dr hab. Aleksander Ćwiszewski
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, 27.05.2016 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Aleksandra Czechowskiego

pt. „Rigorous numerics for a singular perturbation problem"

Przedstawiona rozprawa doktorska została przygotowana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie. Promotorem rozprawy jest prof. dr hab. Piotr Zgliczyński. Praca została napisana w języku angielskim i liczy łącznie 100 stron.

Uzyskane w rozprawie wyniki otrzymano przy użyciu metod topologicznych zastosowanych do potoków generowanych przez układy równań różniczkowych, a precyzyjniej mówiąc ogólnych twierdzeń, które z istnienia skończonego ciągu podzbiorów odpowiednich sekcji transwersalnych przestrzeni fazowej, wnioskują o istnieniu trajektorii okresowej lub homoklinicznej. Zastosowanie tych metod dla otrzymania głównych wyników rozprawy, wymagało doboru szeregu odpowiednich sekcji i ich podzbiorów oraz przeprowadzenia weryfikacji założeń dot. wzajemnych relacji między tymi zbiorami, wyrażonych w języku dynamiki badanego układu równań. Wszystkie obliczenia musiały zostać przeprowadzone z zachowaniem rygoru arytmetyki przedziałowej (*rigorous numerics*), aby uwzględnić skończoną reprezentowalność liczb rzeczywistych oraz oczywisty fakt, że metody numeryczne przy rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych generują pewien błąd. Ta ostatnia część została przeprowadzona przy użyciu programu komputerowego (kod źródłowy dostępny na stronie www autora [16]), który korzysta z bibliotek CAPD (dostępnych pod adresem [1]). Opisana metodologia znalazła odpowiednie odbicie w redakcji pracy, która jest napisana w sposób ścisły i umożliwiający prześledzenie prowadzonych rozumowań, a także zapoznanie się z implementacją algorytmów. Nie mam zastrzeżeń dotyczących poprawności języka angielskiego użytego w rozprawie. Praca jest zredagowana bardzo starannie, potrafiłbym wskazać zaledwie kilka drobnych pomyłek.

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów. We wstępie (rozdział 1), autor ogólnie przedstawia zasadnicze idee stosowane w komputerowo wspomaganym dowodzeniu twierdzeń dot. dynamiki układów równań różniczkowych (*computer assisted proofs*) oraz pomysł użycia metod topologicznych przy pomocy tzw. segmentów izolowanych. Następnie formułowany jest problem istnienia rozwiązań okresowych w trójwymiarowym układzie FitzHugh-Nagumo, który zadaje tzw. układ dynamiczny o dwóch szybkościach (*fast-slow system*). Autor formułuje tu główne wyniki dotyczące istnienia rozwiązań okresowych dla tego układu (tw. 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3) oraz orbity homoklinicznej (tw. 1.2.4), wskazuje na główne wyzwania dotyczące problemów ze stosowaniem metod numerycznych w pobliżu wolnej rozmaitości (*slow manifold*) oraz ogólnie szkicuje idee dowodów. Rozdział 2 prezentuje – zgodnie z tytułem – uzyskane w pracy metody topologiczne, które znajdują zastosowanie do badania dynamiki układów równań. W rozdziale 3 metody topologiczne z drugiego rozdziału znajdują zastosowanie do modelowego układu, którego uproszczona dynamika ma zasadnicze cechy układu FitzHugh-Nagumo. Następnie odnosząc się do konstrukcji odpowiednich segmentów dla modelowego układu, autor opisuje wspomagane komputerowo dowody zasadniczych rezultatów dla właściwego układu FitzHugh-Nagumo. Ostatni 4 rozdział poświęcony jest uwagom nt. otrzymanych wyników na tle rezultatów uzyskanych przy pomocy metod analitycznych oraz perspektywom badawczym. Rozprawa jest opatrzona spisem treści i bibliografią.

Część rozprawy dotycząca rozwiązań okresowych pochodzi z pracy autora i promotora [17].

Zawartość rozprawy. Motywację do rozważań stanowią następujące równania w modelu FitzHugh-Nagumo przewodzenia impulsu nerwowego

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(u-a)(1-u) - w,\ x \in \mathbb{R}, \tau > 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \epsilon(u - w), x \in \mathbb{R}, \tau > 0,$$

gdzie parametry $\gamma > 0$, $a \in (0,1)$ są ustalone oraz $\epsilon > 0$ jest małym parametrem. Szukając rozwiązań w postaci tzw. wędrujących fal (*traveling waves*), tj. postaci $u(x,\tau) = u(x + \theta\tau)$ i $w(x,\tau) = w(x+\theta\tau)$, z prędkością $\theta > 0$, otrzymamy układ równań zwyczajnych (po dodaniu niewiadomej $v := u'$)

$$(1) \qquad \begin{cases} u' = v, \\ v' = \gamma(\theta v - u(u-a)(1-u) + w), \\ w' = \frac{\epsilon}{\theta}(u - w), \end{cases}$$

nazywany *układem FitzHugh-Nagumo.* Orbity homokliniczne i okresowe takiego układu to odpowiednie „wędrujące profile” rozwiązań w wyjściowym modelu.

