Prof. dr hab. Anna Kamont
Instytut Matematyczny PAN
Oddział w Gdańsku

Gdańsk, 19 maja 2016 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr Rafała Pierzchały przed Radą Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Dr Rafał Pierzchała ukończył studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim w 2001 roku. Stopień doktora nauk matematycznych uzyskał w 2005 roku, również na Uniwersytecie Jagiellońskim, na podstawie rozprawy zatytułowanej *Zastosowania geometrii o-minimalnej w teorii aproksymacji*; promotorem jego doktoratu był prof. dr hab. Wiesław Pawłucki.

Tematyka badawcza dr Rafała Pierzchały należy do analizy funkcji wielu zmiennych zespolonych. Wiodące tematy w jego badaniach to nierówności wielomianowe na zwartych podzbiorach C^n i R^n, aproksymacja wielomianami na zwartych podzbiorach C^n i teoria pluripotencjału.

Dr Rafał Pierzchała jest autorem lub współautorem 12 prac opublikowanych, zaś kolejne 2 są przyjęte do publikacji. Z tego dorobku, 5 prac, oznaczonych w autoreferacie jako [P1] – [P5], składa się na *Osiągnięcie naukowe...*, wymagane przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym.* Cykl ten jest zatytułowany *Zastosowanie zbiorów subanalitycznych i definiowalnych do nierówności wielomianowych i aproksymacji wielomianowej*, zaś wchodzące w jego skład prace zostały opublikowane w latach 2010 – 2015.[1]

Przejdźmy do omówienia cyklu prac [P1] – [P5].

Omówienie i ocena cyklu publikacji *Zastosowanie zbiorów subanalitycznych i definiowalnych do nierówności wielomianowych i aproksymacji wielomianowej*

Omawiany cykl rozpoczyna praca [P1], z wyróżniającym się Twierdzeniem 10.[2] Twierdzenie 10 to pełna odpowiedź na następujące pytanie: pod jakimi warunkami wielomianowy obraz zbioru zachowującego nierówność Markowa również zachowuje nierówność Markowa. W literaturze znane są warunki dostateczne na to, by obraz

[1] W kwestii formalnej: praca [P1] co prawda jeszcze nie ukazała się w druku i nie została przypisana do konkretnego numeru czasopisma, ale w dniu 1 października 2015 została opublikowana na stronie internetowej czasopisma. Uważam, że publikacja online spełnia ustawowy wymóg publikacji.

[2] Używam numeracji z autoreferatu, zarówno przy odwoływaniu się do wyników, jak i do literatury.

AK

$h(E)$ zbioru zachowującego nierówność Markowa również zachowywał nierówność Markowa, patrz np. W. Pawłucki i W. Pleśniak [85] (Proposition 1.2, dla zwartych podzbiorów $E \subset R^n$ i odwzorowań h klasy C^∞, zachowywanie warunku UCP; przypomnijmy, że warunek UPC implikuje zachowywanie nierówności Markowa), W. Pleśniak [94] (Proposition 4.1, tutaj $E \subset R^n$ i h jest odwzorowaniem analitycznym), M. Baran i W. Pleśniak [10] (Theorem 2.5 dla odwzorowań holomorficznych i Theorem 2.8 dla odwzorowań wielomianowych oraz podzbiorów R^n spełniających warunek UCP, obydwa twierdzenia z badaniem zachowania się wykładnika Markowa dla $h(E)$; por. też Twierdzenie 9 w autoreferacie). Praca [P1] podaje pełną charakteryzację odwzorowań wielomianowych h, dla których obraz $h(E)$ dowolnego zbioru E zachowującego własność Markowa również zachowuje nierówność Markowa. Dokładniej, połączenie Twierdzenia 10 i Lematu 11 daje następującą dychotomię: jeśli h jest odwzorowaniem wielomianowym, to albo dla każdego zbioru zwartego E zachowującego niewrówność Markowa, jego obraz $h(E)$ również zachowuje nierówność Markowa, albo obraz $h(E)$ żadnego zbioru zwartego E nie zachowuje nierówności Markowa. Kryterium decydującym o tym, która z tych możliwości zachodzi, jest wielkość rank h, patrz sformułowanie Twierdzenia 10 i Lematu 11.

