metody badań. Kluczowe prace opublikowane są w dobrych czasopismach, np. takich jak: *J. Math. Anal. Appl., Linear Algebra Appl.*. Wyniki w nich zawarte referowane były na specjalistycznych międzynarodowych konferencjach naukowych. Dokonania Kandydata są szeroko znane społeczności matematycznej zajmującej się problemami teorii perturbacji operatorów na przestrzeni Hilberta.

Podsumowując uważam, że rozprawa habilitacyjna dra Michała Wojtylaka stanowi zauważalny wkład w rozwój teorii operatorów, a cały dorobek naukowy Kandydata jest znaczny i uzasadnia nadanie mu stopnia naukowego doktora habilitowanego.

Oleksandr Gomilko