Celem rozprawy staje się wykazanie, że przy odpowiednich wartościach parametrów, w tym dla ϵ bliskich zeru, badany układ równań posiada rozwiązania okresowe oraz orbity homokliniczne dla zerowego punktu równowagi. W całej rozprawie zakłada się, że $a := 0.1$ i $\gamma := 0.2$. Główne wyniki rozprawy mówią, że dla $\epsilon \in (0, 0.0015]$ i $\theta = 0.61$ zagadnienie (1) posiada orbitę okresową (tw. 1.2.1 i 1.2.2) oraz że dla każdego $\epsilon \in (0, 5 \cdot 10^{-5}]$ istnieje $\theta \in [1.2624, 1.2675]$ taka, że układ (1) posiada orbitę homokliniczną (tw. 1.2.4). Zasadnicze trudności pojawiają z powodu osobliwości przejścia między równaniami, gdy $\epsilon \to 0^+$ (zmiana wymiaru przestrzeni fazowej układów) oraz przeprowadzenie dowodu dla ϵ z przedziału lewostronnie otwartego.

Zastosowana metoda bazuje na takich pojęciach jak *h-zbiór* zawarty w sekcji transwersalnej względem potoku oraz *segment izolowany* w przestrzeni fazowej. Ogólnie mówiąc, h-zbiór to homeomorficzny obraz kostki, dla której obrazy przeciwległych ścian są wyróżnione jako punkty wyjścia, albo punkty wejścia. Natomiast przez izolowany segment dla potoku rozumie się podzbiór przestrzeni fazowej, który jest dyfeomorficzny z kostką jednostkową w taki sposób, że (w tzw. kierunku centralnym) obraz jednej ze ścian (przedniej) składa się z punktów wejścia, a przeciwległej (tylnej) z punktów wyjścia oraz obrazy (bocznych) przeciwległych ścian kostki są albo punktami wejścia do segmentu (dla tzw. kierunku stabilnego), albo wyjścia (dla tzw. kierunku niestabilnego). Główne twierdzenie użyte w dowodzie istnienia rozwiązań okresowych dla (1) – twierdzenie 2.3.5, w swej topologicznej części, bazuje na wyniku Zgliczyńskiego i Gidei (tw. 2.3.1) o istnieniu punktu stałego dla złożeń $g_k \circ g_{k-1} \cdots g_0$ odwzorowań g_i, $i = 0, \ldots, k$, takich, że g_i zadaje *generyczne nakrycie* z nietrywialnym stopniem topologicznym pomiędzy dwoma h-zbiorami X_{i-1} i X_i dla każdego $i = 1, \ldots, k$. W przypadku twierdzenia 2.3.11 stanowiącego główne narzędzie do wykazania istnienia orbit homoklinicznych, topologicznego argumentu dostarcza wynik

Wilczaka i Zgliczyńskiego (tw. 2.3.9), który mówi o istnieniu połączenia dysku poziomego w pierwszym h-zbiorze z dyskiem pionowym w ostatnim h-zbiorze poprzez ciąg odpowiednich złożeń między tymi h-zbiorami. Autor pokazał w ogólnej sytuacji równania różniczkowego $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, że odpowiednie relacje generycznego nakrywania h-zbiorów można uzyskać na dwa sposoby:
(a) przez odwzorowanie Poincarégo, ewentualnie jego modyfikację (patrz tw. 2.2.10 i tw. 2.2.11), gdy kolejne h-zbiory są obrazami ścian przednich i tylnych pewnego segmentu izolowanego; albo
(b) przez tzw. odwzorowanie wyjścia lub pochodzące od niego (patrz tw. 2.2.15 i 2.2.16), gdy przynajmniej jeden z h-zbiorów jest obrazem bocznej ściany (złożonej albo z punktów wejścia, albo z punktów wyjścia) pewnego segmentu izolowanego.
Ta druga sytuacja będzie miała zastosowanie przy przejściu między obszarami o szybkiej i wolnej dynamice układu (1), gdy ϵ jest małe. Oprócz wspomnianych wyżej trójwymiarowych twierdzeń 2.3.5 i 2.3.11, praca zawiera ogólne twierdzenia dla równań różniczkowych w $\mathbb{R}^n$, które, choć nie zostały użyte do badania układu (1), wskazują na możliwość stosowania tego typu metod dla wyżej wymiarowych układów (patrz tw. 2.3.2 i 2.3.10).

