dr hab. Michał Jasiczak
Wydział Matematyki i Informatyki UAM
ul. Umultowska 87
61-614 Poznań

Poznań, 30 marca 2016

Recenzja wniosku habilitacyjnego przedstawionego przez dra Rafała Pierzchałę

Pan dr Rafał Pierzchała przedstawił osiągnięcie habilitacyjne zatytułowane "Zastosowania teorii zbiorów subanalitycznych i definiowalnych do nierówności wielomianowych i aproksymacji wielomianowej". Składa się ono z pięciu jednotematycznych publikacji. Publikacje te ukazały się w Math. Ann., Adv. Math., Constr. Approx., Adv. Geom. oraz J. Math. Pures Appl. Są to bardzo dobre czasopisma o uznanej renomie w środowisku matematycznym. Już więc bardzo pobieżna analiza wniosku habilitacyjnego pozwala sformułować pozytywny wniosek. **Jednoznacznie popieram wniosek dra Pierzchały o nadanie stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka.** Muszę przyznać, że recenzowanie tego wniosku sprawiło mi sporo przyjemności. Pan dr Rafał Pierzchała zajmuje się bowiem bardzo interesującą i nietrywialną matematyką. **Co jednak najważniejsze, uzyskał w tej niełatwej przecież dziedzinie wyniki, które z pewnością można uznać za ważne.**

Pan dr Rafał Pierzchała zajmuje się nierównościami wielomianowymi. Dokładniej, bada on w jaki sposób teoria zbiorów subanalitycznych i definiowalnych może być zastosowana do dowodzenia takich nierówności w przypadku wielowymiarowym. Już w 1889 roku Markow udowodnił, że wartości pochodnej wielomianu $P \in \mathbb{R}[X]$ na odcinku $[-1,1]$ można kontrolować znając wartość $\|P\|_{[-1,1]} := \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$. W udowodnionej przez niego nierówności pojawia się stała równa $(\deg P)^2$. Zbiory o tego typu własności nazywa się zbiorami Markowa.

Znacznie później, bo w 1936 roku, Remez wykazał inną klasyczną dzisiaj nierówność: dla wielomianu $P \in \mathbb{R}[X]$ stopnia n zachodzi oszacowanie

$$\|P\|_{[0,1]} \leqslant T_n\Big(\frac{2-|S|}{|S|}\Big)\|P\|_S,$$

gdzie

$$T_n(u) = \frac{1}{2}\Big[(u+\sqrt{u^2-1})^n + (u-\sqrt{u^2-1})^n\Big]$$

oraz $|S|$ oznacza miarę Lebesgue'a mierzalnego zbioru $S \subset [0,1]$, $|S| > 0$. Trzeci podstawowy dla badań dra Pierzchały obiekt to tak zwana funkcja Siciaka

$$\Phi_E(z) := \sup\Big\{|Q(z)|^{1/\deg Q} \colon Q \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n], \deg Q > 0, \|Q\|_E \leqslant 1\Big\}.$$

Kluczowe znaczenie ma powiązanie własności funkcji Φ_E z własnościami zbioru E. Zupełnie podstawowe jest pytanie o jej ciągłość. Zbiory o tej własności nazywa się L-regularnymi, w szczególności ciągłość w punkcie $c \in E$ funkcji Φ_E, to L-regularność w punkcie c zbioru E. Własność HCP zbioru E, z kolei, to hölderowska ciągłość funkcji Φ_E. **Obiekty i własności, którymi zajmuje się dr Rafał Pierzchała są więc klasyczne i naturalne.** Jak zauważa słusznie habilitant w swoim autoreferacie teoria wielowymiarowa nierówności wielomianowych jest znacznie słabiej rozwinięta w porównaniu z jednowymiarową. Jest ona znacznie trudniejsza. **Tym większe znaczenie mają uzyskane przez Niego wyniki. Bardzo wysoko oceniam samą ideę zastosowania teorii zbiorów subanalitycznych, takich pojęć jak o-minimalność, w celu uzyskania nierówności wielomianowych w przypadku wielowymiarowym.**

