Streszczenie doktoratu *Rigorous numerics for a singular perturbation problem* autorstwa Aleksandra Czechowskiego, UJ KMO

Wiele modeli matematycznych jest możliwych do opisania przez równania powolno-szybkie. Analiza numeryczna takich układów jest skomplikowanym zadaniem ze względu na obecność wielu skal czasowych. Separacja skal czasowych i w konsekwencji trudność zagadnienia jest odwrotnie proporcjonalna do wartości tak zwanego małego parametru $\epsilon > 0$. Dla $\epsilon = 0$ dany problem można rozłożyć na dwa niżej wymiarowe układy równań różniczkowych – podukład powolny i podukład szybki. Zbiór metod znanych pod nazwą geometrycznej teorii perturbacji singularnych pozwala na opis dynamiki pełnego zagadnienia przez analizę tych dwóch podukładów. W szczególności, metody te mogą zostać użyte do dowodów istnienia pewnych rozwiązań homoklinicznych i okresowych danego układu dla $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, ϵ_0 „dostatecznie małego”.

Naszym zamiarem jest dowód wyżej wspomnianych twierdzeń dla danego układu z ϵ_0 zadanym konkretną liczbą. W tym celu posługujemy się kombinacją dwóch metod topologicznych. Pierwsza z nich to metoda relacji nakrywających, która opisuje w jaki sposób zbiory są przekształcane względem siebie przez odwzorowania Poincarégo. Druga to metoda segmentów izolujących, które pozwalają śledzić orbity odwzorowania Poincarégo na podstawie własności topologicznych pola wektorowego, bez konieczności całkowania numerycznego. Dla układów powolno-szybkich metoda segmentów izolujących jest szczególnie prosta do zastosowania, ze względu na silną hiperboliczność w pobliżu wolnego podukładu.

W tej pracy proponujemy definicję segmentów izolujących, którą można stosować w układach autonomicznych i w połączeniu z relacjami nakrywającymi. Następnie dowodzimy twierdzeń o istnieniu orbit okresowych i homoklinicznych w układach posiadających odpowiednie sekwencje relacji nakrywających i segmentów izolujących. Nasze twierdzenia stosujemy do komputerowo wspieranego dowodu istnienia fal biegnących dla zadanego explicite przedziału ϵ w modelu FitzHugh-Nagumo. W dowodzie istnienia impulsu biegnącego musimy dodatkowo podać lokalne oszacowania na rozmaitość stabilną i niestabilną punktu stacjonarnego w równaniach fali biegnącej; w tym celu stosujemy zależne od ϵ pole stożków.

Dodatkowo, w zagadnieniu okresowej fali biegnącej udaje nam się przedłużyć przedział ϵ istnienia okresowej fali biegnącej przy pomocy metody ścisłej kontynuacji rozwiązań okresowych, opartej na relacjach nakrywających i używającej zmiennej liczby sekcji Poincarégo. Osiągamy wartość ϵ_0 na tyle dużą, że jesteśmy w stanie przeprowadzić dla niej dowód istnienia okresowej fali biegnącej przy pomocy szeroko znanej metody przedziałowej Newtona-Moore’a zastosowanej do ciągu odwzorowań Poincarégo.

A Czechowski

Abstract for the PhD thesis *Rigorous numerics for a singular perturbation problem* by Aleksander Czechowski, UJ KMO

Many mathematical models are governed by fast-slow systems. Such systems are difficult to analyze using standard numerical methods, due to their stiffness, which is inversely proportional to the value of the so-called small parameter ϵ. At $\epsilon = 0$ the problem decomposes into two independent lower-dimensional differential equations known as the slow subsystem and the fast subsystem. A famous technique, commonly referred to as geometric singular perturbation theory, can then be applied in an attempt to describe the dynamics in the full system, based on the properties of these two subsystems. In particular, such methods can be used to prove existence of certain homoclinic and periodic trajectories in a given system for $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, ϵ_0 "small enough".

In this thesis we propose a framework, which allows to replace the words "small enough" with an explicit value of ϵ_0. Our approach is based on a combination of two topological methods. The first one is the method of covering relations, which is used to describe how sets are mapped across each other under Poincaré maps. This method has proved itself to be very effective in several previous studies, though it requires rigorous integration and cannot be applied in the stiff region driven by the dynamics of the slow subsystem. There, we apply the second tool: the method of isolating segments. It allows to retrieve topological information about Poincaré maps based solely on the topology of the vector field, without numerical integration. This approach is often more cumbersome to apply than covering relations. However, in our scenario we can employ it easily, by exploiting the high hyperbolicity generated by the slow dynamics.

We state a definition of isolating segments convenient to apply in autonomous systems and in conjunction with covering relations. Then, we prove several theorems on how suitable chains of isolating segments and covering relations imply existence of periodic and connecting orbits in a given (not necessarily fast-slow) system. Finally, we apply our theorems and conduct a computer assisted proof showing the existence of traveling waves in the FitzHugh-Nagumo model in an explicit range of ϵ. For the case of the traveling pulse, the proof involves a local estimate on the unstable and stable manifold of the stationary point in the traveling wave equation, which is performed via an ϵ-dependent cone field.

Additionally, we extend the parameter range of existence of the periodic wave train by a rigorous continuation procedure based on covering relations, with a varying number of transversal sections. We achieve ϵ_0 large enough, so that a standard proof based on the interval Newton-Moore method applied to a sequence of Poincaré maps succeeds at that parameter value.

A Czechowski