Wynik otrzymany w Twierdzieniu 10 był motywacją do postawienia pytania czy przeciwobraz zbioru zachowującego nierówność Markowa w odwzorowaniu wielomianowym również zachowuje nierówność Markowa, patrz Pytanie 12. Częściową odpowiedź na to pytanie daje Twierdzenie 13 – twierdzenie to podaje pewne warunki dostateczne na to, by przeciwobraz zbioru spełniającego warunek HCP przez odwzorowanie holomorficzne również spełniał warunek HCP. (Przypomnijmy, że zbiór spełniający warunek HCP zachowuje nierówność Markowa.) Ostatni rozdział pracy [P1] podaje pewne warunki dostateczne na to, by podzbiór $K \subset E$ zbioru E zachowującego nierówność Markowa rownież zachowywał nierówność Markowa, patrz Twierdzenie 14 i Wniosek 15.

Drugą w tym zestawie jest obszerna praca [P2], dotycząca wielowymiarowej wersji nierówności Remeza. Nierówność Remeza jest przypomniana w autoreferacie jako Twierdzanie 2, zaś jej wielowymiarową wersję dla ciał wypukłych, pochodzącą od Yu.A. Brudyi'ego i M.I. Ganzburga [42], znajdujemy w autoreferacie jako Twierdzenie 4. Jak rozumiem, punktem wyjściowym do pracy [P2] było następujące pytanie: czy dla zbiorów $B \subset R^n$ z ostrzami wielowymianowymi (tzn. dla zbiorów spełniających warunek UPC) zachodzi nierówność typu Remeza. Badanie tego zagadnienia doprowadziło do wyodrębnienia szerszej rodziny zbiorów, tzw. zbiorów posiadających specjalne parametryzacje (zbiory z własnością SPP), patrz Definicja 17. Ważną obserwacją jest tu Lemma 3.8 z pracy [P2], mówiący o tym, że zwarty zbiór $B \subset R^n$ z własnością UPC ma również własność SPP. Tak więc w pracy [P2] zarówno główny wynik, Twierdzenie 16, jak i jego konsekwencje, są formułowane dla zbiorów z własnością SPP. Przedstawione w [P2] konsekwencje Twierdzenia 16 są różnorodne: porównywanie funkcji maksymalnych Siciaka dla zbioru B z własnością SPP i jego podzbioru $S \subset B$ o dodatniej mierze, patrz Wniosek 19; szacowanie z dołu rzędu aproksymacji wielomianami na podzbiorze $S \subset B$ dla funkcji ciągłych na S, które nie mają analitycznego rozszerzenia na otoczenie zbioru B, patrz Wniosek 20; porównywanie norm L^q i $L^{q'}$ na B dla wielomianów, patrz Wnioski 22 i 23.

AM

Sądzę, że warto powiedzieć coś o schemacie dowodu Twierdzenia 16. Twierdzenie 16 (= Theorem 1.2 w [P2]) jest konsekwencją połączenia Theorem 9.3, dopuszczającego jeszcze szerszą klasę zbiorów B niż posiadające własność SPP (patrz Definition 9.1 w [P2]), ale z ograniczeniem z dołu na stosunek miar B i $S \subset B$ postaci $|S|/|B| > \varrho > 0$, oraz Lemma 6.2, pozwalającego pozbyć się warunku $|S|/|B| > \varrho > 0$. Z kolei dowód Theorem 9.3 używa Twierdzenia 18 (= Theorem 7.8 w [P2]), będącego pewnym oszacowaniem z dołu miar obrazów zbioru względem pewnej rodziny odwzorowań definiowalnych w strukurach o-minimalnych; założenia Twierdzenia 18 wydają mi się abstrakcyjną wersję własności parametryzacji z Definition 9.1.