Wymienione wyżej narzędzia zostały zastosowane przez autora do komputerowo wspomaganych dowodów istnienia rozwiązań okresowych i rozwiązań homoklinicznych dla (1). Dowód istnienia rozwiązania okresowego, tj. twierdzenia 1.2.1, polega na zlokalizowania „szybkich" trajektorii (lewej i prawej) łączących dwie gałęzie (dolną i górną) „wolnej" rozmaitości oraz wskazania tam czterech segmentów izolowanych wokół „początków" i „końców" trajektorii łączących. Następnym krokiem jest połączenie dolnych i górnych segmentów wzdłuż „szybkich" trajektorii łączących poprzez wstawienie dodatkowego h-zbioru znajdującego się pomiędzy nimi. Wreszcie połączenia wzdłuż dolnej i górnej gałęzi rozmaitości wolnej jest otrzymywane przez łańcuchy kilkudziesięciu h-zbiorów. Niewątpliwie pewną trudność przysporzyło autorowi dobranie tych w/w obiektów w taki sposób, aby były odpowiednie dla dowolnie małych ϵ. Obliczenia zostały przeprowadzone z zachowaniem rygoru arytmetyki przedziałowej. Podobnie wyglądają dowody pozostałych wyników dla (1), tj. twierdzeń 1.2.2 i 1.2.4.

Ocena rozprawy. Uzyskane w rozprawie wyniki wpisują się w bardzo ważny i szeroki nurt badań nad dynamiką równań różniczkowych. Zaproponowane w rozprawie narzędzia topologiczne istotnie opierają się na wcześniejszych wynikach Gidei i Zgliczyńskiego [80] oraz Wilczaka i Zgliczyńskiego [71]. Wkład autora polega na wykazaniu, że relacja nakrywania pomiędzy h-zbiorami jest realizowana przez odwzorowanie przesunięcia wzdłuż trajektorii pomiędzy sekcjami transwersalnymi oraz dzięki odpowiednio rozumianym segmentom izolowanym w przestrzeni fazowej. Pojęcie segmentu izolowanego pochodzi od Srzednickiego, który (na wzór metody Ważewskiego dla potoków) użył go w rozszerzonej przestrzeni fazowej do badania dynamiki równań nieautonomicznych. Metody te były i są rozwijane przez Srzednickiego, a także Mrozka, Zgliczyńskiego, Wójcika i grono ich współpracowników. W tej pracy użyto segmentów izolowanych dla układów autonomicznych, a uzyskane tu twierdzenia pokazują, że topologiczną relację nakrywania dla h-zbiorów można weryfikować przy pomocy geometrycznych warunków, które można zbadać analitycznie, a nawet numerycznie. Druga część rozprawy, czyli zastosowanie otrzymanych topologicznych kryteriów do układu FitzHugh-Nagumo, stanowi obiektywną weryfikację zrozumienia dynamiki tego konkretnego układu, gdyż zastosowanie metod numerycznych wymaga odpowiedniego podejścia, szczególnie przy doborze segmentów izolowanych, które spełniałyby założenia wspomnianych narzędzi topologicznych dla ϵ bliskich zeru oraz umiejętnego podejścia do obliczeń numerycznych wzdłuż gałęzi „wolnej" rozmaitości.

Z pewnością przedstawiona rozprawa jest kontynuacją i częścią pewnego szerszego programu związanego z osobą promotora rozprawy. Nadaje to raczej szerszy kontekst tym rezultatom i na pewno nie deprecjonuje ich. Uważam, że uzyskane w rozprawie wyniki zarówno te dotyczące narzędzi topologicznych, jak również ich wspomaganych komputerowo zastosowań do układu FitzHugh-Nagumo są ciekawe i nietrywialne.

Jednak chcę zwrócić uwagę na pewną słabość tej rozprawy, którą upatruję w braku wyjaśnień i/lub dyskusji nt. tego jakie znaczenie mają tutaj zastosowane argumenty topologiczne. W rozdziale drugim autor wprowadza stopień topologiczny, który jest niezbędny do zdefiniowania relacji nakrywania, ale – w praktycznym wymiarze – na tym się kończy jego rola w pracy. W następnych podrozdziałach autor formułuje i używa twierdzeń z prac [80] i [71]. Jednak nie wspomina nic o intuicjach stojących za relacją nakrywania pomiędzy h-zbiorami, ani o tym jaką rolę w dalszych rozważaniach odgrywa nietrywialność stopnia topologicznego odwzorowania A (pojawiającego się w definicji 2.1.4). Tym samym cała topologiczna warstwa została niejako ukryta we wspomnianych już wynikach z prac [80] i [71]. Przy czym zaznaczam, że nie chodziłoby tu o powtórzenie dowodów (do których są przecież precyzyjne odnośniki), ale wyjaśnienie topologicznego „powodu" pojawienia się punktu stałego złożenia odwzorowań czy połączenia pomiędzy dyskiem poziomym w pierwszym h-zbiorze, a dyskiem pionowym w ostatnim h-zbiorze.

Konkluzja. Biorąc pod uwagę wyżej sformułowane oceny, uważam, że rozprawa doktorska mgr. Aleksandra Czechowskiego spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania oraz wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Aleksander Ćwiszewski