Największe wrażenie zrobiła na mnie praca dra Pierzchały opublikowana w Adv. Math. W pracy tej udowodnione jest twierdzenie, które uogólnia przedstawione powyżej twierdzenie Remeza na przypadek wielowymiarowy. Jest mianowicie pokazane, że analogiczna nierówność zachodzi dla zbiorów mających własność specjalnej parametryzacji (SPP) i ich mierzalnych podzbiorów o dodatniej mierze Lebesgue'a. Założenie specjalnej parametryzacji wydaje się co prawda bardzo techniczne, ale opisuje ono przecież całkiem naturalną własność zbiorów w $\mathbb{R}^N$. Zresztą sam fakt, że dowody pracują przy tym założeniu świadczy o tym, że jest ono właściwe. Tak jak napisałem omawiana praca zrobiła na mnie największe wrażenie. Autor wykazuje się bardzo dużą biegłością w operowaniu niełatwymi obiektami, które są przedmiotem jego badań. Wystarczy wspomnieć, że dowód opiera się o teorię struktur o-minimalnych. Co prawda, na samym końcu pojawia się klasyczna, jednowymiarowa nierówność Remeza - pozostawia to czytelnika z pewnym uczuciem niedosytu, ale jest to **bardzo poważna i dobra matematyka, a wynik niewątpliwie ważny.** Bardzo ciekawe są także wyniki, które Autor nazywa wnioskami z głównych twierdzeń. Szczególnie zainteresował mnie ten, który ma związek z twierdzeniem udowodnionym przez Bourgain.

W pracy *Markov's inequality and polynomial mappings*, która ukazała się w Math. Ann. Autor zajmuje się zbiorami, na których zachodzi nierówność Markowa. Najważniejszy wynik mówi, że jeżeli $E \subset \mathbb{K}^N$ jest niepustym, zwartym zbiorem spełniającym nierówność Markowa, to $h(E)$ również spełnią tę nierówność, gdy $h\colon \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^{N'}$ jest odwzorowaniem wielomianowym takim, że $\operatorname{rank} h = N'$. Pytanie o to jakie odwzorowania zachowują własność nierówności Markowa jest zupełnie podstawowe. Poprzednio było wiadomo, że własność tę zachowują odwzorowania wielomianowe $h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ takie, że $\operatorname{Jac} h \neq 0$ w punktach wewnętrznych E. Twierdzenie to udowodnili Baran i Pleśniak. W tym świetle wynik dra Pierzchały jest bardzo naturalny i ważny dla teorii nierówności Markowa. Nie ukrywam, że stanowi dla mnie zaskoczenie, że tak podstawowy wynik został uzyskany dopiero teraz. Zwłaszcza, że założenie, że rank $h = N'$ jest założeniem koniecznym. **Dowód omawianego twierdzenia przedstawiony przez dra Pierzchałę jest bardzo staranny i "elegancki".** To zresztą cecha wszystkich wyników uzyskanych przez habilitanta.

W pracy *Approximation of holomorphic functions on compact subsets of* $\mathbb{R}^N$ opublikowanej w Constr. Approx. habilitant bada między innymi funkcję Siciaka. Jest pokazane, że istnieje stała $\varepsilon_N > 0$ zależna tylko od N taka, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^N$ zawierającego co najmniej dwa różne punkty

$$\Phi_K(z) \geqslant 1 + \frac{\varepsilon_N}{\operatorname{diam} K} \operatorname{dist}(z; K).$$

To ciekawy i ładny wynik. Funkcja Siciaka badana jest także w pracy *Siciak's extremal funcion on non-UPC cusps*, która ukazała się w J. Math. Pures Appl. Autor wprowadza warunek, który nazywa warunkiem Λ w punkcie z_0 należącym do zbioru $E \subset \mathbb{C}^N$, a który gwarantuje, że E jest L-regularny w z_0. Badane jest także jak ten warunek zachowuje się przy odwzorowaniach wielomianowych. Co bardzo interesujące, wprowadzony warunek jest spełniony przez bardzo naturalne zbiory takie jak $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^\alpha \leqslant y \leqslant \delta x^\alpha, x \in [0, 1]\}$, gdzie $\alpha > 0$ i $\delta > 1$. W szczególności dla takich zbiorów można rozstrzygnąć, dzięki wprowadzonemu warunkowi, zachodzenie własności L-regularności.