Kolejną pracę [P3] widzę jako element większego cyklu prac habilitanta, dotyczących własności Łojasiewicza - Siciaka (ŁS) i jej zastosowań (patrz [R1] - [R4]; mówiąc dokładniej, [P3] wyrasta z pewnych zagadnień rozważanych już [R3] i [R4]). Własność ŁS, badana dokładniej od stosunkowo niedawnych lat, jest to pewne oszacowanie z dołu dla funkcji ekstremalnej Siciaka. W pracy [P3] pokazane jest jednostajne oszacowanie z dołu, z wykładnikiem 1, dla funkcji ekstremalnej Siciaka w przypadku zbioru zwartego $K \subset R^n$, traktowanego jako podzbiór C^n, patrz Twierdzenie 24 (przez jednostajność rozumiem tu zależność stałej ϵ_n z Twierdzenia 24 tylko od wymiaru przestrzeni C^n). Konsekwencją tego wyniku są Twierdzenia 25 i 26 - oszacowanie z góry rzędu aproksymacji wielomianami dla funkcji holomorficznych na pewnym otoczeniu zbioru K. Tu należy zwrócić uwagę na dwa punkty. Po pierwsze, oszacowanie z Twierdzenia 24 pozwala zastąpić otoczenia postaci $\{z \in C^n : \Phi_K(z) < \lambda\}$, pojawiające się w klasycznym sformułowaniu twierdzenia Bernsteina-Siciaka-Walsha (patrz Theorem 3.1 w [P3]), przez otoczenia postaci $K_\lambda = \{z \in C^n : \mathrm{dist}(z, K) < \lambda\}$, prostsze do wyznaczenia. Po drugie, oszacowanie w Twierdzeniu 26 jest jednostajne w f. Oszacowanie to otrzymuje się z twierdzenia Bernsteina-Siciaka-Walsha poprzez zastosowanie pewnego abstrakcyjnego lematu z analizy funkcjonalnej, zacytowanego w [P3] jako Lemma 2.1, a pochodzącego z wcześniejszej pracy habilitanta [R5] (patrz Lemma 2.3 w pracy [R5]). Dopełnieniem tych wyników są oszacowania z dołu rzędu aproksymacji wielomianami dla funkcji ciągłych na K, które nie mają holomorficznego rozszerzenia na odpowiednio duże otoczenie zbioru K, patrz Twierdzenie 30. Twierdzenie 30 wiąże tego rodzaju oszacowanie z dołu z warunkiem HCP. Twierdzenie 27 - sformułowane dla zbiorów subanalitycznych - można widzieć jako szczególny przypadek Twierdzenia 30.

Geometryczny warunek UPC, wprowadzony prze W. Pawłuckiego i W. Pleśniaka [84], określony dla zwartych podzbiorów R^n, implikuje warunek HCP i spełnienie nierówności Markowa. Istotne jest więc posiadanie możliwie szerokiej i naturalnej klasy przykładów zbiorów spełniających ten warunek. W. Pawłucki i W. Pleśniak [84] pokazali, że zwarty i tłusty, subanalityczny podzbiór $E \subset R^n$ ma własność UPC. Główny wynik pracy [P4] to wskazanie pewnej innej klasy zbiorów $E \subset R^n$, mających własność UPC - Twierdzenie 34 mówi, że każdy zbiór $E \subset R^n$, ograniczony, tłusty i definiowalny w pewnej szczególnej ograniczonej wielomianowo strukturze o-minimalnej (strukturze o-minimalej zbieżnych szeregów potęgowych o wykładnikach wymiernych) ma własność UPC. W konsekwencji, takie zbiory mają również własność HCP i zachowują nierówność Markowa. Przy tym, stosowne Przykłady 32

AU

i 33 pokazują, że podobne twierdzenie nie zachodzi dla zbiorów definiowalnych w większej strukturze o-minimalnej R_{an^*} szeregów potęgowych o wykładnikach rzeczywistych.

Praca [P5] dotyczy innego aspektu teorii pluripotencjału, mianowicie pokazania L-regularności (czyli ciągłości funkcji ekstremalnej Siciaka) pewnych podzbiorów $E \subset R^n$, które nie spełniają warunku UPC. W tym celu wprowadzony jest warunek (Λ) dla zbioru E w punkcie z_0, patrz Definicja 36, w istocie równoważny L-regularności zbioru E w z_0, patrz Lemat 37. Warunek (Λ) jest użyty do pokazania L-regularności pewnych zbiorów z ostrzami, patrz Twierdzenia 42, 46 i 49.

Przejdźmy do oceny powyższego cyklu prac. Moim zdaniem, matematycznie prezentuje on bardzo dobry poziom. Podejmowane pytania są naturalne i trudne. Dowody, niejednokrotnie skomplikowane technicznie, wymagały zarówno pomysłowości, jak i odpowiedniej wiedzy. W pracach widać wyraźnie dbałość autora o to, by zrozumieć i wydobyć istotne własności wykorzystywane w dowodach, i formułować wyniki przy możliwie ogólnych założeniach. Dobrą ilustracją jest tu praca [P2] i schemat dowodu jej głównego wyniku, Twierdzenia 16 (patrz wyżej). Należy podkreślić, że wszystkie prace [P1] – [P5] ukazały się bardzo dobrych lub dobrych czasopismach: Math. Ann., Adv. Math., Constr. Approx., Adv. Geom., J. Math. Pures Appl.

Podsumowując, uważam, że przedstawiony cykl prac spełnia wymagania artykułu 16.1 – 16.2 *Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym*, tzn. *(...) stanowi znaczny wkład autora w rozwój określonej dyscypliny naukowej (...)*, tu – matematyki.