W pracy *Markov's inequality in the o-minimal structure of convergent generalized power series* Autor pokazuje, że dla dużej nowej klasy zbiorów funkcja Φ_E jest hölderowsko ciągła (własność HCP). W szczególności zbiory te spełniają nierówność Markowa. Argument polega na wprowadzeniu pewnej podstruktury $\mathcal{S}$ struktury $\mathbb{R}_{an^*}$, która jest o-minimalną strukturą wielomianowo ograniczoną i modelowo zupełną. Autor pokazuje, że każdy ograniczony, tlusty i definiowalny w $\mathcal{S}$ zbiór jest UPC. **Podobnie jak poprzednie prace, ta jest przykładem bardzo dużej biegłości habilitanta w omawianej tematyce. Jest on niewątpliwie specjalistą w tej dziedzinie.**

Poza pracami wchodzącymi w skład osiągnięcia habilitacyjnego dr Rafał Pierzchała jest autorem 9 artykułów naukowych w czasopismach, które znajdują się w Journal Citation Reports. Ukazały się one lub zostały przyjęte do takich czasopism jak J. Anal. Math, J. Math. Anal. Appl., Ann. Polon. Math. czy Studia Math. **Potwierdzają one mój pogląd, że dr Rafał Pierzchała jest dojrzałym, silnym matematykiem, który uzyskuje wyniki zdecydowanie liczące się w dziedzinie, którą się zajmuje.** Jego prace były cytowane 27 razy, a indeks Hircha wynosi 3. Moim zdaniem, te dane nie odzwierciedlają faktycznego wkładu autora w dziedzinę, którą bada. **Uzyskał On bowiem bardzo ważne wyniki.**

Podobnie mój jednoznaczy pogląd na przedstawiony wniosek potwierdzają inne dane zaprezentowane przez habilitanta we wniosku. Jest On aktywnym matematykiem, wielokrotnie prezentującym swoje osiągnięcia na międzynarodowych konferencjach naukowych. Co ważne, wielokrotnie także był wykonawcą grantów. W latach 2012-2014 był kierownikiem grantu *Nierówności wielomianowe, funkcja ekstremalna i Twierdzenie BWS* finansowanego przez Ministerstwo

Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Jest także kierownikiem pojektu finansowanego w ramach programu OPUS 9 NCN zatytułowanego *Zastosowanie teorii zbiorów subanalitycznych i definiowalnych do nierówności wielomianowych i aproksymacji wielomianowej*. Uczestniczył także w programach europejskich. Wymienić należy dwukrotny udział w Programie POLONIUM odpowiednio w latach 2008-2009 - *Analytic Geometry and Approximation Theory* oraz 2010-2011 - Teoria osobliwości. Koordynatorami pierwszego z nich byli profesorowie W. Pleśniak i V. Thillez, drugiego profesorowie W. Pawłucki i D. Trotman. Docenić należy także osiągnięcia dydaktyczne habilitanta. Oczywiście wielokrotnie prowadził wykłady i ćwiczenia między innymi z analizy, ale także na przykład Elementów logiki i teorii mnogości. Wrażenie robi na mnie także fakt, że zajmuje się szeroko rozumianą promocją matematyki. Z jednej strony był członkiem Komitetu Okręgowego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, z drugiej przyjmował i oprowadzał wycieczki szkolne w ramach Matematycznych Czwartków w Instytucie Matematyki UJ. **To ważna, chociaż często w środowisku matematycznym niedoceniana praca.**

Podsumowując, w pełni i jednoznacznie popieram wniosek dra Rafała Pierzchały o nadanie stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk matematycznych w zakresie matematyki. Dr Pierzchała jest dojrzałym matematykiem, który uzyskał ważne i nietrywialne wyniki. W swoich pracach wykazał się ogromną znajomością badanej tematyki. Dowody są głębokie i staranne. Prace ukazały się w renomowanych czasopismach matematycznych. Dr Rafał Pierchała jest kolejnym ważnym matematykiem wywodzącym się ze środowiska matematycznego Uniwersytetu Jagiellońskiego. Także pozostała aktywność dra Pierzchały uzasadnia nadanie stopnia doktora habilitowanego.

Michał Jasiczak