Ocena pozostałego dorobku i aktywności naukowej habilitanta

W myśl artykułu 16.1 *Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym*, należy ocenić, czy kandydat *(...) wykazuje się istotną aktywnością naukową (...)*. Kryteria tej oceny przedstawia *Rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 1 września 2011 r. w sprawie kryteriów oceny osiągnięć osoby ubiegającej się o nadanie stopnia doktora habilitowanego.*

Na pozostały dorobek naukowy dr Rafała Pierzchały składa się 9 prac, oznaczonych w autoreferacie [R1] – [R9], przy czym prace [R3] – [R9] są już opublikowane, zaś [R1] i [R2] są przyjęte do druku. Również te prace ukazały się w dobrych lub bardzo dobrych czasopismach. Dominująca w nich tematyka to badanie warunku Łojasiewicza – Siciaka, w szczególności zastosowanie warunku ŁS do szacowania rzędu aproksymacji wielomianami dla funkcji holomorficznych oraz wskazanie przykładów zbiorów spełniających warunek ŁS. Należą tu prace [R1] – [R4] (a także [P3], wchodząca do *Osiągnięcia...* i omówiona już wcześniej). Wymieńmy kilka wyników z tych prac:

(i) Wielomianowo wypukłe wielościany holomorficzne w C^n spełniają warunek ŁS, praca [R3], Twierdzenie 58.

(ii) Podanie warunku koniecznego i dostatecznego na to, by $K \subset R^2$, traktowany jako podzbiór C, spełniał warunek ŁS, Twierdzenie 52, praca [R2]. Wcześniejszą, słabszą wersję tego wyniku znajdujemy w [R4], patrz Twierdzenie 51. Dla porównania przypomnijmy, że Twierdzenie 24 z pracy [P3] zapewnia, że każdy zwarty

AU

podzbiór $K \subset R^n$, traktowany jako podzbiór C^n, spełnia warunek ŁS, i to z wykładnikiem 1 i stałą zależną tylko od wymiaru n i średnicy zbioru K. Wcześniejszą, słabszą wersją tego wyniku jest pochodzące z [R4] Twierdzenie 50.

(iii) Przykłady zbiorów spełniających warunek ŁS w C^n, patrz pochodzące z [R2] Twierdzenia 53 i 54.

(iv) Zachowanie warunku ŁS przez holomorficzne obrazy i przeciwobrazy, patrz pochodzące z [R1] Twierdzenia 63 – 65 i 68.

Warto wspomnieć również pracę [R5], w której autor pokazuje, jak bezpośrednio z twierdzenia Walsha – Bernsteina – Siciaka oraz z nierówności Łojasiewicza otrzymać ich jednostajne wersje, tzn. Twierdzenia 72 i 73. Głównym narzędziem jest tu Lemma 2.3 z [R5], powracający jako narzędzie w podobnym kontekście także w pracy [P3].

Praca [R6], której współautorem jest M. Denkowski (jest to jedyna praca współautorska w dorobku dr R. Pierzchały) należy do nieco innej tematyki. Prace [R7] – [R9] powstały jeszcze przed doktoratem.

Podsumowując: uważam, że również prace [R1] – [R9] dotyczą ciekawej i aktualnej problematyki. Tą część aktywności habilitanta oceniam pozytywnie.

W myśl przywołanego wyżej *Rozporządzenia...*, ocenie podlega także inna aktywność habilitanta: udział w konferencjach, w tym prezentowanie referatów, udział w grantach, działalność dydaktyczna i organizacyjna, współpraca międzynarodowa, indeksy cytowań etc. Dane dotyczące tych aspektów aktywności habilitanta znajdują się w *Wykazie prac naukowych...*, będącym częścią materiałów dostarczonych przez habilitanta. Zapoznałam się z tymi danymi; dodam, że wg bazy MathSciNet, prace habilitanta były cytowane 25 razy przez 8 autorów (dane z dnia 18 maja 2016). Również tą część aktywności habilitanta oceniam pozytywnie.

Konkluzja

Uważam, że przedstawiony przez dr Rafała Pierzchałę cykl prac *Zastosowanie zbiorów subanalitycznych i definiowalnych do nierówności wielomianowych i aproksymacji wielomianowej*, a także jego pozostały dorobek naukowy i inna aktywność, spełniają wymogi stawiane przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym* kandydatom do stopnia doktora habilitowanego.

Z pełnym przekonaniem rekomenduję nadanie dr Rafałowi Pierzchale stopnia doktora habilitowanego.

Anna Kamont

Anna Kamont